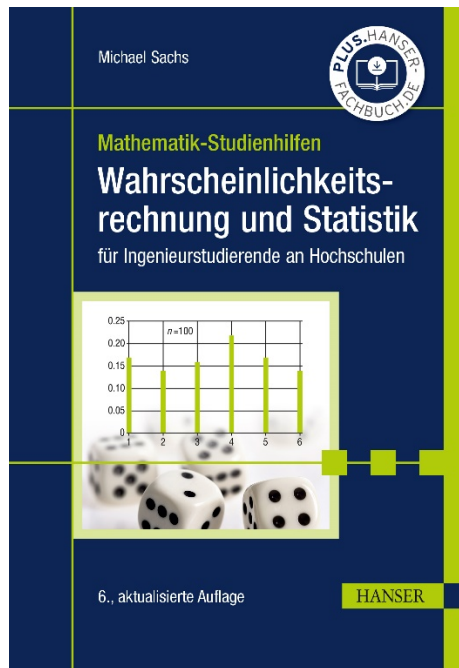


# HANSER



## Leseprobe

zu

## Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik

von Michael Sachs

Print-ISBN: 978-3-446-46943-3

E-Book-ISBN: 978-3-446-46962-4

Weitere Informationen und Bestellungen unter

<https://www.hanser-kundencenter.de/fachbuch/artikel/9783446469433>

sowie im Buchhandel

© Carl Hanser Verlag, München

## Vorwort zur 6. Auflage

Für die 6. Auflage habe ich zahlreiche Beispiele und Aufgaben mithilfe aktueller Veröffentlichungen auf den neuesten Stand gebracht und hartnäckige Druckfehler beseitigt. Neu aufgenommen wurden Boxplots und aus aktuellem Anlass die Begriffe Sensitivität und Spezifität von Schnelltests. In der Wahrscheinlichkeitsrechnung habe ich die bedingten Wahrscheinlichkeiten vorgezogen und daraus den Begriff der Unabhängigkeit von Ereignissen abgeleitet, weil dieser Zugang nach meiner langjährigen Erfahrung den Studierenden plausibler ist. Ich danke allen Leserinnen und Lesern, die mir Verbesserungshinweise gegeben haben, sowie den Mitarbeiterinnen des Hanser Verlags für die stets angenehme Zusammenarbeit.

München, im März 2021

Michael Sachs

## Aus dem Vorwort zur 5. Auflage

*„Wozu brauchen wir das alles?“*

So lautet eine häufig gestellte Frage von Studierenden, besonders an Hochschulen für angewandte Wissenschaften, wo immer der Aspekt der Anwendung im Vordergrund steht. Der vorliegende Band aus der Reihe „Studienhilfen Mathematik“ versucht, für den Bereich der Statistik eine befriedigende Antwort auf diese Frage zu geben. In allen technischen Studiengängen machen Studierende bei der Durchführung von Versuchen die Erfahrung von zufälligen Einflüssen. Die Erforschung von deren Gesetzen ist Gegenstand der **Wahrscheinlichkeitsrechnung**, ihre Anwendung Gegenstand der **schließenden Statistik**. Am Anfang steht ein Kapitel über **beschreibende Statistik**, das vollkommen ohne den Wahrscheinlichkeitsbegriff auskommt.

Es kommen keine schwierigen Beweise oder umfangreiche Theorien vor. Ingenieurinnen und Ingenieure dürfen sich hier getrost auf die gesicherten Ergebnisse der Mathematik verlassen und sollen vielmehr die Aussagen verstehen und richtig einschätzen lernen, die hinter solchen Sätzen stehen, sowie die Methoden sinnvoll anwenden und ihre Ergebnisse korrekt interpretieren können. Aus der höheren Mathematik werden Kenntnisse der elementaren Funktionen einer reellen Veränderlichen und ihrer Ableitungen sowie des Riemannsches Integrals vorausgesetzt.

Jeder Abschnitt stellt in Lehrsätzen und gelösten Aufgaben die Hilfsmittel bereit, mit denen man die anschließenden Übungsaufgaben lösen kann. Die Ergebnisse der Aufgaben sind zur Kontrolle im Anhang angegeben.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Wozu Statistik?</b> .....	7
<b>2</b>	<b>Beschreibende Statistik</b> .....	10
2.1	Grundbegriffe.....	10
2.2	Eindimensionale Häufigkeitsverteilungen.....	15
2.3	Kumulierte Häufigkeiten und empirische Verteilungsfunktion.....	20
2.4	Lageparameter.....	26
2.5	Streuungsparameter.....	39
2.6	Zweidimensionale Häufigkeitsverteilungen.....	47
2.7	Korrelationsrechnung.....	54
2.8	Regressionsrechnung.....	59
<b>3</b>	<b>Wahrscheinlichkeitsrechnung</b> .....	67
3.1	Kombinatorische Grundlagen.....	67
3.2	Zufall, Ereignisalgebra.....	69
3.3	Wahrscheinlichkeit und Satz von Laplace.....	77
3.4	Bedingte Wahrscheinlichkeiten und unabhängige Ereignisse.....	84
3.5	Zufällige Variable und Wahrscheinlichkeitsverteilungen.....	94
3.6	Erwartungswert und Varianz einer Verteilung.....	104
3.7	Wichtige diskrete Verteilungen.....	114
3.8	Die Normalverteilung.....	123
<b>4</b>	<b>Schließende Statistik</b> .....	135
4.1	Problemstellung, Zufallsstichproben.....	135
4.2	Punktschätzungen.....	137
4.3	Intervallschätzungen.....	148
4.4	Hypothesentests.....	165
<b>A</b>	<b>Tabellen</b> .....	182
<b>B</b>	<b>Lösungen der Übungsaufgaben</b> .....	185
	<b>Literaturverzeichnis</b> .....	196
	<b>Sachwortverzeichnis</b> .....	197

# 1 Wozu Statistik?

„Statistik informiert. Alle.“

Mit diesen Worten beginnt eine Broschüre aus dem Jahr 1990, herausgegeben vom Bayerischen Landesamt für Statistik und Datenverarbeitung<sup>1</sup>. Die dort getroffenen Aussagen gelten vorwiegend für den wirtschaftlichen und sozialen Bereich, lassen sich jedoch unschwer auch auf das Arbeitsumfeld von Ingenieurinnen und Ingenieuren übertragen. In einer sich rasch verändernden Welt, in der Massendaten anfallen und mit Computerhilfe auch schnell verarbeitet werden können, ist es wichtig

- zu wissen, welchen Zustand wir heute erreicht haben,
- mit gestern zu vergleichen,
- zukünftige Zustände abzuschätzen,
- Aussagen zu machen über die Auswirkungen getroffener Maßnahmen.

Diese Aufgaben müssen gelöst werden auf der Basis meist riesiger Datenmengen, die wegen ihres Umfanges keinem Entscheidungsträger unbearbeitet vorgelegt werden können. Aufgabe der **beschreibenden** oder **deskriptiven Statistik** (Kapitel 2) ist es daher, große und unübersichtliche Datenmengen so aufzubereiten, dass wenige aussagekräftige Kenngrößen und/oder Grafiken entstehen, mit denen dann die genannten Fragestellungen gelöst werden können. In diesen Kenngrößen ist dann die gesamte Datenmenge gewissermaßen „fokussiert“.

## Beispiel 1.1

Eine Zeugnisnote in einem Diplomzeugnis errechnet sich aus sehr vielen Einzelnoten, die evtl. sogar mit unterschiedlicher Gewichtung in die Gesamtnote eingehen. Die beschreibende Statistik liefert die Formel, mit der man aus den Einzelnoten die Gesamtnote berechnet. ■

Die zur Berechnung der Kenngrößen zugrunde gelegte Datenmenge kann zwar sehr groß werden, ist aber prinzipiell immer endlich und spricht nur für sich selbst. Es werden also keinerlei weiterführende Rückschlüsse gezogen auf irgendwelche Einheiten, die nicht untersucht wurden. Bereits im 19. Jahrhundert hat man jedoch erkannt, dass sehr große statistische Massen, wie z. B. die Bevölkerung eines Landes, nicht mehr durch eine vollständige Erhebung zu erfassen sind. Der Aufwand hierfür wäre technisch und organisatorisch viel

---

<sup>1</sup>heute: Bayerisches Landesamt für Statistik

zu hoch. Während hier eine Totalerhebung zwar schwierig, aber prinzipiell immerhin noch möglich wäre, verhält es sich ganz anders, wenn man Aussagen treffen will z. B. über alle Teile, die eine bestimmte Maschine jemals produziert, oder gar über die Menge aller möglichen Würfe mit einem bestimmten Würfel. In beiden Fällen ist die Grundgesamtheit, also die Menge aller Teile bzw. aller Würfe, von vorneherein überhaupt nicht bekannt, sie liegt nicht so greifbar vor uns wie im Falle der Noten eines Faches.

In solchen Fällen muss man sich auf **Stichproben**, also Teilerhebungen beschränken. Die gesuchten Kenngrößen können dann nicht mehr exakt bestimmt, sondern nur noch geschätzt werden. Hier kommt aber der Begriff des **Zufalls** ins Spiel: Ziehen zwei Leute eine Stichprobe aus der gleichen Grundgesamtheit und berechnet jeder das arithmetische Mittel  $\bar{x}$  seiner Stichprobe, so werden sie im Allgemeinen zu unterschiedlichen Ergebnissen kommen. Welche Elemente in die jeweilige Stichprobe gelangen, hängt nämlich von Faktoren ab, die der Stichprobenzieher nicht bestimmen kann.

Kapitel 4 ist daher der **schließenden** oder **induktiven Statistik** gewidmet, die Methoden entwickelt, um von einer Stichprobe auf die Gesamtheit schließen zu können.

### Beispiel 1.2

Eine große Firma kauft 100 Personal Computer bei Händler *A* und 200 bei Händler *B*. Im Laufe des ersten Jahres gehen bei den *A*-Computern zwölf Netzteile kaputt, bei den *B*-Computern 16 Netzteile. Der Beitrag der beschreibenden Statistik ist hier eher gering: Sie gibt uns die Formel, um die Anteile  $p_A$  und  $p_B$  der Computer mit defektem Netzteil zu berechnen:

$$p_A = \frac{12}{100} = 12 \% \quad \text{und} \quad p_B = \frac{16}{200} = 8 \%.$$

*A* hat also schlechtere Qualität in Bezug auf das Merkmal „Lebensdauer des Netzteils“ geliefert als *B*. Aber kann man daraus schließen, dass *A* **generell** einen höheren Ausschussanteil hervorbringt als *B*, oder könnte das schlechte Ergebnis für *A* auch einfach Zufall gewesen sein? Diese Frage kann nur die schließende Statistik beantworten. Wir werden auf dieses Beispiel im Abschnitt 4.3 zurückkommen. ■

### Beispiel 1.3

Um eine Prognose über den Ausgang einer Wahl treffen zu können, werden 100 ausgewählte Personen befragt. 45 antworten, sie würden die *A*-Partei wählen. Die beschreibende Statistik kann dann nur sagen,

dass 45 % der Befragten *A*-Anhänger sind. Die schließende Statistik dagegen versucht, ausgehend von diesem Ergebnis Aussagen über **alle** Wahlberechtigten zu machen (die berühmte Hochrechnung). Kann man ausgehend von der Stichprobe mit Umfang 100 schon sagen, dass Partei *A* unter allen Wahlberechtigten 45 % der Stimmen hat? Rein gefühlsmäßig erscheinen 100 als zu wenig, aber mit welcher Genauigkeit kennen wir den wahren Anteil der *A*-Wähler, wenn wir 1 000 oder gar 10 000 Personen befragen? Hängt die Anzahl der zu befragenden Personen von der Gesamtzahl der Wahlberechtigten ab oder nicht? Was heißt überhaupt in diesem Zusammenhang „Genauigkeit“? Dies sind Fragen, die die schließende Statistik präzisieren und beantworten muss. ■

Als Grundlage für die schließende Statistik müssen wir also zunächst den Begriff des Zufalls präzisieren. Hierfür steht eine mathematische Theorie zur Verfügung, die **Wahrscheinlichkeitsrechnung**. Ihre wichtigsten Erkenntnisse stehen in Kapitel 3.

Beschreibende und schließende Statistik werden auch zusammengefasst unter dem Begriff **statistische Methodenlehre**. Darüber hinaus wird der Begriff **Statistik** aber auch angewendet für die einzelne Tabelle, („die Arbeitslosenstatistik“, „die Unfallstatistik“). Schließlich meint Statistik auch noch die praktische Tätigkeit des Registrierens und Auswertens von Daten, z. B. in dem Satz „Die amtliche Statistik in Bayern wird vom Landesamt für Statistik wahrgenommen“.

Wir fassen zusammen:

### Definition 1.1

Die statistische Methodenlehre ist eine Hilfswissenschaft. Ihre Aufgabe ist es, Methoden für die Erhebung, Aufbereitung, Analyse und Interpretation von Daten bereitzustellen mit dem Ziel, Strukturen in Massenerscheinungen zu erkennen.

# 2 Beschreibende Statistik

## 2.1 Grundbegriffe

Die **statistische Masse** besteht aus allen denjenigen Elementen, denen das Interesse des Statistikers gilt. Ihre einzelnen Mitglieder heißen **statistische Einheiten**, **statistische Elemente** oder **Merkmalsträger**. Vor jeder ernst zu nehmenden statistischen Tätigkeit muss die statistische Masse in räumlicher, zeitlicher und sachlicher Hinsicht präzise definiert werden.

### Beispiel 2.1

Mögliche statistische Massen sind:

- Natürliche Personen (z. B. Studierende, Kunden, Mitarbeiter),
- Sachen (z. B. Maschinen, Produkte),
- Institutionen, Körperschaften (z. B. Betriebe, Städte, Länder),
- Ereignisse (z. B. Maschinenausfälle, Geburten, Todesfälle, Firmengründungen, Konkurse).

Eine korrekt beschriebene statistische Masse wäre etwa: „Alle Studierenden des Studienganges Bioingenieurwesen an der Hochschule München im WS 2017/2018“. Räumliche Eingrenzung: Hochschule München. Zeitliche Eingrenzung: WS 2017/2018. Sachliche Eingrenzung: Studierende des Bioingenieurwesens. ■

An den statistischen Elementen interessieren uns bestimmte Eigenschaften oder **Merkmale**. Die Werte, die ein Merkmal annehmen kann, heißen **Merkmalsausprägungen**. Ein sinnvolles Merkmal muss mindestens zwei verschiedene Ausprägungen haben.

### Beispiel 2.2

Eine Computerzeitschrift testet verschiedene Drucker. Die statistische Masse sind also die getesteten Drucker. Bei jedem Drucker interessieren den Leser folgende Merkmale:

- Hersteller (alle Herstellernamen),
- Bezeichnung des Gerätes (alle Bezeichnungen),
- Preis (0 € – 10 000 €),
- Gewicht (0 kg – 10 kg),

- Seitenzahl pro Minute (0 – 100 Seiten),
- Gesamturteil (sehr gut, gut, mittel, schlecht, sehr schlecht).

In Klammern stehen jeweils die möglichen Merkmalsausprägungen. ■

Bezüglich der Art ihrer Merkmalsausprägungen (Werte) lassen sich Merkmale wie folgt in Kategorien einteilen:

- Ein **qualitatives Merkmal** liegt vor, wenn die Werte keine physikalische Einheit brauchen. Man unterscheidet dabei **qualitativ-nominale** Merkmale von **qualitativ-ordinalen** Merkmalen: Bei einem nominalen Merkmal sind die Merkmalsausprägungen nur dem Namen nach unterscheidbar, sie drücken aber keinerlei Wertung oder Intensität aus. Bei einem ordinalen Merkmal<sup>1</sup> unterscheiden sich die Ausprägungen nicht nur hinsichtlich ihrer Namen, sondern können zusätzlich noch in eine (inhaltlich sinnvolle) Rangordnung gebracht werden.
- Ein **quantitatives Merkmal**<sup>2</sup> liegt vor, wenn die Nennung des Wertes allein noch keinen Sinn ergibt, weil die Einheit fehlt. Man unterscheidet hier zwischen **quantitativ-diskret** und **quantitativ-stetig**: Diskrete Merkmale haben Werte, die durch einen Zählprozess entstehen. Die Werte sind dann meist die natürlichen Zahlen 0, 1, 2, ..., die Einheit ist 1 oder bei größeren Anzahlen auch oft 1 000. Zwischen den einzelnen Ausprägungen können keine Werte angenommen werden. Stetige Merkmale dagegen werden durch Messung gewonnen und können (theoretisch, je nach Genauigkeit des Messgerätes) jeden Wert innerhalb eines sinnvollen Intervalls annehmen.

### Beispiel 2.3

Im letzten Beispiel sind die Merkmale „Hersteller“, „Bezeichnung“ und „Gesamturteil“ qualitativ, denn ihre Werte benötigen keinerlei Einheit. „Gesamturteil“ ist darüber hinaus noch ordinal, denn die Werte können in eine Rangskala von „sehr gut“ bis „sehr schlecht“ geordnet werden. Die übrigen Merkmale sind quantitativ, „Preis“ und „Gewicht“ stetig, „Seitenzahl“ diskret. (Streng genommen ist „Preis“ ebenfalls ein diskretes Merkmal, denn Preise können keine Werte zwischen zwei aufeinanderfolgenden Cent annehmen. Hier ist die Einteilung aber so fein, dass man „Preis“ meist als stetiges Merkmal behandelt.) ■

<sup>1</sup>auch *Rang*-Merkmal

<sup>2</sup>auch *metrisches* oder *kardinales* Merkmal



Die Kategorie eines Merkmals hat Einfluss auf die Gestaltung von Fragebögen und grafischen Bildschirmoberflächen: Bei einem qualitativen Merkmal mit nur wenigen Ausprägungen (z. B. Familienstand, Geschlecht) wird man alle Alternativen auflisten mit der Möglichkeit, die zutreffende anzukreuzen. Ein qualitatives Merkmal mit sehr vielen möglichen Ausprägungen (z. B. Name, Wohnort, Staatsangehörigkeit) wird man als Freitextfeld zum Ausfüllen realisieren. Quantitative Merkmale schließlich haben sehr viele Werte und werden daher als Freitextfeld dargestellt, oder man fasst die Werte zu wenigen Intervallen zusammen (Klassierung, siehe Abschnitt 2.2) mit der Möglichkeit anzukreuzen.

Zum Zwecke der effizienten Abspeicherung von Merkmalsausprägungen in DV-Anlagen werden die Ausprägungen oft **verschlüsselt**, d. h., den einzelnen Werten werden Zahlen zugeordnet, z. B. beim qualitativ-nominalen Merkmal Familienstand: „0“ für „ledig“, „1“ für „verheiratet“, „2“ für „verwitwet“ usw. Das heißt aber **nicht**, dass daraus jetzt ein quantitatives Merkmal entstanden ist, was man schon allein daran erkennt, dass „verwitwet“ nicht doppelt soviel ist wie „verheiratet“.

Werden die benötigten Daten durch eine eigens für statistische Zwecke organisierte Erhebung gewonnen, sprechen wir von einer **Primärstatistik**, werden sie dagegen von bereits vorhandenen Verwaltungs- oder Unternehmensdateien für die Statistik „abgezweigt“, von einer **Sekundärstatistik**.

### Beispiel 2.4

Ermittelt die „Arbeitsgemeinschaft Fernsehforschung“ (AGF) die Fernseh-Einschaltquoten, so entsteht eine Primärstatistik, dasselbe gilt z. B. für die Qualitätskontrolle in Betrieben. Die monatliche Arbeitslosenstatistik der Bundesagentur für Arbeit dagegen ist eine Sekundärstatistik, da hier auf das bereits in den Arbeitsämtern vorliegende Material zurückgegriffen wird. ■

Werden alle Elemente einer statistischen Masse in die Erhebung einbezogen, liegt eine **Totalerhebung** oder **Vollerhebung** vor, ansonsten eine **Teilerhebung** oder **Stichprobe**. Elemente in Stichproben können zufällig ausgewählt werden (**Zufallsstichprobe**, sie wird im Abschnitt 4.1 behandelt), oder bewusst zusammengesetzt werden, sodass in der Stichprobe die Werte gewisser Merkmale mit den gleichen relativen Häufigkeiten („Quoten“) repräsentiert sind wie in der Gesamtheit (**repräsentative Stichprobe**). Um repräsentative Stichproben zusammensetzen zu können, braucht man Informationen über die zugrunde liegende Grundgesamtheit aus früheren Untersuchungen.

### Beispiel 2.5

Die AGF führt Teilerhebungen zur Fernseh Zuschauerforschung durch. Dieses Fernsehpanel umfasst ca. 5 400 täglich berichtende Haushalte, in denen rund 11 000 Personen leben (Stichprobe). Damit wird die Fernsehnutzung von 75,3 Mio. Personen ab drei Jahren (Grundgesamtheit) abgebildet (Stand 04.01.2021, Quelle: [12]). Sind also etwa in der Gesamtbevölkerung 12 % zwischen 14 und 29 Jahre alt, so müssen in einer repräsentativen Stichprobe von 10 000 Testpersonen ca. 1 200 Testpersonen zwischen 14 und 29 Jahre alt sein. ■

Für die anschließende Veröffentlichung der Daten in Form einer Tabelle gibt es die DIN-Norm 55 301 ([9]). Auch wenn sie inzwischen zurückgezogen wurde, ist es sicher nicht verkehrt, sich an einige Grundregeln dieser Norm zu halten. Bild 2.1 zeigt die vier Hauptbestandteile einer Tabelle. Der Tabellenkopf

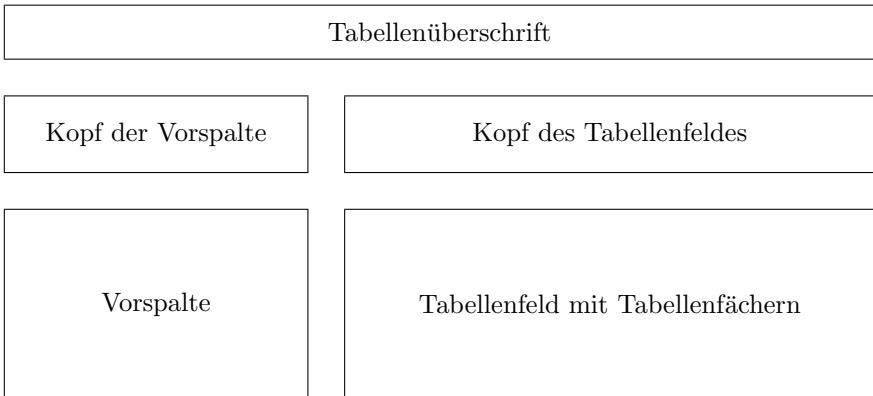


Bild 2.1: Bestandteile einer Tabelle

kann dabei Unterstrukturen enthalten. Bei quantitativ-stetigen Merkmalen müssen die Einheiten im Kopf oder in der Überschrift stehen. Tabellenfächer sollten niemals leer sein, es können aber u.a. folgende Symbole verwendet werden (siehe [9], 10.6):

- nichts vorhanden
- ... Angabe fällt später an
- / Zahlenwert nicht sicher genug
- . Zahlenwert unbekannt oder geheimzuhalten
- x Tabellenfach gesperrt, weil Aussage nicht sinnvoll

# Sachwortverzeichnis

- abhängige Ereignisse 86
- abhängige zufällige Variable 106
- Ablehnungsbereich 168
- absolute Häufigkeit 15, 18
- Alternativhypothese 166 ff.
- Anteilssatz 138
- arithmetisches Mittel 26 ff., 49
- Ausgleichsrechnung 59
- Ausreißer 34
- Axiome von Kolmogorov 79
- barometrische Höhenformel 66
- Bayes, Satz von 92
- bedingte Wahrscheinlichkeit 84 ff.
- Bernoulli-Experiment 114
- Bernoulli-Kette 114
- beschreibende Statistik 7, 10 ff.
- Besetzungsdichte 18, 35
- Besetzungszahlen 178 ff.
- Bestimmtheitsmaß 54 f.
- bimodale Verteilung 36
- Binomialkoeffizient 68 f.
- Binomialverteilung 114 ff.
- binomische Formel 69, 116
- Boxplot 41
- $\chi^2$ -Anpassungstest 177 ff.
- $\chi^2$ -Verteilung 162 f., 179, 184
- Coronavirus 86
- de Moivre, Grenzwertsatz von 132 f.
- de Morgansche Regeln 75
- deskriptive Statistik 7, 10 ff.
- Dichtefunktion 99 ff.
- diskrete zufällige Variable 95 ff.
- diskretes Merkmal 11
- Dreieckverteilung 114, 127 f., 129
- Einfallsklasse 25
- Elementarereignis 70, 87
- Elementarereignisraum 70
- empirische Verteilungsfunktion 22 ff.
- Entscheidungsregel 167 ff.
- Ereignis(se) 71 ff.
- , disjunkte 74, 81
- , komplementäres 73, 75, 80
- , sicheres 71, 79
- , unabhängige 86 ff.
- , unmögliches 71, 79
- Ereignisalgebra 73 ff.
- Ergebnisraum 70
- erwartungstreue Schätzfunktion 139 ff.
- Erwartungswert 104 ff.
- Exponentialverteilung 101, 113
- Fakultät 67ff.
- Fechnersche Lageregel 36 f.
- Fehler 1. Art 168 ff.
- funktionale Abhängigkeit 49, 108
- Gauß, C. F. 60, 123
- Gaußsche Glockenkurve 123
- Gauß-Verteilung 123 ff.
- geometrisches Mittel 37 ff.
- Gesetz der großen Zahlen 113
- goodness-of-fit 177
- Gosset, W. S. 153
- Grad des Vertrauens 149
- Grenzwertsatz von de Moivre 132 f.
- Grundgesamtheit 115, 121, 136 ff.
- Güte(funktion) 170 f.
- Häufigkeit 15, 18, 47
- , kumulierte 20 f.
- Häufigkeitstabelle 15, 47
- , klassierte 27, 32, 43
- , kumulierte 20 ff.
- , unklassierte 27, 32, 43
- Häufigkeitsverteilung 15 ff., 47
- , eindimensionale 15
- , zweidimensionale 47
- häufigster Wert 35 ff.
- Histogramm 19
- hoch-signifikantes Ergebnis 169
- hypergeometrische Verteilung 120 ff.

- Hypothese 165 ff.  
Hypothesentest 165 ff.  
induktive Statistik 8, 135 ff.  
Interpolation 25  
Interquartilsabstand 40  
Intervallschätzung 148 ff.  
Irrtumswahrscheinlichkeit 168  
  
kartesisches Produkt 76  
Klassenbildung 17, 22  
Klassenbreite 18  
Klassendichte 18  
Klassenmitte 18  
klassierte Häufigkeitsverteilung 17  
Kolmogorov, A. N. 79  
Kombinatorik 67 ff.  
Komplement 73, 75 f., 80  
Konfidenzintervall 149 ff.  
- für die Steigung der  
  Regressionsgerade 160 f.  
- für die Varianz 162 ff.  
- für  $\mu$  149 ff.  
- für  $p$  155 f.  
- für zwei Erwartungswerte 157 f.  
- für zwei Wahrscheinlichkeiten 159 f.  
Kontingenztafel 47  
Korrelation 51 ff.  
Korrelationskoeffizient 54 f., 146  
Korrelationsrechnung 54 ff.  
Kovarianz 50 ff.  
kritischer Bereich 168  
kumulierte Häufigkeiten 20 ff.  
Kurvenanpassung 59 ff.  
  
Lageparameter 26 ff.  
Lageregel 36 f.  
Laplace, Satz von 80  
Laplace-Annahme 80  
Leitfaden zur Unsicherheit 142 f.  
lineare Regression 60 ff.  
lineare Transformation 30  
links-steile Verteilung 37  
Macht, Mächtigkeit 170 f.  
Median 31 ff.  
  
Merkmal 10  
Merkmalsausprägung 10  
Merkmalsträger 10  
Methode der kleinsten Quadrate 60 ff.  
Modalklasse 35 ff.  
Modalwert 35 ff.  
Modus 35 ff.  
  
Normalverteilung 123 ff.  
Nullhypothese 166 ff.  
  
Parameter 136 ff.  
parametrischer Test 165  
Poisson, S. D. 117  
Poisson-Verteilung 117 ff.  
Power 170 f.  
Permutationen 67  
Primärstatistik 12  
Punktschätzung 137 ff.  
Punktwolke 48, 59, 65  
  
Quantil 24, 40, 150  
Quartil 40  
Quartilsabstand 40  
  
radioaktiver Zerfall 119 f.  
Randhäufigkeiten 48  
Realisationen 94, 127, 138  
Rechteckverteilung 102, 142  
rechts-steile Verteilung 37  
Regressionsgerade 61 ff., 144 ff., 160  
Regressionsparameter 63  
Regressionsrechnung 59 ff.  
relative Häufigkeit 15, 18, 77 f.  
repräsentative Stichprobe 12  
Residuum 63  
  
Schätzfunktion 137 ff.  
Schätzprinzip 137  
Scheinkorrelation 56  
schließende Statistik 8, 135 ff.  
Sekundärstatistik 12  
Sensitivität 85 f.  
signifikantes Ergebnis 168  
Signifikanzniveau 168  
Spannweite 39 f.  
Spezifität 85 f.

- Stabdiagramm 17  
 Standardabweichung  
 - einer statistischen Masse 42 ff.  
 - einer zufälligen Variablen 109 ff.  
 standardisierte zufällige Variable 112, 125  
 Standard-Normalverteilung 125 ff., 182  
 Standardunsicherheit 142  
 statistische Elemente 10  
 statistische Masse 10  
 stetige Gleichverteilung 102 f.  
 stetige zufällige Variable 98 ff.  
 stetiges Merkmal 11, 17  
 Stichprobe 8, 12, 135 ff.  
 Stichprobenfunktion 137  
 Stichprobenmittel 134  
 Stichprobenvariable 135  
 Stichprobenvarianz 138  
 stochastische Konvergenz 113  
 Streudiagramm 48 ff.  
 Streuungsparameter 39 ff.  
 Student-Verteilung 153, 172, 183  
 symmetrische Verteilung 107  
*t*-Test 172 ff.  
*t*-Verteilung 153, 172, 183  
 Tabellengestaltung 13 f.  
 Teilerhebung 12  
 Testgröße 166 ff.  
 totale Wahrscheinlichkeit 91 f.  
 Totalerhebung 12  
 Treppenfunktion 23, 98  
 Unabhängigkeit  
 - von Ereignissen 86 ff.  
 - von zufälligen Variablen 106 ff., 135  
 unimodale Verteilung 36  
 unklassierte Häufigkeitsverteilung 17  
 Unsicherheit  
 - beim Messen 142 ff.  
 - der Steigung 146 f.  
 unverbundene Stichproben 175  
 unverfälschte Schätzfunktion 139 ff.  
 Urliste 15, 27, 31, 42, 47  
 Varianz  
 - einer statistischen Masse 42 ff., 49  
 - einer zufälligen Variablen 109 ff.  
 Variationskoeffizient 45 f.  
 Venn-Diagramm 73 f.  
 verbundene Stichproben 175  
 Versuch 70  
 Verteilungsfunktion  
 - einer statistischen Masse 22 ff.  
 - einer zufälligen Variablen 96 ff.  
 Vertrauensintervall s. Konfidenzintervall  
 Vertrauensniveau 149  
 Vertrauenswahrscheinlichkeit 149  
 Verzinsungsfaktor 37  
 Wachstumsfaktor 37  
 Wachstumsrate 37  
 Wahrscheinlichkeit 77 ff.  
 -, bedingte 84 ff.  
 -, totale 91 f.  
 Wahrscheinlichkeitsbaum 90 f., 190  
 Wahrscheinlichkeitsdichte 99 ff.  
 Wahrscheinlichkeitselement 101  
 Wahrscheinlichkeitsmasse 97  
 Wahrscheinlichkeitsrechnung 9, 67 ff.  
 Wahrscheinlichkeitsverteilung 97  
 -, symmetrische 107  
 zentraler Grenzwertsatz 129 ff.  
 Zentralwert 31 ff.  
 Ziehen mit Zurücklegen 82, 115  
 Ziehen ohne Zurücklegen 82, 115  
 zufällige Variable 94 ff.  
 -, diskrete 95 ff.  
 -, standardisierte 112, 125  
 -, stetige 98 ff.  
 -, unabhängige 106, 111, 115  
 Zufall 69 ff.  
 Zufallsexperiment 69 ff.  
 -, zusammengesetztes 76  
 Zufallsstichprobe 12, 135 ff.  
 Zusammenhang zweier Messreihen 55