HANSER

Leseprobe

zu

Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler

von Werner Helm et al.

Print-ISBN: 978-3-446-46913-6
E-Book-ISBN: 978-3-446-46937-2

Weitere Informationen und Bestellungen unter
https://www.hanser-kundencenter.de/fachbuch/artikel/978-3-446-46913-6
sowie im Buchhandel

Vorwort zur 3. Auflage

Für die vorliegende dritte Auflage wurde der gesamte Text kritisch durchgesehen und aktualisiert (wie beispielsweise der Einkommensteuertarif). Fehler wurden korrigiert, Ungenauigkeiten klargestellt und viele Anregungen von Studierenden eingearbeitet.

Auf plus.hanser-fachbuch.de finden Sie umfangreiches Zusatzmaterial, beispielsweise ein Zusatzkapitel über Differenzialgleichungen. Auch sind dort die Lösungen zu allen Aufgaben vorhanden. Ebenso zahlreiche Excel-Dateien zur Finanzmathematik, mit denen die Lösungen der Aufgaben einfach und leicht ermittelt werden können.

Der vorliegende Band richtet sich speziell an Studierende der Wirtschaftswissenschaften im weitesten Sinne, an Berufsakademien, Hochschulen oder Universitäten und ist geeignet als vorlesungsbegleitendes Lehr- und Übungsbuch, kann aber auch wegen der Vielzahl von Beispielen und Aufgaben zum Selbststudium verwendet werden.

Die Autoren sind sich dessen bewusst, dass Studierende der Volks- und Betriebswirtschaft, der Wirtschaftsinformatik oder des Wirtschaftsingenieurwesens sowie verwandter Disziplinen eine fachgerichtete Aufbereitung der Mathematik – auch der Grundlagen der Mathematik – erwarten. Daher sind grundlegende Begriffe der Mathematik wie z. B. der der Funktion von einer oder mehreren Variablen oder der Begriff des Differenzials aus Sicht des Wirtschaftswissenschaftlers dargestellt und mit fachspezifischen Beispielen versehen. Ausführlich dargestellt ist das Thema betriebswirtschaftliche Kostenfunktionen. Insofern ist dieser Band in sich abgeschlossen und kann auch als umfassendes Mathematik-Lehrbuch für Studierende der Wirtschaftswissenschaften dienen. Die Autoren lassen ihre jahrelange vielfältige Lehrerfahrung in dieses Buch einfließen. Vom Schwierigkeitsgrad zielt das Buch auf die Mitte: Da, wo in den Vorlesungen eine abstraktere Sicht auf die Mathematik betont wird, kann das Buch bei der unverzichtbaren praktischen Umsetzung helfen (Learning by Doing). An anderen Hochschulen mit einem geringen Stundenumfang in Mathematik kann das Buch als Universalreferenz dienen, deckt es doch einen sehr breiten Bereich an Inhalten ab, die auch für Lehrveranstaltungen relevant sind, die nicht die Bezeichnung Mathematik im Titel tragen, wie Kostenrechnung, Finanzierung oder Operations Research.

Das Vorgängerwerk *Lehr- und Übungsbuch MATHEMATIK in Wirtschaft und Finanzwesen* wurde gründlich überarbeitet, aktualisiert und an die Rahmenbedingungen der heutigen Bachelor-Studiengänge angepasst. Es bietet die **grundlegende Wirtschaftsmathematik komplett in einem Band**, geht an einigen Stellen leicht darüber hinaus und bildet Brücken aus zur praktischen Verwendung mathematischer Methoden auch in höheren Semestern. Ob Kostenfunktionen, Kundenwanderung, Lineare oder Nichtlineare Optimierung, Projektplanung oder Netzplantechnik – mit und ohne Computer – das Buch ist aus der Sicht der Nutzer und Anwender entwickelt, ohne dabei die mathematische Substanz zu opfern. Die kompakte und trotzdem vollständige Darstellung der klassischen Finanzmathematik vom Autor des in der sechsten Auflage erschienenen Buches *Finanzmathematik – Lehrbuch für Studium und Praxis* enthält zahlreiche Anwendungsbeispiele.

In den ersten fünf Kapiteln werden die Grundlagen der Mathematik für Volks- und Betriebswirte dargestellt und anhand von ökonomischen Problemen in einem praxisorientierten Zusammenhang erläutert. Dazu zählen Funktionen, Differenzial- und Integralrechnung und Lineare Algebra – Theorie eng verknüpft mit ökonomischen Anwendungen. Kapitel 6 enthält die Lineare Optimierung mit dem Simplex-Algorithmus. Kapitel 7 umfasst die gesamte klassische Finanzmathematik von der Zinsrechnung bis zu den Abschreibungsarten auf aktuellem Stand und führt heran an die Begriffe *Rendite*, *Risiko*, *Call* und *Put*. In Kapitel 8 werden in knapper Form weitere praktische Probleme und deren Lösungsmethoden dargestellt. Stichworte sind: Nichtlineare Programmierung, Optimierung eines Portfolios, Netzplantechnik (CPM, PERT) mit GANTT-Charts.

In allen Kapiteln enthalten sind viele praktische und zeitgemäße durchgerechnete Beispiele, die das Erlernen und Behalten der Begriffe wesentlich fördern. In vielen Fällen werden bei der Berechnung und Darstellung der Lösungen professionelle Softwaresysteme wie z. B. das System SAS verwendet. SAS gilt als die weltweit beste Analytics-Software, renommierte wie aufstrebende Fachbereiche *leisten* sich SAS. Damit wird eine Einführung in die Handhabung dieser auch in Wirtschaft und Industrie vielfach verwendeten Software gegeben. Das Buch enthält Hinweise auf Excel-Programme zur Finanzmathematik. Die zahlreichen Aufgaben, deren Lösungen am Ende des Buches zu finden sind, sollen dem Festigen der erworbenen Kenntnisse und natürlich auch der Prüfungsvorbereitung dienen.

Autoren und Verlag hoffen, auch mit diesem Buch den Studierenden ein wertvolles Studienmaterial bereitzustellen. Hinweise, Erfahrungen und Anregungen seitens der Studierenden und der Lehrenden nehmen die Autoren und der Verlag gern entgegen.

Wir bedanken uns bei allen, die Anregungen und Korrekturvorschläge zu den Vorauflagen gegeben haben. Auch über Hinweise und Bemerkungen zur neuen, dritten Auflage freuen wir uns.

Dezember 2020 Die Autoren

Inhaltsverzeichnis

1 Funktionen einer reellen Variablen in ökonomischen Problemen

Zusammenhänge zwischen den Größen wirtschaftlicher Erscheinungen als mathematische Funktion zu betrachten und aus ihrer formal-mathematischen Analyse inhaltlich-ökonomische Informationen zu gewinnen, hat sich zu einem bewährten Hilfsmittel entwickelt. Davon zeugen unter anderem die vielfältigen Produktionsfunktionen in Betriebs- und Volkswirtschaft sowie die verschiedenen Typen von Wachstumsfunktionen.

1.1 Mathematische Grundbegriffe

1.1.1 Funktionsbegriff

BEISPIEL

1.1 Zuordnungen als ein Grundelement von Funktionen

Die Herstellung eines Produktes verursacht Kosten. Setzt man sie ins Verhältnis zur Zahl der erzeugten Exemplare des Produktes (zur Produktionsmenge), erhält man die Durchschnittskosten. Letztere werden auch Stückkosten oder spezifische Kosten genannt. Sowohl Kosten als auch Durchschnittskosten ändern sich mit der Produktionsmenge. Dabei wird – gewisse Produktionsbedingungen innerhalb eines Zeitraumes als konstant vorausgesetzt – jeder Produktionsmenge eine bestimmte Kostensumme zugeordnet, und umgekehrt gehört zu jeder Kostensumme eine bestimmte Produktionsmenge. Für die Durchschnittskosten gilt nur Ersteres, während zu einer gegebenen Höhe von Durchschnittskosten durchaus zwei verschiedene Produktionsmengen gehören können. *Tabelle 1.1* zeigt eine mögliche konkrete Zuordnung der genannten ökonomischen Größen.

Tabelle 1.1 Produktionsmenge P (in Mengeneinheiten ME), Kosten K (in Geldeinheiten GE) und Durchschnittskosten k (in GE/ME)

P in ME	2	4	6	8	10	12	14	16
K in GE	38,6	47,6	51,8	56	65	83,6	116,6	168,8
k in GE/ME	19,3	11,9	$8{,}6\overline{3}$	7	6,5	$6{,}9\overline{6}$	8,33	10,55

■

Das Charakteristische im *Beispiel 1.1* besteht darin, dass jedem Wert P genau ein Wert K bzw. genau ein Wert k zugeordnet wird. Es ergeben sich Wertepaare $(P;K)$ bzw. $(P;k)$.

Sind M_1 und M_2 zwei Mengen reeller Zahlen ($M_1, M_2 \subseteq \mathbf{R}$), und ist jedem $x \in M_1$ genau ein $y \in M_2$ zugeordnet, so heißt die dadurch gegebene paarweise Zuordnung reelle **Funktion** $\boldsymbol{f}$. Dabei heißt M_1 Definitionsbereich von f; er wird mit $D(f)$ bezeichnet.

Als Symbole dienen

$f\colon\ M_1 \to M_2$ oder ausführlicher (1.1a)

$y = f(x),\ x \in D(f).$ (1.1b)

Für die Größen x und y einer Funktion (1.1b) werden folgende Namen synonym verwendet:

x **unabhängige Variable**, Urbildpunkt, **Argument**,
y **abhängige Variable**, Bildpunkt, **Funktionswert**.

Des Weiteren sind die Bezeichnungen Funktionsterm für $f(x)$ und Zuordnungsvorschrift oder Funktionsrelation für $y = f(x)$ gebräuchlich.

Hier werden nur reelle Funktionen betrachtet, und daher wird der Zusatz „reell" künftig nicht angegeben.

Die Menge aller derjenigen Werte y, die sich für eine Funktion f aus ihrer Zuordnungsvorschrift $y = f(x)$ ergeben, wenn x den gesamten Definitionsbereich $D(f)$ durchläuft, wird **Wertebereich** genannt und mit $W(f)$ bezeichnet.

Zur Vorgabe einer Funktion gehören unbedingt die beiden Elemente „Zuordnungsvorschrift" und „Definitionsbereich" (siehe 1.1b)[1)]. Durch sie ist der Wertebereich eindeutig festgelegt, was jedoch nicht bedeutet, dass seine Ermittlung in jedem Falle elementar verläuft. Die Angabe des Definitionsbereiches einer Funktion ist besonders für angewandte Probleme von Bedeutung, weil die Ergebnisse wesentlich vom Definitionsbereich abhängen können.

BEISPIEL

1.2 Einfluss des Definitionsbereiches auf Eigenschaften von Funktionen

Die Funktion $y = f_1(x),\ x \in [0, 10]$, mit $f_1(x) = (x-3)^2 + 1$ hat wegen $(x-3)^2 \geqq 0$ die Eigenschaft $f_1(x) \geqq 1$ für alle $x \in [0, 10]$. Dabei wird der kleinste Funktionswert für $x = 3$ angenommen: $f_1(3) = 1$.

Ändert man für f_1 den Definitionsbereich und betrachtet beispielsweise $y = f_2(x),\ x \in [5, 10] = D(f_2)$, mit $f_2(x) = (x-3)^2 + 1$, so gilt hier $(x-3)^2 \geqq 2^2 = 4$ für alle $x \in D(f_2)$, und der kleinste Funktionswert wird für $x = 5$ angenommen:

$f_2(x) \geqq f_2(5) = 5.$ ■

Aus den Argumenten x und den Funktionswerten y einer Funktion f können geordnete Wertepaare $(x; y)$ gebildet werden, bei denen immer x an erster und y an zweiter Stelle steht. Die Wertepaare $(x; y)$ lassen sich als Punkte in einem kartesischen Koordinatensystem darstellen. Die Gesamtheit aller Punkte $(x; y)$, die man erhält, wenn x alle Werte von $D(f)$ durchläuft, bildet den **Graphen** G_f der Funktion.

BEISPIEL

1.3 Darstellung von Funktionen mittels ihres Graphen

Der Graph der Funktion $y = 0{,}5x + 1,\ -3 \leqq x \leqq 6$, ist eine Strecke (s. *Bild 1.1*). Der Graph der Funktion $y = (x-3)^2 + 1,\ 0 \leqq x \leqq 5$, ist ein Parabelabschnitt (s. *Bild 1.2*).

[1)] Ausgenommen hiervon ist der Fall, dass die Funktion nur aus endlich vielen, aufgelisteten Wertepaaren $(x_i; y_i)$, $i = 1,2,\ldots n$, besteht.

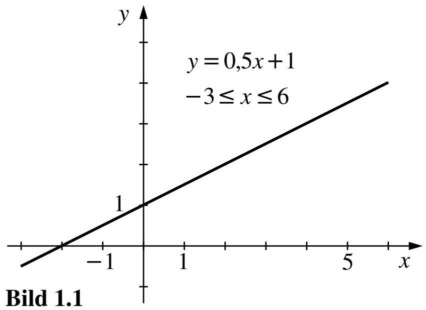

Bild 1.1

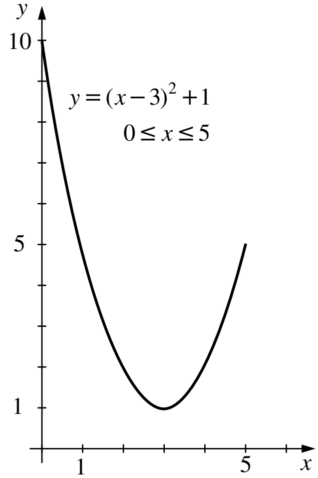

Bild 1.2 ■

Graphen von Funktionen können Strecken, Streckenzüge, Geraden, Kurven, Punktfolgen oder aus den genannten Elementen zusammengesetzt sein.

BEISPIEL

1.4 Punktfolgen und Streckenzüge als Graphen von Funktionen

Der Graph der Durchschnittskostenfunktion $k = k(P)$ aus *Tabelle 1.1* ist eine Punktfolge (s. *Bild 1.3*).

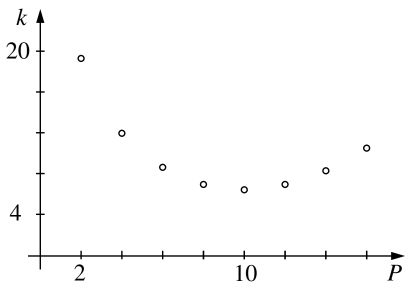

Bild 1.3

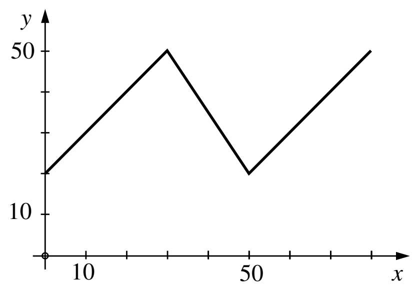

Bild 1.4

Bild 1.4 zeigt einen Streckenzug als Graphen. Er ist aus 3 Strecken zusammengesetzt. ■

Graphen von Funktionen besitzen eine charakteristische Eigenschaft: Jede Parallele zur vertikalen Achse des kartesischen Koordinatensystems schneidet den Graphen höchstens in einem Punkt. Ursache hierfür ist der Sachverhalt, dass jedem Argument x genau ein Funktionswert y zugeordnet ist. Man vergleiche hierzu die *Bilder 1.1* bis *1.4*. Deshalb muss durchaus nicht jede Kurve in einem kartesischen Koordinatensystem Graph einer Funktion sein. So stellen beispielsweise die Kurven in den *Bildern 1.5* und *1.6* keine Funktionen dar. Dagegen können

Parallelen zur horizontalen Achse des kartesischen Koordinatensystems den Graphen einer Funktion durchaus in mehr als einem Punkt schneiden. Das gilt beispielsweise für die in den *Bildern 1.2* und *1.4* dargestellten Graphen.

BEISPIEL

1.5 Kurven, die nicht Graph einer Funktion sind

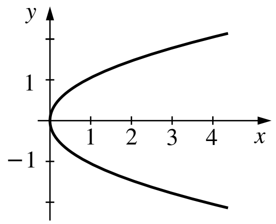

Bild 1.5

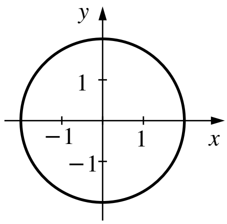

Bild 1.6 ■

Die Vorgabe von Funktionen kann auf sehr vielfältige Weise erfolgen. Genannt seien hier folgende Möglichkeiten:

M1: Wertetabelle (siehe *Tabelle 1.1*)

M2: Analytische Vorgabe in der Form $y = f(x)$, $x \in D(f)$, wobei $f(x)$ ein mathematischer Term ist (vgl. *Beispiel 1.3*).

M3: Grafische Vorgabe durch eine Kurve im kartesischen Koordinatensystem, die von Parallelen zur vertikalen Achse höchstens einmal geschnitten wird (s. *Bilder 1.1* und *1.2*).

M4: Vorgabe in zusammengesetzter Form, d. h. durch unterschiedliche Zuordnungen in verschiedenen Teilen des Definitionsbereiches. *Bild 1.4* zeigt eine zusammengesetzte Funktion. Ihre analytische Vorgabe ist durch

$$y = \begin{cases} x + 20 & \text{für } \ 0 \leqq x \leqq 30 \\ -1{,}5x + 95 & \text{für } 30 < x < 50 \\ x - 30 & \text{für } 50 \leqq x \leqq 80 \end{cases}$$

gegeben.

M5: Implizite Vorgabe durch eine Gleichung der Art $g(x, y) = 0$. Dabei muss $g(x, y)$ ein mathematischer Term sein, der jedem x aus einer gewissen Menge reeller Zahlen genau einen Wert y zuordnet.

BEISPIEL

1.6 Eine Preis-Absatz-Relation als implizite Funktion

Von zwei Produkten A und B sei bekannt, dass Produkt A einen festen Preis p_A erzielt, während der Preis von B mit der abgesetzten Menge sinkt. Die konkrete Preis-Mengen-Funktion sei zu $p_\text{B}(y) = 10.000/(50 + 4y)$, $10 \leqq y \leqq 100$, ermittelt worden, wobei y die von B abgesetzte Menge angibt. Wird die von A abgesetzte Menge mit x bezeichnet, so liefert die Summe $p_\text{A}x + p_\text{B}(y)y$ den beim Absatz von x und y erzielten Erlös E: $p_\text{A}x + p_\text{B}(y)y = E$. Soll nun ein ganz bestimmter Erlös E_0 erzielt werden, so ist das mit verschiedenen Kombinationen der Absatzmengen x und y möglich. Sie müssen der Relation $p_\text{A}x + p_\text{B}(y)y = E_0$ oder

$$g(x,y)=0 \quad \text{mit} \quad g(x,y)=p_{\text{A}}x+\frac{10.000}{50+4y}y-E_0$$

genügen, wobei jeder zulässigen Absatzmenge x genau eine Absatzmenge y zugeordnet ist (s. Aufgabe 1.11). ■

1.1.2 Ein Funktionenreservoir

Funktionen, die bei der Bearbeitung ökonomischer Phänomene auftreten, besitzen in vielen Fällen einen recht einfachen Aufbau. Wir wollen sie unter der Bezeichnung „elementare Funktionen“ zusammenfassen. Sie bilden das Funktionenreservoir, mit dem wir uns im Weiteren beschäftigen wollen. Ihre Bausteine sind einige wenige **Grundfunktionen**. Dazu zählen:

Potenzfunktionen

$$y=x^n,\ n\in\mathbf{N}\backslash\{0\},\quad x\in(-\infty,+\infty),\ \text{wobei } \mathbf{N}=\{0,1,2,3,\ldots\} \tag{1.2}$$

$$y=x^k,\ k\in\mathbf{Z},\quad x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)=\mathbf{R}\backslash\{0\}. \tag{1.3}$$

Die Graphen von Potenzfunktionen mit positivem Exponenten n sind Parabeln n-ten Grades. Sie verlaufen alle durch die Punkte $(0;0)$ und $(1;1)$. Für geradzahlige Exponenten n verlaufen die Parabeln außerdem immer durch den Punkt $(-1;1)$, für ungeradzahlige Exponenten n dagegen immer zusätzlich durch den Punkt $(-1;-1)$ (siehe *Bild 1.7*).

Die Graphen von Potenzfunktionen mit negativem Exponenten k sind Hyperbeln. Sie verlaufen alle durch den Punkt $(1;1)$. Für geradzahligen Exponenten k verlaufen die Hyperbeln außerdem immer durch den Punkt $(-1;1)$, für ungeradzahligen Exponenten k dagegen immer zusätzlich durch den Punkt $(-1;-1)$ (siehe *Bild 1.8*).

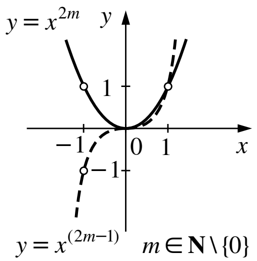

Bild 1.7

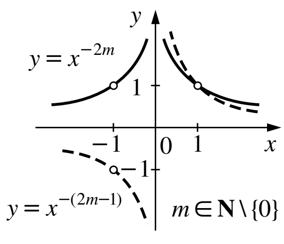

Bild 1.8

Wurzelfunktionen

$$y=x^a,\ a=\frac{p}{q},\quad p,q\in\mathbf{N}\backslash\{0\},\ a\notin\mathbf{N},\ x\in[0,+\infty). \tag{1.4}$$

Die Graphen von Wurzelfunktionen beginnen im Koordinatenursprung $(0;0)$ und verlaufen alle durch den Punkt $(1;1)$. Sie liegen ausschließlich im 1. Quadranten des kartesischen Koordinatensystems. Für die Spezialfälle $a=\frac{1}{q}$, $q\in\mathbf{N}\backslash\{0,1\}$ sind die Graphen Parabeläste; für diese Spezialfälle mit ungeraden q kann der Definitionsbereich auf ganz $\mathbf{R}$ ausgedehnt werden.

BEISPIEL

1.7 Wurzelfunktion mit dem Exponenten 0,1

Die Funktion $y = x^{0,1}$, $0 \leqq x < +\infty$, nimmt beispielsweise für $x = 2$ den Funktionswert $y = 1{,}0718$ an, den man u. a. mit einem Taschenrechner durch die Eingabenfolge 2 [y^x] 0,1 [=] erhält. ■

Potenz- und Wurzelfunktionen können zusammengefasst und auf beliebige Exponenten a verallgemeinert werden:

$$y = x^a, \quad a \in \mathbf{R}, x \in (0, +\infty). \tag{1.5}$$

Exponentialfunktionen

$$y = a^x, a > 0 \quad \text{und} \quad a \neq 1, x \in \mathbf{R}. \tag{1.6}$$

Die Graphen von Exponentialfunktionen liegen ausnahmslos in der oberen Halbebene des kartesischen Koordinatensystems und verlaufen alle durch den Punkt (0; 1). Für ein konkretes a verläuft der entsprechende Graph darüber hinaus durch die beiden Punkte $\left(-1; \frac{1}{a}\right)$ und $(1; a)$ (s. *Bilder 1.9a, 1.9b* und vgl. Lösung zur Aufgabe 1.6).

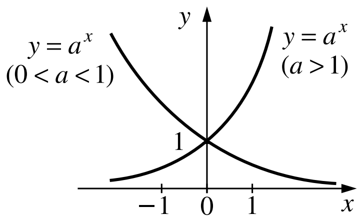

Bild 1.9a

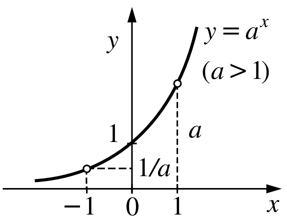

Bild 1.9b

In enger Beziehung zu den Exponentialfunktionen stehen die Logarithmusfunktionen.

Logarithmusfunktionen

$$y = \log_a x, a > 0 \quad \text{und} \quad a \neq 1, x > 0. \tag{1.7}$$

Die Graphen von Logarithmusfunktionen liegen ausnahmslos in der rechten Halbebene des kartesischen Koordinatensystems und verlaufen alle durch den Punkt (1; 0). Man erhält sie durch Spiegelung der Graphen entsprechender Exponentialfunktionen an der Geraden $y = x$. Daher verläuft auch für ein konkretes a der zugehörige Graph der Logarithmusfunktion durch die beiden Punkte $\left(\frac{1}{a}; -1\right)$ und $(a; 1)$ (s. *Bilder 1.10a, 1.10b* und vgl. Lösung zur Aufgabe 1.7).

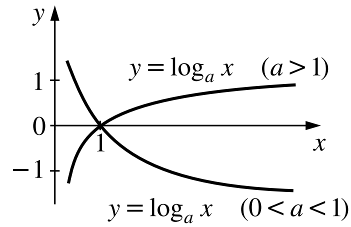

Bild 1.10a

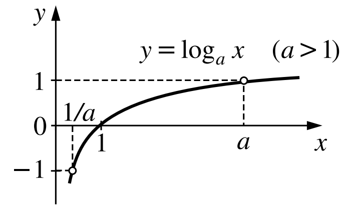

Bild 1.10b

Für die Werte $a = \mathrm{e}$ (e die Eulersche Zahl, $\mathrm{e} \approx 2{,}718\,28$ – natürliche Wachstumskonstante), $a = 2$ und $a = 10$ ergeben sich spezielle Logarithmusfunktionen:

$$y = \log_{\mathrm{e}} x = \ln x, \qquad x > 0, \tag{1.7a}$$

$$y = \log_2 x = \operatorname{ld} x, \qquad x > 0, \quad \text{und} \tag{1.7b}$$

$$y = \log_{10} x = \lg x, \qquad x > 0. \tag{1.7c}$$

In älteren Tafelwerken sind $\ln x$ und $\lg x$ noch tabelliert. Heute sind auf einschlägigen Taschenrechnern entsprechende Funktionstasten vorhanden.

Trigonometrische Funktionen (Winkelfunktionen)

$$y = \sin x, \qquad x \in \mathbf{R}, \tag{1.8a}$$

$$y = \cos x, \qquad x \in \mathbf{R}, \tag{1.8b}$$

$$y = \tan x, \qquad x \in \mathbf{R} \text{ und } x \neq \frac{\pi}{2} \pm k\pi,\ k \in \mathbf{N}, \tag{1.9}$$

$$y = \cot x, \qquad x \in \mathbf{R} \text{ und } x \neq \pm k\pi,\ k \in \mathbf{N}. \tag{1.10}$$

Die *Bilder 1.11* und *1.12* zeigen Teile der Graphen von $y = \sin x$ und $y = \cos x$.

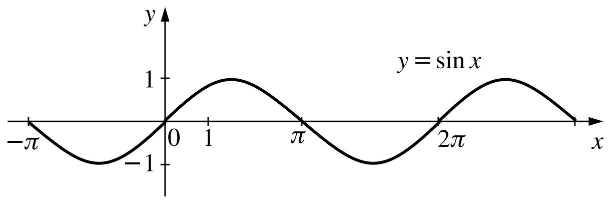

Bild 1.11

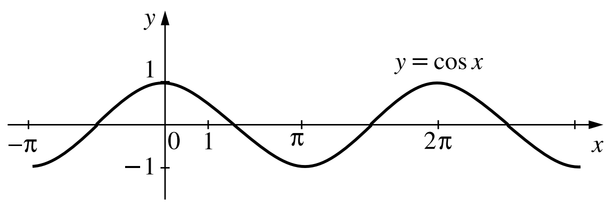

Bild 1.12

Von den trigonometrischen Funktionen können insbesondere $y = \sin x$ und $y = \cos x$ bei der Untersuchung von Saisonschwankungen und Konjunkturerscheinungen von Bedeutung sein.

Als letzte Gruppe der Grundfunktionen seien die Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen, die sogenannten **Arkusfunktionen**, hier erwähnt.

> Werden die Grundfunktionen durch Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division [1)] und/oder Verkettung miteinander verknüpft, so ergeben sich neue Funktionen. Werden auf sie ebenfalls uneingeschränkt die genannten Verknüpfungen angewandt, so ergibt sich ein unerschöpfliches Reservoir von Funktionen. Jede auf diese Weise gebildete Funktion wollen wir **elementare Funktion** nennen.

Die Verknüpfungen Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division [1)] zweier Funktionen setzen voraus, dass beide Funktionen den gleichen Definitionsbereich haben. Sie bestehen dann einfach in der Ausführung der entsprechenden algebraischen Operationen mit den Funktionswerten.

BEISPIELE elementarer Funktionen:

1.8 Mit $y = 3 - 5x + 7x^2 - 9x^3$, $x \in \mathbf{R}$, ist eine Summe bzw. Differenz von Potenzfunktionen gegeben. Allgemein spricht man bei Summen bzw. Differenzen von Potenzfunktionen von **Linearkombinationen** von Potenzfunktionen. Sie werden kurz **Polynome** genannt.

1.9 Mit $y = (1 + x^2)(1 - x^2)$, $x \in \mathbf{R}$, ist das Produkt einer Summe und einer Differenz von Potenzfunktionen, d. h. das Produkt zweier Polynome gegeben.

1.10 Mit $y = (1 + x^2)/(1 - x^2)$, $x \in \mathbf{R}$ und $x \neq \pm 1$, ist der Quotient zweier Polynome und damit ein Beispiel für rationale Funktionen gegeben. ■

Die **Verkettung** zweier Funktionen g und h zu einer neuen Funktion f besteht darin, die Funktionswerte $g(x)$ als Argumente der Funktion h einzusetzen:

$$f(x) = h\,(g(x))\,, \quad x \in D(f) = D(g). \tag{1.11}$$

Der Term $h\,(g(x))$ ist nur sinnvoll, wenn der Funktionswert $g(x)$ zum Definitionsbereich von h gehört. Deshalb erfordert die Bildung der verketteten Funktion (1.11) die Bedingung $W(g) \subseteq D(h)$ als Voraussetzung. Gegebenenfalls muss der Definitionsbereich von g entsprechend eingeschränkt werden (s. *Beispiel 1.11*). Damit ist auch klar, dass man die Reihenfolge bei der Verkettung zweier Funktionen einhalten muss. Im Falle der verketteten Funktion (1.11) nennt man g die **innere Funktion** und h die **äußere Funktion**.

BEISPIEL

1.11 Verkettete Funktion

Die Funktion $y = \sqrt{(x-1)(x^2+1)}$, $x \geqq 1$, kann als Verkettung der inneren Funktion $g(x) = (x-1)(x^2+1)$, $x \geqq 1$, und der äußeren Funktion $h(g) = \sqrt{g}$, $g \geqq 0$, aufgefasst werden. Da die innere Funktion eine elementare Funktion, die äußere sogar eine Grundfunktion darstellen, gehört die gegebene verkettete Funktion ebenfalls zu den

[1)] Bei der Division zweier Funktionen muss natürlich der Divisor von null verschieden sein.

Sachwortverzeichnis

W

Z