



ing
maschinenbau

Hendrik Kuhlmann

Strömungsmechanik

Hydrodynamische Grundlagen

3

ÜBERBLICK

3.1 Kinematik	58
3.1.1 Substantielle Ableitung	59
3.1.2 Linien in einem strömenden Fluid	61
3.1.3 Visualisierung und Messung der Bewegung eines Fluids	63
3.1.4 Lokale Deformation eines Fluids	65
3.2 Reynolds' Transport-Theorem	69
3.3 Erhaltungsgleichungen für reibungsfreie Fluide	71
3.3.1 Massenerhaltung	71
3.3.2 Impulserhaltung	72
3.3.3 Drallerhaltung	73
3.3.4 Erhaltung der Gesamtenergie	74
3.3.5 Thermodynamische Energie	75
3.4 Bemerkungen zur Euler-Gleichung	75
Zusammenfassung	77
Aufgaben	78

Die wichtigsten Konzepte zur Beschreibung der Dynamik von Fluiden werden eingeführt. Neben den Begriffen Geschwindigkeits-, Druck- und Temperaturfeld wird die Eulersche und die Lagrange Beschreibungsweise der Dynamik von Fluiden erklärt. Auch die Konzepte eines substantiellen Fluidelements und der substantiellen Ableitung werden vorgestellt. Zur Beschreibung von Strömungen und zur richtigen Interpretation von Strömungsvisualisierungen werden verschiedene Linien im Fluid definiert. Die Stromröhre und der Stromfaden sind wichtige Hilfsmittel für die näherungsweise Berechnung von Strömungen. Die Strömungsformen der Translation, Rotation und Dehnung sind von elementarer Bedeutung. Man kann sie durch die Analyse der Strömung in der Nähe eines festen Punktes gewinnen. Als Grundlage für die mathematische Beschreibung der zeitlichen Entwicklung von Strömungen wird das Reynoldssche Transport-Theorem abgeleitet. Es liefert die universelle Form der Erhaltungsgleichungen für Masse, Impuls und Energie eines reibungsfreien Fluids sowohl in differentieller als auch in integraler Gestalt.

Zur mathematischen Beschreibung makroskopischer Strömungsvorgänge können wir unter Beachtung der in Abschnitt 1.2.1 diskutierten Einschränkungen von einem Kontinuum ausgehen. Dabei werden jedem Raumpunkt $\mathbf{x}$ zu jedem Zeitpunkt t ein Geschwindigkeitsvektor $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, ein Druck $p(\mathbf{x}, t)$, eine Temperatur $T(\mathbf{x}, t)$ und ggf. noch andere Größen zugeordnet.

In der Hydrostatik ging es lediglich darum, die skalare Druckverteilung $p(\mathbf{x})$ nach (2.2) zu bestimmen, wobei der Druck meist nur von einer Raumrichtung abhängt. Wenn die angreifenden Kräfte nicht durch einen hydrostatischen Druckgradienten kompensiert werden können, beginnt das Fluid zu fließen. Um die mit strömenden Fluiden verbundenen vielfältigen Phänomene verstehen und nutzbar machen zu können, ist es erforderlich, neben der Dynamik des *Druckfelds* $p(\mathbf{x}, t)$ auch diejenige des vektoriellen *Geschwindigkeitsfeldes* $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ mathematisch zu beschreiben. Dazu bedient man sich im allgemeinen der Newtonschen Mechanik. Eine gewisse Komplikation besteht darin, dass beispielsweise der Impuls, an dessen Änderung man interessiert ist, selbst an das sich bewegende Fluid gebunden ist. Bevor wir uns jedoch der Dynamik zuwenden, sollen zunächst einige rein geometrische Betrachtungen über das Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ angestellt werden.

3.1 Kinematik

Am einfachsten stellt man den Geschwindigkeitsvektor $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ mit Hilfe kartesischer Koordinaten (x_1, x_2, x_3) dar. Dann ist $\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3$ und $\mathbf{u} = u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2 + u_3 \mathbf{e}_3$ mit den kartesischen Einheitsvektoren $\mathbf{e}_i$, $i = 1, 2, 3$. Manchmal ist auch die Verwendung anderer Koordinaten (Polarkoordinaten, Kugelkoordinaten etc.) sinnvoll, wenn diese der Geometrie des Problems besser angepaßt sind. Besonders einfach werden die Gleichungen in einer koordinatenunabhängigen Darstellung mit Hilfe des Nabla-Operators (siehe auch Anhang A).

Generell haben sich zwei verschiedene Beschreibungsweisen von Strömungen als sinnvoll erwiesen.

- 1 **Eulersche Beschreibung:** Zur vollständigen Beschreibung der Bewegung eines Fluids wird zu jedem Zeitpunkt t das Geschwindigkeitsfeld an *jedem Punkt*

angegeben: $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$. Man verfolgt also die zeitliche Entwicklung von $\mathbf{u}$ an allen festen Ortspunkten $\mathbf{x}$. Diese Beschreibung ist recht intuitiv.

- 2** *Lagrangesche Beschreibung*: Sie basiert auf der Angabe *sämtlicher Bahnlinien* $\mathbf{X}(t)$ (Trajektorien) aller individuellen Fluidteilchen. Die Fluidpartikel werden durch ihren jeweiligen Startpunkt $\mathbf{x}_0 = \mathbf{X}(t = t_0)$ bei $t = t_0$ unterschieden. Man kann sich vorstellen, dass alle Fluidteilchen zum Zeitpunkt $t = t_0$ markiert und danach ihre Bahnen im Raum verfolgt werden.

Wie wir in Abschnitt 3.1.2 sehen werden, ist die Unterscheidung zwischen diesen Beschreibungsweisen unter anderem wichtig für die Interpretation von Photographien von Fluidteilchen, die zum Zwecke der Strömungsvisualisierung markiert werden. Bei der mathematischen Beschreibung wird aber meist die Eulersche Beschreibung verwendet.

3.1.1 Substantielle Ableitung

Einen wichtigen Zusammenhang zwischen der Eulerschen (fester Ort) und der Lagrangeschen Betrachtung (festes Teilchen, mit der Strömung bewegt) kann man anhand der Beschleunigung eines Fluidteilchens diskutieren. Es sei $\mathbf{u}$ die Geschwindigkeit eines markierten Fluidteilchens. Dann ist die Beschleunigung des mit der Strömung mitbewegten Teilchens *per definitionem* gegeben durch (siehe auch ► Abb. 3.1)

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{u}(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}, t + \Delta t) - \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)}{\Delta t}. \quad (3.1)$$

Wenn man die Taylor-Entwicklung bis zur ersten Ordnung¹

$$\mathbf{u}(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}, t + \Delta t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \Delta t \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \Delta \mathbf{x} \cdot \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + O\left[(\Delta t)^2, \Delta t \Delta \mathbf{x}, (\Delta \mathbf{x})^2\right] \quad (3.2)$$

einsetzt, erhält man die Beschleunigung

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \frac{\Delta \mathbf{x}}{\Delta t} \cdot \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \right) = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} =: \frac{D\mathbf{u}}{Dt}. \quad (3.3)$$

Im letzten Schritt haben wir zur Abkürzung den Ableitungsoperator

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \quad (3.4)$$

¹ Der in linearer Ordnung auftretende Term $\nabla \mathbf{u}$ ist nichts anderes als die (transponierte) Jacobi-Matrix

$$\nabla \mathbf{u} = \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}.$$

Der Tensor (die Matrix) $\nabla \mathbf{u}$ darf nicht mit der Divergenz von $\mathbf{u}$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}$$

verwechselt werden. Der Punkt $\cdot$, der das Skalarprodukt anzeigt, ist wesentlich.

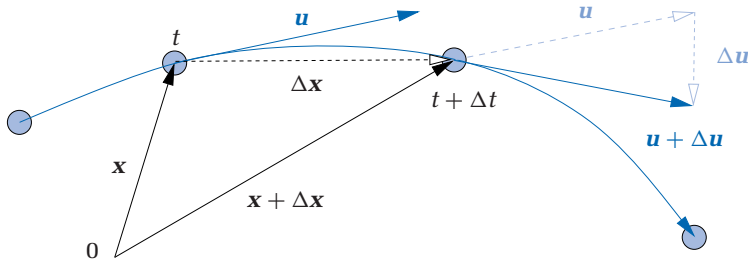


Abb. 3.1: Zur Berechnung der Beschleunigung eines substantiellen Fluidelements.

definiert. Die Ableitung D/Dt nennt man *substantielle Ableitung*. Es ist die totale zeitliche Ableitung im Lagrangeschen Sinne² und setzt sich additiv zusammen aus der *partiellen Ableitung* $\partial/\partial t$ (zeitliche Ableitung am festen Ort im Eulerschen Sinn) und der *konvektiven Ableitung* $\mathbf{u} \cdot \nabla = u_1 \partial_1 + u_2 \partial_2 + u_3 \partial_3$.³ Die zeitliche Änderung einer Größe f in einem Bezugssystem, das sich mit dem Fluidpartikel bewegt (Df/Dt), ergibt sich dadurch, dass sich die Größe f am festen Ort zeitlich ändert ($\partial f/\partial t$), plus einem Anteil, der durch die Bewegung des mit dem Fluidpartikel mitbewegten Koordinatensystems kommt ($\mathbf{u} \cdot \nabla f$).

Zur Verdeutlichung betrachten wir eine stationäre homogene Strömung ($\mathbf{u} = u \mathbf{e}_x = \text{const.}$), wobei die Temperatur in Stromrichtung variieren möge (► Abb. 3.2), ähnlich wie z. B. bei einer stationären Diffusionsflamme. In diesem stationären Fall ist die Temperatur an einem festen Ort zeitlich konstant: $\partial T/\partial t = 0$. Die Temperaturänderung, die von einem Fluidelement *gesehen* wird, das in der Zeit Δt den Weg $u \Delta t$ zurücklegt, ist $\Delta T \approx u \Delta t (\partial T/\partial x)$. Damit ist $\Delta T/\Delta t \approx DT/Dt = u(\partial T/\partial x)$. Im betrachteten Spezialfall eines stationären Felds $T(x)$ ist also die substantielle Ableitung gleich der konvektiven Ableitung. Die zeitliche Änderung der Temperatur des Fluidpartikels ist proportional zur Geschwindigkeit und dem Temperaturgradienten in Richtung der Geschwindigkeit.⁴

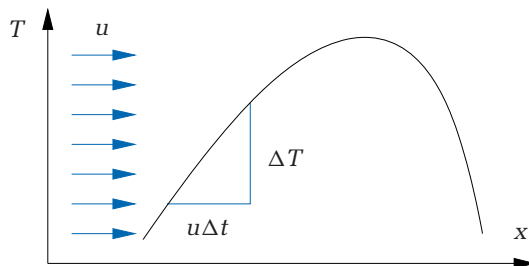


Abb. 3.2: Beispiel zur Verdeutlichung der konvektiven Ableitung $\mathbf{u} \cdot \nabla T$. In einer Dimension ist $\mathbf{u} \cdot \nabla T = u \partial_x T$.

² Mathematisch besteht zwischen der substantiellen Ableitung D/Dt und der totalen Ableitung d/dt kein Unterschied.

³ Hierbei ist ∂_i die Kurzform für $\partial/\partial x_i$.

⁴ Beachte, dass im allgemeinen Fall ∇T selbst vom Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{u}$ abhängt (siehe Abschnitt 7.1.3).

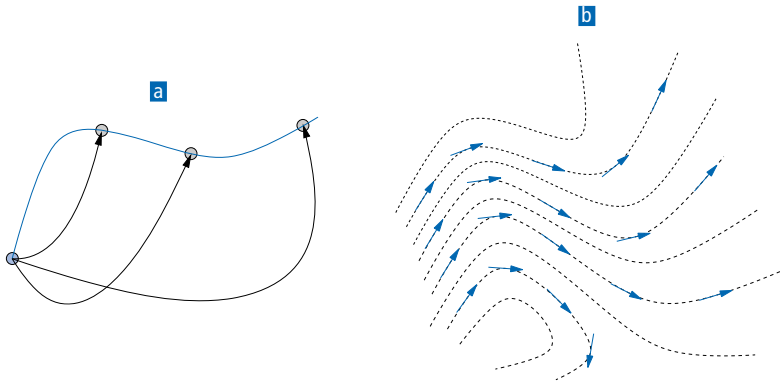


Abb. 3.3: **a** Streichlinie (blau), die im blauen Punkt entstanden ist, sowie Trajektorien (schwarz), die zu unterschiedlichen Zeiten vom Ausgangspunkt (blau) ausgegangen sind. **b** Zusammenhang zwischen Stromlinien (gestrichelt) und der Richtung der Geschwindigkeitsvektoren (blau), die für jede zweite Stromlinie gezeichnet sind (der Betrag der Geschwindigkeit ist nicht richtig dargestellt).

3.1.2 Linien in einem strömenden Fluid

Es gibt verschiedene Linien, mit denen man eine Strömung anschaulich, aber auch mathematisch, beschreiben kann. Der Unterschied zwischen den verschiedenen Lini-entypen ist in ► Abb. 3.4 am Beispiel der Zylinderumströmung dargestellt. Im einzelnen sind dies

- **Trajektorien:** Eine Trajektorie ist die Bahn, die ein bestimmtes (markiertes) Fluidteilchen im Laufe der Zeit im Raum beschreibt (► Abb. 3.3a). Man kann sich die Projektion einer Trajektorie als Ergebnis einer *Langzeitbelichtung* vorstellen, bei der ein markiertes Fluidelement eine Spur auf dem Film hinterläßt. Mathematisch ergibt sich die Trajektorie $\mathbf{X}(t; \mathbf{x}_0)$ eines Teilchens, das sich zum Zeitpunkt t_0 bei $\mathbf{x}_0$ befand, aus der Integration von $d\mathbf{X}/dt = \mathbf{u}(\mathbf{X}, t)$. Dazu muss man natürlich $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ kennen.
- **Stromlinien:** Dies sind Linien im Raum, die zu einem gegebenen Zeitpunkt in jedem Raumpunkt tangential zum Geschwindigkeitsvektor $\mathbf{u}$ sind (► Abb. 3.3b). Da der Geschwindigkeitsvektor keine Komponente senkrecht zur Tangente an die Stromlinie besitzt, gilt für Stromlinien $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \times d\mathbf{x} = 0$, wobei $d\mathbf{x}$ ein Linienelement der Stromlinie ist.⁵ Wenn man diese Relation in kartesischen Komponenten schreibt, erhält man

$$\mathbf{u} \times d\mathbf{x} = \begin{pmatrix} u_2 dx_3 - u_3 dx_2 \\ u_3 dx_1 - u_1 dx_3 \\ u_1 dx_2 - u_2 dx_1 \end{pmatrix} = 0.$$

Daraus folgt

$$\frac{dx_i}{dx_j} = \frac{u_i}{u_j}.$$

⁵ Das Kreuzprodukt zweier zueinander orthogonaler Vektoren verschwindet.

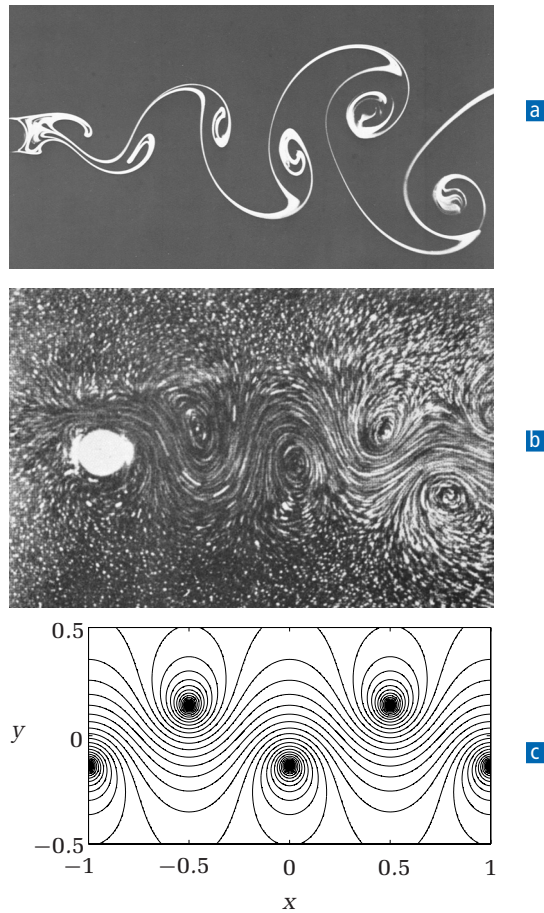


Abb. 3.4: Darstellung verschiedener Linientypen anhand der Kármánschen Wirbelstraße hinter einem angeströmten Zylinder (in **a** und **b** links im Bild). Die Strömung selbst ist durch die Reynolds-Zahl charakterisiert (Abschnitt 7.1.4). **a** Momentaufnahme von Streichlinien bei einer Reynolds-Zahl $Re = 140$ (Abbildung auf dem Umschlag des Buches von Van Dyke (1982); Aufnahme: S. Taneda). **b** zeigt kurze Trajektorien für $Re = 250$ in einem Koordinatensystem, in dem das Fluid für $|x| \rightarrow \infty$ in Ruhe ist (Prandtl & Tietjens 1957a). Für kurze Belichtungszeiten sind die Trajektorien identisch mit den Stromlinien. In **c** ist die analytische Näherung der Stromlinien der Kármánschen Wirbelstraße durch zwei versetzte Reihen entgegengesetzt rotierender aber gleichstarker Fadenwirbel (siehe Abschnitt 5.4.2) gezeigt. Das Verhältnis des Abstands der beiden Reihen zum Wirbelabstand innerhalb einer Reihe beträgt $k = 0.2801$ (siehe auch von Kármán (1912) und Lamb (1932)).

Die Steigungen (Richtungen) einer Stromlinie verhalten sich wie das Verhältnis der entsprechenden Geschwindigkeitskomponenten. Wenn das Geschwindigkeitsfeld stationär (d. h. zeitunabhängig) ist, dann sind auch die Stromlinien stationär. Bei instationären Strömungen ändern sich die Stromlinien mit der Zeit.

- **Streichlinien:** Wenn man markierte Fluidteilchen über einen Zeitraum Δt von einer festen Stelle $\mathbf{x}_0$ in die Strömung freigibt, liefert eine *Momentaufnahme* aller markierten Teilchen eine Streichlinie (z. B. die Rauchfahne aus einem Schlot).

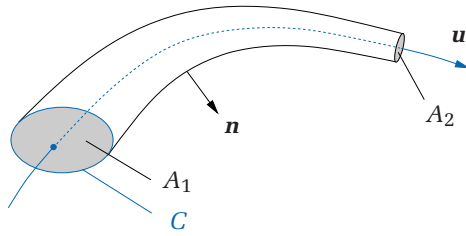


Abb. 3.5: Stromröhre mit definierender geschlossener Kurve C .

Gelegentlich wird dieses Verfahren in Experimenten eingesetzt. Die einzelnen Liniensegmente einer Streichlinie sind alle zu unterschiedlichen Zeiten bei $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ entstanden. Bei zeitabhängigen Strömungen unterscheiden sich die Trajektorien von früh gestarteten Teilchen von denjenigen, die später gestartet sind (► Abb. 3.3a).

Beachte: Bei *stationären Strömungen* sind Stromlinien, Trajektorien und Streichlinien identisch. Bei *instationären Strömungen* sind alle drei Linientypen verschieden voneinander.

Ein wichtiges Konzept in der Strömungsmechanik ist die *Stromröhre*. Eine Stromröhre ist ein röhrenförmiges Volumen, dessen Berandung durch eine Menge von Stromlinien gebildet wird, die alle durch eine ortsfeste geschlossene Raumkurve C gehen (► Abb. 3.5). Genau wie die Stromlinien, so ändert sich i. a. auch eine Stromröhre mit der Zeit, wenn die Strömung instationär ist. In einer stationären Strömung sind alle Stromröhren stationär. Wenn die Querschnittsfläche der definierenden Raumkurve C verschwindend klein ist, erhält man einen *Stromfaden*.

Das Konzept des Stromfadens ist von großer praktischer Bedeutung für die näherungsweise Lösung einfacher Strömungsprobleme. Der Querschnitt eines Stromfadens kann sich in Längsrichtung verringern oder erweitern.⁶ Entscheidend ist, dass die definierende Kurve C immer so klein gewählt wird, dass die Querschnittsfläche des Stromfadens auch an der weitesten Stelle immer noch klein genug ist, um alle relevanten Größen (Dichte, Druck, Temperatur, Geschwindigkeit etc.) über den Querschnitt des Stromfadens als konstant ansehen zu können. Alle Größen hängen dann nur von der Position s entlang des Stromfadens ab. Dies bedeutet eine signifikante Vereinfachung für die mathematische Behandlung, da mit Hilfe dieses Konzepts das ursprünglich dreidimensionale Problem auf ein eindimensionales reduziert wird.

3.1.3 Visualisierung und Messung der Bewegung eines Fluids

Um die Bewegung eines Fluids sichtbar zu machen, möchte man bestimmte Fluidteilchen markieren, um dann ihre Bewegung verfolgen zu können. Eine sehr alte Methode ist die Markierung von Fluidteilchen durch Tinte (siehe z. B. ► Abb. 7.14b–d). Auch kann man sehr kleine reflektierende Aluminium-Plättchen (Flitter) in eine Flüssigkeitsströmung einbringen. In einem strömenden Fluid rotieren diese Plättchen und richten sich im zeitlichen Mittel in einer Vorzugsrichtung aus, die vom lokalen

⁶ Für eine beschleunigte, inkompressible Strömung ist dies aufgrund der Massenerhaltung unmittelbar klar.

Geschwindigkeitsgradienten abhängt. Bei einseitiger Beleuchtung resultieren Helligkeitsunterschiede, wodurch insbesondere reguläre Strömungsmuster gut visualisiert werden. Beispiele sind in ► Abb. 2.20**b** und 7.12 gezeigt. Eine andere Möglichkeit besteht in der Erzeugung sehr kleiner Wasserstoffbläschen an feinsten Drähten durch Elektrolyse (in ► Abb. 7.11**e** wurden Luftbläschen verwendet). In Gasen kann man Rauch einsetzen (► Abb. 3.4**a**), der auf feinen Drähten verdampft oder durch chemische Reaktionen erzeugt wird. Teilchen oder Bläschen, die in ein Fluid eingebracht werden, können der Bewegung des Fluids aufgrund von Auftriebskräften und Kräften, die durch die Umströmung der Teilchen entstehen, nicht exakt folgen. Diese Probleme können vermieden werden, wenn man dem Fluid photochrome Substanzen zugibt. Nach einer Anregung durch UV-Licht emittieren diese Substanzen das Licht einer sichtbaren Wellenlänge für eine gewisse Zeit, wodurch die Bewegung der markierten Fluidelemente sehr genau bestimmt werden kann (siehe zum Beispiel ► Abb. 7.13). Weitere visuelle Methoden und einen guten Überblick über die gesamte Strömungsmeßtechnik findet man in Eckelmann (1997).

Zur Bestimmung der Strömungsgeschwindigkeit kann man die robusten Pitot-Sonden einsetzen (Abschnitt 4.3.4). Für eine genaue quantitative Messung sind diese Sonden aber zu ungenau. In sauberen Strömungen werden daher meist Hitzdraht-Sonden verwendet. Diese bestehen aus einem sehr feinen Draht aus Platin oder Wolfram (Länge ≈ 2 mm, typischer Durchmesser $5\text{ }\mu\text{m}$), der zwischen zwei Haltespitzen eingespannt ist. Der Draht, dessen elektrischer Widerstand temperaturabhängig ist, wird nun durch einen elektrischen Strom geheizt. Durch die meist kältere Strömung erfährt der Draht eine konvektive Kühlung, die sich als Widerstandsänderung mit Hilfe einer Wheatstoneschen Brücke messen läßt. Auf diesem Meßprinzip beruht die *Hitzdrahtanemometrie*. Da Hitzdrähte sehr schnell reagieren, können damit sehr schnelle Geschwindigkeitsschwankungen gemessen werden (bis zu 10^5 Hz). Deshalb sind diese Sonden zur punktuellen Messung schneller Fluktuationen in turbulenten Strömungen prädestiniert. Durch Integration mehrerer verschieden orientierter Hitzdrähte auf einem Sondenkörper können nach entsprechender Kalibrierung alle drei Geschwindigkeitskomponenten ermittelt werden. Bruun (1995) ist ein ausführliches Handbuch zu dieser Meßtechnik.

Neben der Hitzdrahtanemometrie ist in den letzten Jahren auch die *Laser-Doppler-Anemometrie* (LDA) getreten. Bei der LDA-Methode werden Lichtsignale (*bursts*) ausgewertet, die von kleinsten Partikeln stammen (häufig reicht schon der Staub aus), während sie mit der Strömung durch ein Interferenzmuster transportiert werden, das durch zwei gekreuzte Laserstrahlen erzeugt wird (► Abb. 3.6). Die Pulsationsfrequenz entspricht dabei genau der Frequenzverschiebung aufgrund des Dopplereffekts, die man für das Streulicht messen würde, wenn sich das Teilchen nur in einem einzigen Laserstrahl bewegte.

Anders als das LDA-Punktmeßverfahren wird bei der *Particle-Imaging Velocimetry* (PIV) das Geschwindigkeitsfeld in einer ganzen Ebene simultan erfaßt. Dazu werden zwei schnell hintereinander angefertigte Aufnahmen von Partikeln ausgewertet, während sie mit der Strömung durch die Meßebene transportiert werden. Typischerweise wird die Meßebene durch ein relativ schmales Lichtband realisiert, das durch Aufweitung gepulster Laserstrahlen erzeugt wird. Weitere Details und die verschiedenen Modifikationen der optischen Meßverfahren sind in Albrecht et al. (2003) und Raffel et al. (1998) zu finden.

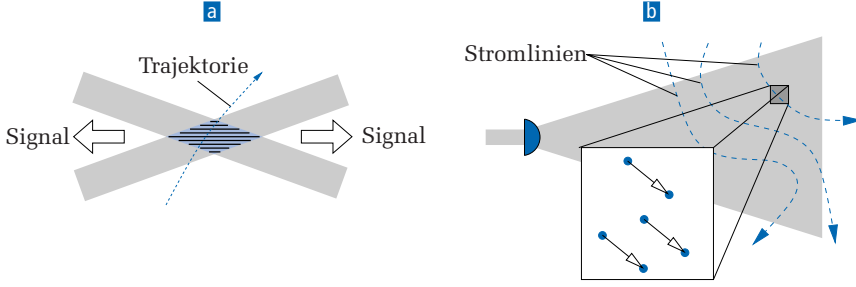


Abb. 3.6: **a** Beim LDA-Verfahren werden zwei kohärente Laserstrahlen (grau) gekreuzt und erzeugen ein Interferenzmuster in einem möglichst kleinen Volumen (typisch: $O(1 \text{ mm})$). Wenn sich ein Streupartikel senkrecht zu dem Interferenzmuster bewegt, reflektiert es ein pulsierendes Lichtsignal (*burst*), das in Vorwärts- oder Rückwärtsrichtung detektiert werden kann. **b** Beim PIV-Verfahren wird mittels Laserpulsen in schneller Folge eine Doppelbelichtungsaufnahme von Tracerpartikeln in einem dünnen Lichtband gemacht, das man mit einem mittels Zylinderlinse aufgeweiteten Laserstrahl erzeugen kann. Aus der Korrelationsfunktion des resultierenden Musters kann man die lokale Verschiebung der Tracer und damit die lokale Geschwindigkeit ermitteln.

3.1.4 Lokale Deformation eines Fluids

Durch die Strömung wird ein Fluid im allgemeinen in komplizierter Weise deformiert (siehe z. B. ► Abb. 3.10). Um die dabei auftretenden elementaren Bewegungen zu verstehen, ist es sinnvoll, die Deformation eines kleinen Fluid-Volumens zu untersuchen, das sich für eine kurze Zeit unter dem Einfluß des Geschwindigkeitsfelds bewegt. Dazu betrachten wir das momentane Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{u}$ in Abhängigkeit vom Ort $\mathbf{x}$, wobei wir für das Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{u} = u_i$ mit $i \in [1, 2, 3]$ die *Index-Schreibweise* verwenden. Zur Analyse der Bewegung des Fluids in der Nähe eines festen Punktes $\mathbf{x}^{(0)}$ betrachten wir die Taylor-Entwicklung des Geschwindigkeitsvektors u_i nach dem kleinen Abstand $\Delta \mathbf{x}$ von $\mathbf{x}^{(0)}$ (siehe ► Abb. 3.7)

$$\begin{aligned}
 u_i(\mathbf{x}^{(0)} + \Delta \mathbf{x}) &= u_i(\mathbf{x}^{(0)}) + \Delta u_i = u_i^{(0)} + \sum_{j=1}^3 \left. \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right|_{\mathbf{x}^{(0)}} \Delta x_j + \dots \\
 &= u_i^{(0)} + \underbrace{\sum_{j=1}^3 \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)_{\mathbf{x}^{(0)}} \Delta x_j}_{:= e_{ij}, \text{ symm. } i \leftrightarrow j} + \underbrace{\sum_{j=1}^3 \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)_{\mathbf{x}^{(0)}} \Delta x_j}_{:= \Omega_{ij}, \text{ antisymm. } i \leftrightarrow j} + \dots \\
 &= \underbrace{u_i^{(0)}}_{\text{Translation}} + \underbrace{\sum_{j=1}^3 e_{ij} \Delta x_j}_{\text{Dehnung: } \Delta u_i^{\text{Dehn}}} + \underbrace{\sum_{j=1}^3 \Omega_{ij} \Delta x_j}_{\text{Rotation: } \Delta u_i^{\text{rot}}} + \dots
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Hiermit haben wir das gesamte Geschwindigkeitsfeld in drei elementare, qualitativ unterschiedliche Geschwindigkeitsfelder zerlegt. Das Geschwindigkeitsfeld $u_i^{(0)} = u_i(\mathbf{x}^{(0)})$ nullter Ordnung in $\Delta \mathbf{x}$ ist konstant und beschreibt die Rate der *Translation* eines Fluidelements, also die zurückgelegte Strecke pro Zeit. Die beiden Terme erster Ordnung $\sum_j e_{ij} \Delta x_j$ und $\sum_j \Omega_{ij} \Delta x_j$ stellen die *Dehnung* des Fluidelements pro Zeit

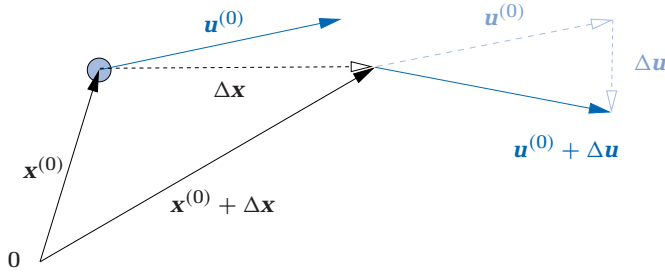


Abb. 3.7: Die momentane Strömung (blau) in der Nähe eines Punktes.

bzw. die *Rotation* des Fluidelements pro Zeit dar. Die Tensoren (Matrizen) e_{ij} und Ω_{ij} haben die Dimension s^{-1} und sind daher *Raten* (Dehn- und Rotationsrate).

Zur Verdeutlichung betrachten wir die *ebene Scherströmung* (► Abb. 3.8a)

$$u_i = a \begin{pmatrix} x_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.6)$$

mit dem Geschwindigkeitsgradienten $a = \partial u_1 / \partial x_2$. Neben der Translation mit Geschwindigkeit $u_i(x^{(0)})$ erfährt ein Fluidelement die Dehnung und die Rotation $\Delta u_i = \sum_j (e_{ij} + \Omega_{ij}) \Delta x_j$, wobei $\Delta x_j = \Delta \mathbf{x}$ der Abstandsvektor relativ zum betrachteten Punkt $\mathbf{x}^{(0)}$ ist. Zu den partiellen Ableitungen trägt in diesem Beispiel nur der Term $\partial u_1 / \partial x_2 = a$ bei. Die *Dehnrate* ist daher räumlich konstant und unabhängig von $\mathbf{x}^{(0)}$

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \frac{a}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \Delta u_i^{\text{Dehn}} = \frac{a}{2} \begin{pmatrix} \Delta x_2 \\ \Delta x_1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.7)$$

Das Dehnfeld Δu_i^{Dehn} ist in ► Abb. 3.8b dargestellt. Das Geschwindigkeitsfeld einer reinen ebenen Dehnströmung der Stärke λ lautet also

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \frac{\lambda}{2} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

Für unser Beispiel einer ebenen Scherströmung läßt sich auch die Rotationsrate leicht berechnen

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \frac{a}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.9)$$

Das zugehörige Geschwindigkeitsfeld (► Abb. 3.8c) ergibt sich als

$$\Delta u_i^{\text{rot}} = \begin{pmatrix} \Delta u_1^{\text{rot}} \\ \Delta u_2^{\text{rot}} \\ \Delta u_3^{\text{rot}} \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^3 \Omega_{ij} \Delta x_j = \frac{a}{2} \begin{pmatrix} \Delta x_2 \\ -\Delta x_1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.10)$$

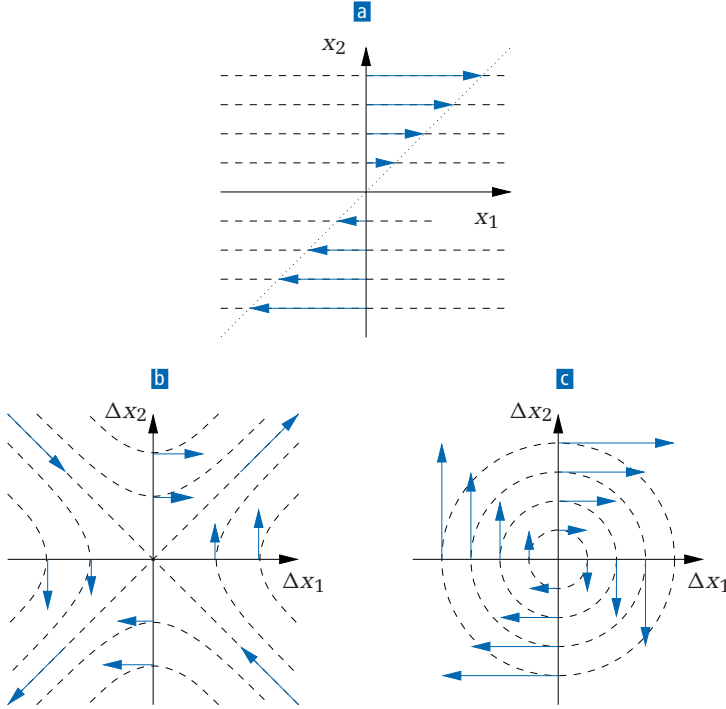


Abb. 3.8: Zerlegung einer ebenen Scherströmung **a** in eine Superposition von ebener Dehnströmung **b** und einer Festkörperrotation **c**. Die Stromlinien sind gestrichelt dargestellt.

In unserem Beispiel setzt sich der Rotationsratentensor Ω_{ji} zusammen aus einer Matrix, die den Ortsvektor um 90° um die 3-Achse dreht (die Geschwindigkeit steht senkrecht auf dem Ortsvektor)⁷ und einem Faktor (hier $-a/2$), der die Winkelgeschwindigkeit angibt. Das Geschwindigkeitsfeld, das einer reinen Festkörperrotation mit Winkelgeschwindigkeit Ω um die 3-Achse entspricht, lautet also⁸

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \Omega \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.11)$$

Bei einer reinen Rotation werden die Fluidpartikel nicht relativ zueinander verschoben. Deshalb treten bei einer reinen Festkörperrotation keine Reibungsverluste auf.

⁷ Beachte, dass eine Drehung eines Vektors $\mathbf{x}_0$ um den Winkel ϕ in zwei Dimensionen durch die Multiplikation mit der (antisymmetrischen) Drehmatrix dargestellt werden kann

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x}_0.$$

Die Matrix in (3.9) stellt eine Drehung von -90° um die 3-Achse dar. Entsprechendes gilt natürlich auch für Drehungen um die beiden anderen orthogonalen Achsen.

⁸ Für den Zusammenhang zwischen dem Rotationsratentensor und der Wirbeldichte siehe Abschnitt 5.2.1.

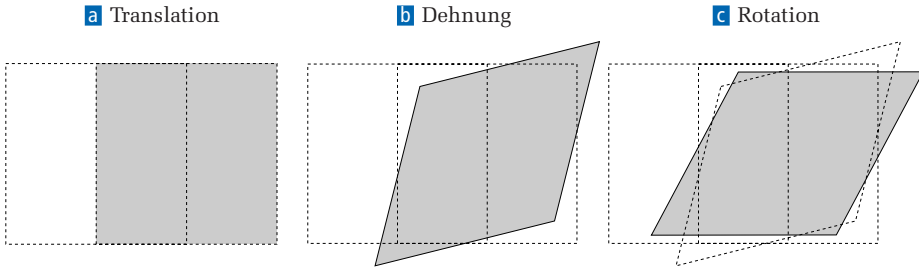


Abb. 3.9: Deformation eines quadratischen Fluidelements in einer ebenen Scherströmung als Überlagerungen von Deformationen, die von den drei elementaren Strömungsformen verursacht werden. Beachte, dass die angedeuteten Deformationen streng genommen nur für infinitesimale Deformationen gelten. Deshalb ist die Raute in **c** etwas geschrumpft.

Die totale Deformation eines kleinen, anfänglich quadratischen Fluidelements in einer ebenen Scherströmung ist in ► Abb. 3.9 dargestellt als eine Überlagerung der Deformationen, die von den drei elementaren Strömungsformen bewirkt werden.

Bei dem Beispiel der Scherströmung handelt es sich um eine inkompressible Strömung, da die Divergenz des Geschwindigkeitsfelds (3.6) verschwindet⁹

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x_1 \\ \partial/\partial x_2 \\ \partial/\partial x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \stackrel{(3.6)}{=} 0. \quad (3.12)$$

⁹ Die Divergenz eines Geschwindigkeitsfelds gibt die Rate der relativen Volumenänderung durch die Strömung $\mathbf{u}$ an. Dazu betrachte man ein kleines Volumen $V = \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3$ am Ort (x_1, x_2, x_3) , dessen Oberfläche aus markierten Teilchen besteht. Dann ist die Änderung des von den markierten Teilchen eingeschlossenen Volumens pro Zeiteinheit durch das Oberflächenintegral über die Oberfläche A von V

$$\begin{aligned} \dot{V} = \int_A \mathbf{u} \cdot d\mathbf{A} &= \left[\overbrace{u_1(x_1 + \Delta x_1)}^{u_1(x_1, x_2, x_3) + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \Delta x_1} - u_1(x_1, x_2, x_3) \right] \Delta x_2 \Delta x_3 \\ &+ \left[u_2(x_1, x_2, x_3) + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \Delta x_2 - u_2(x_1, x_2, x_3) \right] \Delta x_1 \Delta x_3 \\ &+ \left[u_3(x_1, x_2, x_3) + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \Delta x_3 - u_3(x_1, x_2, x_3) \right] \Delta x_1 \Delta x_2 + O(\Delta^4) \end{aligned}$$

gegeben, wobei $O(\Delta^4)$ Terme der vierten Ordnung in Δx_i bezeichnet. Damit ist

$$\frac{1}{V} \int_A \mathbf{u} \cdot d\mathbf{A} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + O(\Delta).$$

Im Limes $V \rightarrow 0$ erhalten wir

$$\lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \int_A \mathbf{u} \cdot d\mathbf{A} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} =: \nabla \cdot \mathbf{u}.$$

Wir können also die Divergenz des Geschwindigkeitsfeldes als die relative Änderungsrate des Volumens am Ort $\mathbf{x}$ auffassen.

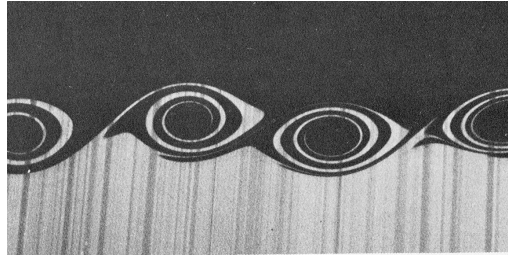


Abb. 3.10: Momentaufnahme der Mischung zweier Fluidschichten, die sich mit unterschiedlicher Horizontalgeschwindigkeit bewegen. Der unteren Schicht wurde ein fluoreszierender Farbstoff zugesetzt und vertikal mit einem schmalen Lichtband (Lichtschnitt) beleuchtet. Die anfänglich ebene Scherschicht ist instabil und die Mischung der beiden Fluide wird durch sogenannten Kelvin-Helmholtz-Wirbel eingeleitet. Dadurch werden einzelne Fluidelemente sehr stark gedehnt und um die Wirbelzentren gewickelt. Im weiteren Verlauf der Strömung wird diese turbulent, wodurch die gedehnten Fluidfilamente immer weiter und in irregulärer Weise umeinandergewickelt werden. Schließlich sind die Filamente so dünn, dass die molekulare Diffusion in relativ kurzer Zeit eine vollständige Mischung bewirkt (Aufnahme: F. A. Roberts, P. E. Dimotakis und A. Roshko); (aus Van Dyke 1982).

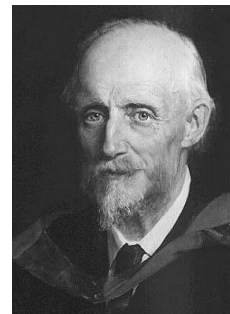
An dieser Form von $\nabla \cdot \mathbf{u}$ sieht man leicht, dass die Divergenz von $\mathbf{u}$ identisch ist mit der Spur¹⁰ des Tensors der Dehnrate e_{ij} . Folgerichtig verschwindet auch die Spur von e_{ij} in (3.7). Man kann also an der Spur des Tensors der Dehnrate einer Strömung auch ablesen, ob das Fluid lokal expandiert oder kontrahiert. Dies ist besonders für Gasströmungen relevant.

Da eine Rotation benachbarte Fluidelemente nicht gegeneinander verschiebt, ist einzig die Dehnung, ob nun volumenerhaltend oder nicht, von zentraler Bedeutung für Mischvorgänge. Um eine effiziente Mischung zu erzielen, müssen alle Fluidelemente sehr stark in die Länge gezogen (gedehnt) werden, damit sich möglichst feine Filamente bilden. Nur wenn die Filamente hinreichend fein sind, kann die molekulare Diffusion schnell genug eine vollständige Mischung herbeiführen. Ein typisches Beispiel ist in ► Abb. 3.10 gezeigt.

3.2 Reynolds' Transport-Theorem

Um die Dynamik physikalischer Größen beschreiben zu können, müssen wir wissen, wie sich eine Größe im Laufe der Zeit verändert. Dazu betrachten wir irgendein *substantielles Volumen* V und eine physikalische Größe ϵ , die im Volumen V definiert ist. Uns interessiert, wie sich die integrale Größe $E = \int_V \epsilon \, dV$ zeitlich ändert. Offenbar ist ϵ die Dichte von E . Wenn E zum Beispiel die Masse des Fluids im Volumen V repräsentiert, ist ϵ die Massendichte. E kann aber auch eine vektorielle Größe sein, zum Beispiel der Impuls. Dann hätte ϵ die Bedeutung einer Impulsdichte $\rho \mathbf{u}$.

Bei der Berechnung von $\dot{E}$ müssen wir beachten, dass nicht nur die Dichte $\epsilon(t)$, sondern auch das substantielle Volu-



Osborne Reynolds
1842–1912

¹⁰ Die Spur eines Tensors a_{ij} ist die Summe seiner Diagonalelemente: $\text{Sp}(a_{ij}) = \sum_i a_{ii} = a_{11} + a_{22} + a_{33}$.

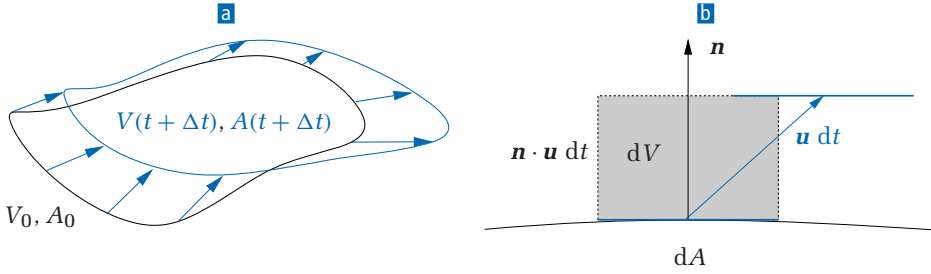


Abb. 3.11: **a**) Deformation eines substantiellen Volumens durch die Strömung. **b**) Lokale Änderung dV des Volumens durch die Verschiebung des Flächenelements dA um die Strecke $\mathbf{u} dt$.

men $V(t)$ zeitabhängig ist. Denn das substantielle Volumen wird von der Strömung $\mathbf{u}$ transportiert und während der Bewegung deformiert. Wir suchen nun die *substantielle Änderung* von E , d. h. die Änderung von E in dem mit der Strömung bewegten Volumen $V(t)$,¹¹

$$\frac{dE(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \epsilon(t) dV. \quad (3.13)$$

Die Größe dE/dt ist deshalb interessant, weil wir später die Erhaltungsgleichungen in der Form $dE/dt = Q$ verwenden wollen, wobei Q die Quellterme der Größe E symbolisiert. Leider können wir die Ableitung nach der Zeit nicht einfach ausführen, da das Integrationsgebiet $V(t)$ zeitabhängig ist. Wir werden daher das Integral in (3.13) auf eine Integration über ein *ortsfestes Volumen* V_0 zurückführen, das zum Zeitpunkt t mit dem substantiellen Volumen $V(t)$ identisch ist.

Betrachten wir also das Zeitintervall Δt , in dem sich das Volumen von $V(t) = V_0$ zu $V(t + \Delta t) = V_0 + \Delta V$ entwickelt (► Abb. 3.11 a). Dabei kann sich ΔV sowohl aus *positiven* als auch aus *negativen* Beiträgen zusammensetzen. Es sei A_0 die geschlossene Oberfläche von V_0 . Dann gilt *per definitionem*¹²

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &:= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left\{ \int_{V_0 + \Delta V} \epsilon(t + \Delta t) dV - \int_{V_0} \epsilon(t) dV \right\} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left\{ \int_{V_0} [\epsilon(t + \Delta t) - \epsilon(t)] dV + \int_{\Delta V} \epsilon(t + \Delta t) dV \right\} \\ &= \int_{V_0} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\epsilon(t + \Delta t) - \epsilon(t)}{\Delta t} dV + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{\Delta V} \left[\epsilon(t) + \underbrace{\Delta t \frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \dots}_{\rightarrow 0} \right] dV \\ &= \int_{V_0} \frac{\partial \epsilon(t)}{\partial t} dV + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{\Delta V} \epsilon(t) dV \\ dV &= dA \cdot \mathbf{u} dt = \int_{V_0} \frac{\partial \epsilon}{\partial t} dV + \int_{A_0} \epsilon \mathbf{u} \cdot d\mathbf{A}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

¹¹ Die Abhängigkeit der Dichte $\epsilon(\mathbf{x}, t)$ von $\mathbf{x}$ wird im folgenden nicht explizit hingeschrieben.

¹² Wir setzen hier die Existenz der jeweiligen Grenzwerte und Integrale voraus.

Dies ist das *Reynoldssche Transport-Theorem*¹³

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \epsilon \, dV = \int_{V_0} \frac{\partial \epsilon}{\partial t} \, dV + \int_{A_0} \epsilon \mathbf{u} \cdot d\mathbf{A}. \quad (3.15)$$

Die totale zeitliche Änderung einer Größe E in einem Volumen, das sich mit der Strömung bewegt, ist gleich der zeitlichen Änderung in dem momentanen Volumen V_0 plus dem Strom dieser Größe durch die momentane Oberfläche A_0 .

Wenn die Größe E einem Erhaltungssatz genügt, dann folgt mit dem Quellterm $Q = dE/dt$ direkt

$$\int_{V_0} \frac{\partial \epsilon}{\partial t} \, dV + \int_{A_0} \epsilon \mathbf{u} \cdot d\mathbf{A} = Q \quad (3.16)$$

oder nach Anwendung des Gaußschen Satzes (siehe A.18)

$$\int_{V_0} \frac{\partial \epsilon}{\partial t} \, dV + \int_{V_0} \nabla \cdot (\epsilon \mathbf{u}) \, dV = Q. \quad (3.17)$$

Von dieser integralen Gleichung können wir zu einer differentiellen Form des Reynoldsschen Transport-Theorems kommen, wenn wir das Volumen gegen Null gehen lassen. Für $V_0 \rightarrow 0$ erhalten wir

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \nabla \cdot (\epsilon \mathbf{u}) = q, \quad (3.18)$$

wobei $Q = \int_{V_0} q \, dV$. Die differentielle Erhaltungsgleichung (3.18) muss an jedem Raumpunkt $\mathbf{x}$ erfüllt sein. Demnach ist die Änderung einer *Dichte* ϵ gleich der Änderung am festen Ort (partielle Ableitung) plus der Divergenz der zugehörigen *Stromdichte* $\epsilon \mathbf{u}$. Die Stromdichte einer Größe ist immer das Produkt aus der Dichte der Größe und dem Geschwindigkeitsvektor.¹⁴ Gegebenenfalls muss auch noch eine Quelledichte q berücksichtigt werden.



Johann Carl
Friedrich Gauß
1777–1855

3.3 Erhaltungsgleichungen für reibungsfreie Fluide

3.3.1 Massenerhaltung

Sei $E = M = \int_{V(t)} \rho \, dV$ die im substantiellen Volumen $V(t)$ befindliche Masse und $\epsilon = \rho$ die Massendichte. Aus der differentiellen Form des Reynoldsschen Transport-Theorems (3.18) erhalten wir damit die *Kontinuitätsgleichung*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0. \quad (3.19)$$

¹³ Eine alternative Ableitung des Reynoldsschen Transport-Theorems ist in Aris (1989) zu finden.

¹⁴ Damit hat die Stromdichte einer bestimmten Größe immer die Dimension der betreffenden Größe pro Fläche und pro Zeit. Die Stromdichte einer skalaren Größe ist ein Vektor, da die Geschwindigkeit $\mathbf{u}$ ein Vektor ist. Der Betrag der Stromdichte gibt an, wieviel der betrachteten Größe pro Zeit und pro Fläche durch eine Fläche senkrecht zur Stromrichtung hindurch tritt ($\mathbf{n} \parallel \mathbf{u}$). Der Strom der Größe durch ein beliebiges Flächenstück A ist durch $\int_A (\epsilon \mathbf{u}) \cdot d\mathbf{A}$ gegeben. Im allgemeinen Fall ist also noch der Richtungskosinus zwischen $\mathbf{u}$ und $d\mathbf{A}$ zu berücksichtigen.

Die rechte Seite der Gleichung verschwindet, da für ein *substantielles* Volumen aufgrund der Massenerhaltung gilt $\dot{M} = 0$. Die Massenstromdichte $\rho \mathbf{u}$ hat die Dimension [Masse/(Fläche $\times$ Zeit)]. Im Spezialfall einer inkompressiblen Strömung ($\rho = \text{const.}$) vereinfacht sich die Kontinuitätsgleichung zu

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (3.20)$$

Die integrale Form der Massenerhaltung lautet nach (3.16)

$$\frac{dM_0}{dt} + \int_{A_0} \rho \mathbf{u} \cdot d\mathbf{A} = 0. \quad (3.21)$$

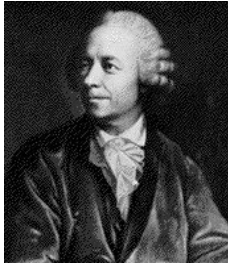
Hier bezeichnet $M_0(t) = \int_{V_0} \rho \, dV$ die im *momentanen* Volumen V_0 enthaltene Masse. Sie kann sich im Gegensatz zur Masse in einem substantiellen Volumen ändern, indem Masse durch die momentane Oberfläche A_0 ein- oder ausströmt.

3.3.2 Impulserhaltung

Nach dem Newtonschen Aktionsprinzip ist die Änderung des Impulses durch die Summe der angreifenden Kräfte gegeben. Damit können wir die Bilanz für die Impulsdichte $\rho \mathbf{u}$ ($= \epsilon$) schreiben als

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) = \mathbf{q}, \quad (3.22)$$

wobei $\mathbf{q}$ die Dichte der angreifenden Kräfte symbolisiert. Den Ausdruck $\rho \mathbf{u} \mathbf{u}$ kann man als eine *Impulsstromdichte* (Impuls pro Fläche und pro Zeit) auffassen. Er ist ein Tensor zweiter Stufe (ein zweifach indiziertes Objekt), den man als Matrix darstellen kann. Denn sowohl der Impuls als auch die Fläche, durch die der Impuls strömt, sind Vektoren, die eine Richtung besitzen.¹⁵



Leonhard Euler
1707–1783

Bei den angreifenden Kräften handelt es sich einerseits um äußere Kräfte, die auf das Fluid einwirken, wie zum Beispiel die Gravitationskraft. Andererseits wirken auch Druck- und Reibungskräfte, die erst durch die Bewegung des Fluids verursacht werden. Wenn wir nur die Druckkraftdichte $-\nabla p$ explizit hinschreiben (siehe 2.2), Reibungskräfte vernachlässigen und alle anderen Kraftdichten durch $\rho \mathbf{f}$ symbolisieren,¹⁶ erhalten wir

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) = -\nabla p + \rho \mathbf{f}. \quad (3.23)$$

¹⁵ Der Impuls, der durch das Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{u}$ durch ein orientiertes Flächenelement $d\mathbf{A}$ transportiert wird, ist $\rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{A}$ – also ein Vektor. Diesem Impulsstrom entspricht die Impulsstromdichte $\rho \mathbf{u} \mathbf{u}$.

Den Ausdruck $\nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u})$ kann man so interpretieren, dass man zunächst formal das Skalarprodukt zwischen ∇ und $\rho \mathbf{u}$ bildet, ohne die Ableitungen auszuführen und danach $\mathbf{u}$ mit dem resultierenden skalaren Ausdruck multipliziert und ableitet. Es ist darauf zu achten, dass die Ableitungen auf alle Variablen wirken, die rechts von ∇ stehen. Äquivalent dazu kann man das Produkt $\rho \mathbf{u} \mathbf{u} = \rho u_i u_j = A_{ij}$ auch als einen Tensor auffassen, der sich aus dem dyadischen Produkt der Vektoren ρu_i und u_j ergibt. Anschließend wird der Tensor $\rho \mathbf{u} \mathbf{u}$ von links skalar mit $\nabla = \partial_j$ multipliziert.

¹⁶ $\mathbf{f}$ ist hier eine Kraft pro Masse.

Im Falle eines ruhenden Fluides ($\mathbf{u} = 0$) ergibt sich in konsistenter Weise die hydrostatische Gleichgewichtsbedingung (2.2). Die Druckkraftdichte $-\nabla p = \nabla \cdot (-p\mathbf{I})$ kann man auch als Divergenz eines Tensors schreiben, bei dem der Druck auf der Diagonalen steht und die restlichen Elemente gleich Null sind (hier ist $\mathbf{I} = \delta_{ij}$ die 3×3 -Identitätsmatrix). Auch der Tensor $p\mathbf{I}$ stellt einen Beitrag zur Impulsstromdichte dar. Die vollständige Impulsstromdichte eines reibungsfreien Fluids ist somit $p\mathbf{I} + \rho\mathbf{uu}$.¹⁷

Unter Verwendung der Kontinuitätsgleichung (3.19) können wir den nichtlinearen Term in (3.23) umformen zu

$$\nabla \cdot (\rho\mathbf{uu}) = \underbrace{\mathbf{u} \nabla \cdot (\rho\mathbf{u})}_{-\partial\rho/\partial t} + \rho\mathbf{u} \cdot \nabla\mathbf{u} \stackrel{(3.19)}{=} -\mathbf{u} \frac{\partial\rho}{\partial t} + \rho\mathbf{u} \cdot \nabla\mathbf{u} . \quad (3.24)$$

Eingesetzt in (3.23) ergibt sich nach Division durch ρ

$$\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla\mathbf{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \mathbf{f} . \quad (3.25)$$

Dies ist die berühmte *Euler-Gleichung* für reibungsfreie Strömungen.

Die integrale Version der Impulsbilanz erhält man durch Integration von (3.23) über das momentane Volumen V_0 mit der Oberfläche A_0 (Gaußscher Satz)

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}}_{\rightarrow d/dt} \int_{V_0} \rho\mathbf{u} \, dV + \int_{A_0} \rho\mathbf{uu} \cdot d\mathbf{A} = - \int_{A_0} p \, d\mathbf{A} + \mathbf{F} . \quad (3.26)$$

Unter $\mathbf{F}$ wurden alle sonstigen Kräfte zusammengefaßt, die entweder im Volumen wirken (z. B. die Gewichtskraft $\int_{V_0} \rho\mathbf{g} \, dV$) oder die an der Oberfläche des Volumens angreifen wie beispielsweise äußere Druckkräfte. Wenn wir den Impuls $\mathbf{P} = \int_{V_0} \rho\mathbf{u} \, dV$ des Fluids im momentanen Volumen V_0 verwenden, lautet die integrale Impulsbilanz

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} + \int_{A_0} \rho\mathbf{uu} \cdot d\mathbf{A} + \int_{A_0} p \, d\mathbf{A} = \mathbf{F} . \quad (3.27)$$

3.3.3 Drallerhaltung

In analoger Weise kann man die Bilanz für den Drall (Drehimpuls) ableiten. Sie ist vor allem bei rotierenden Strömungen nützlich. Wenn wir ϵ in (3.18) mit der Dralldichte (Drehimpulsdichte) $\rho\mathbf{x} \times \mathbf{u}$ identifizieren, erhalten wir die differentielle Erhaltungsgleichung für den Drall

$$\frac{\partial(\rho\mathbf{x} \times \mathbf{u})}{\partial t} + \nabla \cdot [\rho\mathbf{u}(\mathbf{x} \times \mathbf{u})] = \rho\mathbf{m} , \quad (3.28)$$

wobei $\mathbf{m}$ hier das Moment pro Masse und $\rho\mathbf{m}$ die Dichte der angreifenden Momente ist. Wie schon die Impulsstromdichte, so ist auch die Drallstromdichte (Drall pro Fläche und pro Zeit) $\mathbf{u}(\rho\mathbf{x} \times \mathbf{u})$ ein Tensor.

¹⁷ Für viskose Strömungen muss die Impulsstromdichte noch erweitert werden; siehe (7.4).

Mit dem Drall $\mathbf{D} = \int_{V_0} \rho \mathbf{x} \times \mathbf{u} \, dV$ des Volumens V_0 lautet die integrale Drallerhaltung

$$\frac{d\mathbf{D}}{dt} + \int_{A_0} (\rho \mathbf{x} \times \mathbf{u}) \mathbf{u} \cdot d\mathbf{A} = \mathbf{M}. \quad (3.29)$$

Hierbei bezeichnet $\mathbf{M} = \int_{V_0} \rho \mathbf{m} \, dV$ die an dem Volumen angreifenden Momente.¹⁸

3.3.4 Erhaltung der Gesamtenergie

Zur gesamten Energiedichte eines Fluids tragen die kinetische Energiedichte $\rho \mathbf{u}^2/2$, die Dichte der inneren Energie ρe und die potentielle Energiedichte im Schwerfeld $\rho g z$ bei. Damit lautet die integrale Bilanz der Gesamtenergie nach (3.16)

$$\int_{V_0} \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(\frac{\mathbf{u}^2}{2} + e + g z \right) \right] dV + \int_{A_0} \rho \left(\frac{\mathbf{u}^2}{2} + e + g z \right) \mathbf{u} \cdot d\mathbf{A} = \dot{Q}', \quad (3.30)$$

wobei $\dot{Q}'$ die dem Volumen V_0 pro Zeit zugeführte Energie ist, also die von außen zugeführte Leistung. Von der gesamten Leistung $\dot{Q}'$ können wir die Leistung der Druckkräfte separieren. Die an dem Flächenelement $d\mathbf{A}$ angreifende Druckkraft ist $-p \, d\mathbf{A}$. Damit wird dem Volumen über das Flächenelement $d\mathbf{A}$ die Leistung $-p \, d\mathbf{A} \cdot \mathbf{u}$ zugeführt. Wir erhalten daher

$$\int_{V_0} \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(\frac{\mathbf{u}^2}{2} + e + g z \right) \right] dV + \int_{A_0} \rho \left(\frac{\mathbf{u}^2}{2} + e + g z \right) \mathbf{u} \cdot d\mathbf{A} = - \int_{A_0} p \mathbf{u} \cdot d\mathbf{A} + \dot{Q}. \quad (3.31)$$

Wenn man die Leistung des Drucks auf die linke Seite bringt und die Enthalpie pro Masseneinheit $h = e + p/\rho$ verwendet, erhält man die Energiegleichung in der Form

$$\int_{V_0} \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(\frac{\mathbf{u}^2}{2} + e + g z \right) \right] dV + \int_{A_0} \rho \left(\frac{\mathbf{u}^2}{2} + h + g z \right) \mathbf{u} \cdot d\mathbf{A} = \dot{Q}. \quad (3.32)$$

Die differentielle Form der Erhaltung der Gesamtenergie ergibt sich nach Anwendung des Gaußschen Satzes auf das Oberflächenintegral und im Limes $V_0 \rightarrow 0$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(\frac{\mathbf{u}^2}{2} + e + g z \right) \right] + \underbrace{\nabla \cdot \left[\rho \mathbf{u} \left(\frac{\mathbf{u}^2}{2} + h + g z \right) \right]}_{\text{Energiestromdichte}} = \rho \dot{q}, \quad (3.33)$$

wobei $\dot{q}$ die von außen zugeführte Leistung pro Masse ist, die von äußeren Wärmequellen, chemischen Reaktionen oder auch viskoser Dissipation¹⁹ stammen kann.

¹⁸ Durch Anwendung der Produktregel erkennt man den Zusammenhang ($r = |\mathbf{x}|$)

$$\mathbf{x} \times \mathbf{u} = -\frac{1}{2} r^2 \boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2} \nabla \times (r^2 \mathbf{u})$$

zwischen dem Drall pro Masse $\mathbf{x} \times \mathbf{u}$ und der Vortizität $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$.

¹⁹ Unter Dissipation versteht man die irreversible Umsetzung von kinetischer Energie makroskopischer Freiheitsgrade in mikroskopische Freiheitsgrade, d. h. in thermische Energie. In Fluiden sind dafür Reibungskräfte verantwortlich.

Die Energiestromdichte $\rho \mathbf{u} (\mathbf{u}^2/2 + h + gz)$ kann man sofort ablesen. Sie gibt die Energie pro Zeit an, die aufgrund der Strömung pro Querschnittsfläche ($d\mathbf{A} \parallel \mathbf{u}$) transportiert wird.

3.3.5 Thermodynamische Energie

Um zur thermodynamischen Energie zu kommen, könnte man von der Gesamtenergie die mechanische Energie subtrahieren. Man erhält die Änderungsrate der mechanischen Energie durch skalare Multiplikation der Euler-Gleichung mit $\mathbf{u}$. Für ein reibungsfreies Fluid kommt man aber zu demselben Ergebnis, wenn man für ein substantielles Fluidelement ein lokales thermodynamisches Gleichgewicht fordert. Mit $T ds = dq$, wobei s die Entropie pro Masse ist und dq die zugeführte Wärme pro Masse, können wir die differentielle Gleichung für die thermische Energie schreiben als

$$T \frac{Ds}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{j}_W + \dot{q}_{\text{ext}}. \quad (3.34)$$

Hierbei haben wir schon die Leistung pro Masse, die durch die Wärmeleitung bedingt ist, durch die Wärmestromdichte $\mathbf{j}_W$ ausgedrückt.²⁰ Alle anderen Leistungen durch externe Quellen sind in $\dot{q}_{\text{ext}}$ enthalten. Mit Hilfe des Fourierschen Gesetzes $\mathbf{j}_W = -\lambda \nabla T$ und der thermodynamischen Relation $T ds = c_p dT - \alpha T dp/\rho$, wobei $\alpha = V^{-1}(\partial V/\partial T)_p$ der Ausdehnungskoeffizient ist, erhalten wir

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \underbrace{\mathbf{u} \cdot \nabla T}_{\text{Konvektion}} = \underbrace{\frac{1}{\rho c_p} \nabla \cdot (\lambda \nabla T)}_{\text{Wärmeleitung}} + \underbrace{\frac{\alpha T}{\rho c_p} \frac{Dp}{Dt}}_{\text{Kompression}} + \frac{\dot{q}_{\text{ext}}}{c_p}. \quad (3.35)$$

Die Temperatur an einem festen Ort ändert sich durch konvektiven Wärmetransport, Wärmeleitung, Kompressionsleistung und ggf. andere Prozesse der Energiezufuhr (chemische Reaktion, Strahlung). Bei reibungsbehafteten Strömungen ist insbesondere noch die Erwärmung durch die Dissipation mechanischer Energie zu berücksichtigen (siehe Abschnitt 7.1.3). Wenn die Wärmeleitfähigkeit λ konstant ist, kann man sie aus dem Integral ziehen und die Temperaturleitfähigkeit oder Wärmediffusivität $\kappa = \lambda/\rho c_p$ definieren. Für reibungsfreie inkompressible Fluide ohne äußere Wärmequellen gilt dann die vereinfachte Temperaturgleichung

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T = \kappa \nabla^2 T. \quad (3.36)$$

3.4 Bemerkungen zur Euler-Gleichung

Die oben abgeleitete Euler-Gleichung (3.25) gilt für reibungsfreie Fluide und beschreibt Strömungen, die von Trägheitseffekten dominiert sind. Die Trägheit kommt durch den Term $D\mathbf{u}/Dt = \partial \mathbf{u}/\partial t + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$ zum Ausdruck, der die Beschleunigung eines substantiellen Fluidvolumens beschreibt (siehe (3.3)). Die in fast allen Flui-

²⁰ Die Wärmeleitung ist ein molekularer (diffusiver) Prozess, unabhängig vom konvektiven Wärmetransport. Die negative Divergenz der Wärmestromdichte $-\nabla \cdot \mathbf{j}_W$ ist die Leistung, die dem Fluid pro Volumen zugeführt wird.

den vorhandenen Reibungseffekte sind nicht enthalten.²¹ Trotzdem stellt die Euler-Gleichung unter gewissen Voraussetzungen ein gutes Modell für reale Strömungen dar. Reibungseffekte werden in Kap. 7 behandelt.

Wegen des nichtlinearen konvektiven Terms $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$ ist es meist nicht möglich die Lösung der Euler-Gleichung für gegebene Randbedingungen in geschlossener Form anzugeben. Wenn auch die Viskosität berücksichtigt wird (siehe Abschnitt 7.1.2), sind exakte Lösungen sogar nur für wenige Spezialfälle bekannt (siehe z. B. Berker 1963, Wang 1991). Insbesondere verhindert die Nichtlinearität, neue Lösungen durch eine Superposition bereits bekannter Lösungen zu konstruieren. Neben einer numerischen Lösung bleibt daher nur der Ausweg einer näherungsweisen Berechnung, wofür man vereinfachende Annahmen treffen muss. Ein wichtiges Konzept ist hierbei die Stromfadentheorie, die im nächsten Kapitel (Kap. 4) behandelt wird.²²

Um die Strömung für ein gegebenes Problem zu berechnen, muss man die zugrundeliegenden differentiellen Erhaltungsgleichungen für bestimmte Randbedingungen lösen. Die Anzahl der erforderlichen Randbedingungen richtet sich nach dem Typus der Differentialgleichung. Sie hängen davon ab, ob die Strömung reibungsbehaftet ist oder nicht, kompressibel oder inkompressibel und ob die Strömungsgeschwindigkeit kleiner oder größer ist als die Schallgeschwindigkeit (sub- oder supersonisch). Außerdem kommt es darauf an, ob das Fluid an einem Rand des Gebietes ein- oder ausströmt.

Auf keinen Fall kann ein Fluid eine impermeable Wand durchströmen. An solchen Berandungen muss deshalb die Normalkomponente der Geschwindigkeit verschwinden, d. h. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$. Dies ist auch die einzige Randbedingung, die man für die Euler-Gleichung an festen impermeablen Wänden fordern kann. Die tangentialen Komponenten der Geschwindigkeit an der Wand ergeben sich aus der jeweiligen Lösung $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$. Im allgemeinen sind die Tangentialgeschwindigkeiten eines reibungsfreien Fluids und einer begrenzenden Wand verschieden voneinander. Neben diesem Schlupf an Wänden können in reibungsfreien Fluiden auch tangentiale Diskontinuitäten im Volumen auftreten, bei denen sich die Tangentialgeschwindigkeit sprunghaft ändert. Derartige Trennflächen sind möglich, da der Impuls bei der Euler-Gleichung nur in Stromrichtung transportiert wird. In einem realen viskosen Fluid würde eine solche tangentiale Unstetigkeitsfläche (Scherschicht) sehr schnell durch einen transversalen viskosen Impulstransport durch die Trennfläche geglättet, wobei sich die Scherschicht aufweitet (vgl. auch Abschnitt 7.4).

Für die im folgenden behandelte Stromfadentheorie nehmen wir an, dass die Geschwindigkeit über den Querschnitt des Stromfadens konstant ist. Dies entspricht der Annahme, dass die Viskosität realer Fluide die Strömung glättet und insbesondere Sprünge der Tangentialgeschwindigkeit unterbindet. Der Reibungseffekt selbst bleibt aber vorerst unberücksichtigt.

²¹ Für Temperaturen $T < T_\lambda = O(2\text{mK})$ unterhalb des sogenannten λ -Punkts findet man bei ^3He und ^4He den Zustand der Superfluidität, in welchem die Reibungskräfte vollständig verschwinden. Superfluides ^4He wird auch Helium-II genannt. Normalfluides Helium heißt im Gegensatz dazu Helium-I.

²² Auch für viskose Strömungen lassen sich unter bestimmten Voraussetzungen Näherungslösungen finden; siehe zum Beispiel Abschnitt 7.4.1.

Zusammenfassung

Zur Beschreibung der Dynamik von Fluiden gibt es zwei verschiedene Konzepte: (I) Meist wird die Eulersche Betrachtungsweise verwendet. Dabei verfolgt man die zeitliche Entwicklung der Geschwindigkeit $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ an jedem festen Raumpunkt $\mathbf{x}$.

(II) Bei der Lagrangeschen Betrachtungsweise gibt man für jedes substantielle Fluidelement den Ort $\mathbf{X}(t, \mathbf{X}_0)$ als Funktion der Zeit und des Startwerts an. Man muss also im Prinzip die Trajektorien aller Fluidelemente verfolgen.

Ein Fluidelement, das sich mit der Strömung bewegt, nennt man substantielles Fluidelement. Jede physikalische Eigenschaft T , zum Beispiel die Temperatur, eines substantiellen Fluidelements kann sich durch zwei Prozesse ändern: Einerseits kann die physikalische Größe T selbst explizit zeitabhängig sein (partielle Zeitableitung $\partial T / \partial t$). Andererseits kann sich der Wert T des substantiellen Fluidelements dadurch ändern, dass es durch ein Gebiet transportiert wird, in dem die Größe T räumlich variiert (konvektive Ableitung, $\mathbf{u} \cdot \nabla T$). Die totale Änderungsrate einer dem substantiellen Fluidelement anhaftenden Größe ergibt sich aus der substantiellen Ableitung $D/Dt = \partial/\partial t + \mathbf{u} \cdot \nabla$. (Abschnitt 3.1.1)

Strömungen können durch Trajektorien substantieller Fluidelemente, durch Stromlinien oder durch Streichlinien charakterisiert werden. Bei einer stationären Strömung sind all diese Linien identisch. Bei instationären Strömungen sind sie verschieden voneinander. Eine Stromröhre ist das Fluidvolumen, welches durch eine Fläche tritt, die von einer gedachten geschlossenen Linie definiert wird. Der Vektor der Strömungsgeschwindigkeit ist immer tangential zur Oberfläche einer Stromröhre. Ist die Querschnittsfläche einer Stromröhre infinitesimal klein, ergibt sich ein Stromfaden. Alle physikalischen Größen eines Stromfadens hängen dann nur von der Bogenlänge entlang dem Stromfaden ab. (Abschnitt 3.1.2)

Wenn man das Geschwindigkeitsfeld in der Nähe eines festen Punktes in einer Taylor-Reihe entwickelt, kann man die Bewegung in der Nähe dieses Punktes in eine Translation, eine Rotation und eine Dehnung zerlegen. Die Rotationsrate ist proportional zur Vortizität. Dieser Teil der Bewegung kann nicht zu Reibungseffekten führen, da sich verschiedene Fluidelemente bei einer starren Rotation nicht relativ zueinander bewegen. Für Reibungseffekte relevant ist die Dehnung. Andererseits trägt sie nichts zur Vortizität bei. (Abschnitt 3.1.4)

Die üblichen integralen Erhaltungssätze für Masse, Impuls und Energie beziehen sich auf ein substantielles Volumen. Dieses ist in einem strömenden Fluid zeitabhängig. Das Reynoldssche Transport-Theorem überführt die Integration über das bewegte substantielle Volumen in eine Integration über ein ortsfestes Volumen. Damit erhält man eine systematische Formulierung aller Erhaltungsgleichungen in integraler und differentieller Form. Die generische differentielle Form lautet

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \nabla \cdot (\epsilon \mathbf{u}) = q,$$

wobei ϵ die Dichte irgendeiner physikalischen Größe ist und $\epsilon \mathbf{u}$ die zugehörige Stromdichte. Die jeweiligen Quellterme sind mit q bezeichnet. Durch Einsetzen von ϵ und q ergeben sich die Kontinuitätsgleichung (Massenerhaltung), Euler-Gleichung (Impulserhaltung für ein reibungsfreies Fluid) und die Energiegleichung. (Abschnitte 3.2–3.4)



Aufgaben

Aufgabe 3.1: Inkompressible Quellenströmung

Welche funktionale Abhängigkeit vom Abstand r muss eine stationäre *inkompressible* Strömung $u(r)$ haben, die (a) senkrecht und homogen aus einer Kugel strömt, (b) senkrecht und homogen aus einem Zylinder strömt und (c) senkrecht und homogen aus einer Fläche strömt?

Aufgabe 3.2: Strömungsfelder

Skizzieren Sie die folgenden zweidimensionalen Strömungsfelder. Berechnen Sie auch die Vortizität $\omega = \nabla \times \mathbf{u}$ und bestimmen Sie, ob die Strömungen inkompressibel sind oder nicht.

- a) $\mathbf{u} = x\mathbf{e}_x - y\mathbf{e}_y$,
- b) $\mathbf{u} = y\mathbf{e}_x - x\mathbf{e}_y$,
- c) $\mathbf{u} = \mathbf{r}/r^2$.

Aufgabe 3.3: Lineare Strömungen

Gegeben sei eine zweidimensionale lineare Strömung

$$\mathbf{u} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \begin{pmatrix} a & \epsilon - \Omega/2 \\ \epsilon + \Omega/2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x} \quad (3.37)$$

mit $a, \Omega, \epsilon \in \mathbb{R}$ und $\Omega, \epsilon > 0$. Verwenden Sie, wenn möglich, die Index-Notation für Vektoren und Matrizen.

- a) Welche Bedingung muss $\mathbf{A}$ erfüllen, damit $\mathbf{u}$ inkompressibel ist? Was folgt daraus für die Konstanten a, ϵ und Ω ?
- b) Zeigen Sie, dass $\mathbf{u}$ eine Lösung der Euler-Gleichung (3.25) ist.
- c) Zeigen Sie, dass $\mathbf{u}$ auch eine Lösung der Navier-Stokes-Gleichung (7.7) für inkompressible Fluide ist.
- d) Zerlegen Sie $\mathbf{A}$ in den symmetrischen und antisymmetrischen Anteil. Vergleichen Sie das Ergebnis mit der Taylor-Entwicklung (3.5) eines beliebigen Geschwindigkeitsfelds. Identifizieren Sie Dehn-, Rotations- und Expansionsrate.
- e) Wie groß sind die Vortizität $\omega = \nabla \times \mathbf{u}$?
- f) Berechnen Sie für $a = 0$ die Stromfunktion $\psi(x_1, x_2)$, indem Sie beide Gleichungen (5.1)a und (5.1)b integrieren. Von welchem geometrischen Typus ist die Gleichung $\psi(x_1, x_2) = \text{const.}$?
- g) Skizzieren Sie für $a = 0$ die Stromlinien für die drei Fälle (a): $\epsilon < \Omega/2$, (b): $\epsilon = \Omega/2$ und (c): $\epsilon > \Omega/2$.

Aufgabe 3.4: Galilei-Transformation

Prüfen Sie, ob die Euler-Gleichung (3.25) ihre Form ändert, wenn man zu einem Koordinatensystem Σ' übergeht, das sich mit konstanter Geschwindigkeit U relativ zum ursprünglichen Koordinatensystem Σ in positiver x -Richtung bewegt.

- a) Wie lauten die Transformationsgleichungen für $\mathbf{x}$, t und $\mathbf{u}$?
- b) Transformieren Sie die Euler-Gleichung in das System Σ' .
- c) Welche Bedeutung hat die Galilei-Invarianz?