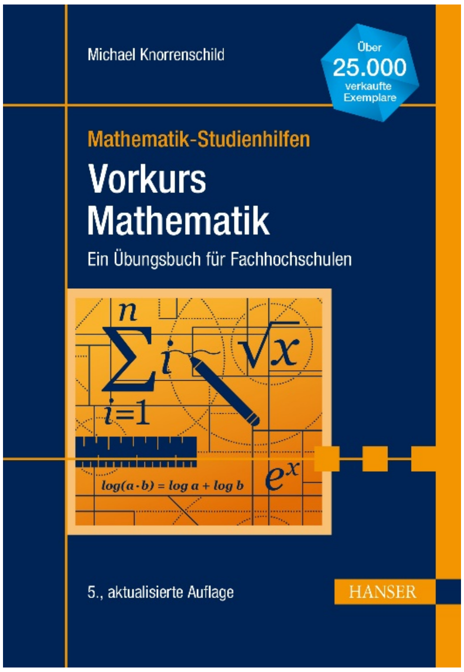
HANSER



Leseprobe

zu

Vorkurs Mathematik

von Michael Knorrenschild

Print-ISBN: 978-3-446-46917-4
E-Book-ISBN: 978-3-446-46955-6

Inhalt

1 Elementares Rechnen **1**

1.1 Die Grundrechenarten 1

1.2 Bruchrechnung 10

1.3 Prozentrechnung 13

1.4 Rechnen mit Potenzen 15

1.5 Summen- und Produktzeichen 16

1.6 Fakultät und Binomialkoeffizienten 19

2 Elementare Strukturen **25**

2.1 Aussagenlogik 25

2.2 Anordnung von Zahlen 32

2.3 Mengenlehre 32

3 Funktionen **37**

3.1 Grundlegendes 37

3.2 Umkehrbarkeit und Monotonie 42

3.3 Komposition von Abbildungen 46

3.4 Translationen, Skalierungen und Spiegelungen 48

3.5 Die Wurzelfunktionen 52

3.6 Polynome 55

3.6.1 Polynome vom Grad 0 56

3.6.2 Polynome vom Grad 1 56

3.6.3 Polynome vom Grad 2 58

3.7 Rationale Funktionen 59
3.8 Die e-Funktion und ihre Umkehrfunktion, der natürliche Logarithmus .. 63
3.8.1 Rechnen mit Logarithmen 65
3.8.2 Logarithmische Skalen 67
3.8.3 Andere Logarithmen als der natürliche 68

4 Lösen von Gleichungen und Ungleichungen 75
4.1 Grundlegendes zu Gleichungen 75
4.2 Lineare Gleichungen 77
4.3 Gleichungen mit Brüchen 78
4.4 Gleichungen mit Beträgen 79
4.5 Quadratische Gleichungen 81
4.6 Gleichungen mit Quadratwurzeln 83
4.7 Bestimmung von Umkehrfunktionen 86
4.8 Weitere Gleichungen 87
4.9 Gleichungssysteme 89
4.10 Textaufgaben 91
4.11 Grundlegendes zu Ungleichungen 94
4.12 Lineare Ungleichungen 96
4.13 Ungleichungen mit Brüchen 97
4.14 Ungleichungen mit Beträgen 98
4.15 Quadratische Ungleichungen 101
4.16 Weitere Ungleichungen 103

5 Ein wenig elementare Geometrie 107
5.1 Rechtwinklige Dreiecke 107
5.2 Kreis und Ellipse 109
5.3 Hyperbeln 111
5.4 Parabeln und Geraden 114
5.5 Die Strahlensätze 116

6 Trigonometrische Funktionen 119
6.1 Trigonometrie am Einheitskreis 119
6.2 Wissenswertes über sin und cos 121

6.3 Schwingungen 125
6.4 Wissenswertes über tan und cot 126
6.5 Die Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen 128

7 Einige Tests 131
7.1 Test Nr. 1 der Fachhochschule Bochum 133
7.2 Test Nr. 2 der Fachhochschule Bochum 135
7.3 Test der Fachhochschule Koblenz 137
7.4 Test Nr. 1 der Hochschule Wismar 138
7.5 Test Nr. 2 der Hochschule Wismar 140

Lösungen 143

Literatur 159

Stichwortverzeichnis 161

Vorwort

In einer großen Anzahl von Studiengängen sehen sich Studienanfänger mit dem Fach Mathematik konfrontiert. Dies löst erfahrungsgemäß unterschiedliche Erwartungshaltungen bei den Betroffenen aus. Während die Bedeutung des Faches gerade in den Ingenieurstudiengängen unumstritten ist, klafft zwischen den Vorkenntnissen der Studienanfänger und dem anfänglichen Niveau der Hochschulmathematik eine immer größer werdende Lücke. Diese hat verschiedene Ursachen, dazu zählen ein verändertes schulisches Lernverhalten und teilweise Mängel in den Rahmenbedingungen für die Grundlagenlehre in den Hochschulen.
Vielfach angebotene Vorkurse der Hochschulen dienen der Auffrischung der Schulmathematik, jedoch wo Schulabgänger Lücken aufweisen, gibt es wenig aufzufrischen, sondern manche Themen erst noch neu zu vermitteln. Das ist in wenigen Wochen vor Beginn des Studiums nicht zu bewerkstelligen, trotz allen Bemühens und guten Willens auf beiden Seiten.
So bleibt es vielfach der Eigeninititative der Studierenden überlassen, sich um das Schließen der Lücken zu kümmern. Zu diesem Zweck gibt es bereits eine Reihe von Vorkurs-Büchern auf dem Markt.
Meiner Erfahrung nach mangelt es Studienanfängern vielfach an Vertrautheit mit elementaren mathematischen Konzepten und an Sattelfestigkeit in der Anwendung mathematischer Techniken. Sind diese Fundamente erst einmal gelegt, bereitet das Verständnis fortgeschrittener mathematischer Konzepte wie Ableitungen und Integrale kaum Probleme.
Ziel dieses Buches ist, elementare mathematische Begriffe und Methoden gründlich zu vermitteln. Es setzt auf eine Kombination von vertieftem Verständnis und Einübung der Techniken an typischen Beispielen. Bewusst wird auf fortgeschrittenere Themen wie Grenzwerte, Differenzial- und Integralrechnung verzichtet. Stattdessen konzentriert es sich auf elementares Rechnen, den Funktionsbegriff, Techniken zum Lösen von Gleichungen und Ungleichungen, elementare Geometrie und Trigonometrie. Dabei handelt es sich um Themen aus dem schulischen Curriculum etwa der

zehnten Klasse – Konzepte, die zum mathematischen Rüstzeug in praktisch allen natur- und ingenieurwissenschaftlichen Studiengängen gehören.
Leserinnen und Leser sollen in diesem Buch angeregt werden, diese Konzepte im Selbststudium zu durchdringen und wirklich Verständnis zu erwerben – im Studium kommt später noch genug auf sie zu, was sie einfach als verkündete Weisheit hinnehmen müssen. Eine solide Grundlage hilft aber enorm bei einem guten Start in die neue Lernumgebung und einem zügigen Vorankommen, auch in anderen Fächern.

Diesem Zweck dienen viele Beispiele und Übungsaufgaben, die so ausgewählt sind, dass typische Problemstellungen abgedeckt werden. Zur Kontrolle gibt es Lösungen am Ende des Buches. Der kritischen Prüfung des eigenen Wissensstands dient eine Auswahl von Eingangstests, die schon von vielen Hochschulen eingesetzt werden, um Studienanfängern die Auseinandersetzung mit eventuell vorhandenen Lücken zu ermöglichen.

In die Darstellungsweise fließen viele Erfahrungen ein, die ich als Lehrender für Studierende der Ingenieurwissenschaften und der Informatik an der Hochschule Bochum gesammelt habe. Die Arbeit mit Studierenden ist für mich ein immerwährender Ansporn, die Darstellung zu verbessern, und ich danke meinen Studierenden für viele gezielt oder unbeabsichtigt gegebene Anregungen, meine Lehrveranstaltungen zu hinterfragen.

Des Weiteren möchte ich mich bei Frau Christine Fritzsch vom Hanser Verlag für die aufmerksame Zusammenarbeit sowie beim Herausgeber Prof. Dr. Bernd Engelmann für fachliche Ratschläge bedanken. Herrn Dr. Thomas Schenk gebührt Dank für die kritische Durchsicht weiter Teile des Manuskripts.

Seit dem Erscheinen 2004 hat dieses Buch eine erfreuliche Aufnahme gefunden und nun ist wiederum eine Neuauflage erforderlich. Für die vorliegende fünfte Auflage wurde das Layout überarbeitet, ansonsten nur geringfügige Änderungen vorgenommen. Für die stets angenehme Zusammenarbeit bei den Neuauflagen danke ich dem Team des Hanser-Verlags. Aus dem Leserkreis wurden mir im Laufe der Jahre einige Fehler mitgeteilt, wofür ich dankbar bin. So konnten diese in Neuauflagen behoben werden. Weitere Hinweise und Anregungen sind jederzeit willkommen.

Bochum, im Januar 2021 Michael Knorrenschild

1 Elementares Rechnen

1.1 Die Grundrechenarten

Die einfachste Verknüpfung zweier Zahlen a und b ist die Addition, das Ergebnis ist die Summe $a+b$. Die Umkehrung der Addition ist die Subtraktion, die zur Differenz $a-b$ führt. Die Subtraktion von b ist nichts anderes als die Addition der „Gegenzahl" $-b$, also

$$a-b=a+(-b)$$

Geht man von den sogenannten „natürlichen Zahlen" $1,2,3,\ldots$ aus, so sind deren Gegenzahlen keine natürlichen Zahlen mehr. Man bezeichnet die natürlichen Zahlen als $\mathbb{N}$. Wenn die Null noch dazu kommt, schreiben wir $\mathbb{N}_0$. Die Zahlen, die durch Addition und Subtraktion natürlicher Zahlen erzeugt werden können, sind die „ganzen Zahlen", symbolisch $\mathbb{Z}$. Die ganzen Zahlen umfassen die natürlichen Zahlen und ihre Gegenzahlen und enthalten auch die Null (die gleich ihrer Gegenzahl ist).
Die Gegenzahl von b kann man auch als das Produkt $(-1)\cdot b$ berechnen. Es ist jedoch keineswegs so, dass $-b$ immer eine negative Zahl ist. Beispielsweise ist zu $b=-3$ die Gegenzahl $-b=-(-3)=3$.
Da die Subtraktion insbesondere also auch eine Addition ist, also keine wirklich neue Operation, werden wir im Folgenden, wenn wir „Addition oder Subtraktion" meinen, einfach nur von „Addition" sprechen. In einer Summe darf man die Reihenfolge der summierten Zahlen („Summanden") vertauschen, das Ergebnis ist davon unabhängig. In einer Differenz ändert sich bei Vertauschung von a und b das Vorzeichen, es gilt:

$$b-a=-(a-b)$$

Die Klammern geben die Reihenfolge der Rechenoperationen vor: In $-(b-a)$ wird zuerst $b-a$ berechnet und dann das Vorzeichen geändert. Würde man hier die Klammern weglassen, so erhielte man $-b-a$, das ist nicht dasselbe wie $-(b-a)=a-b$.

Man kann $b-a$ auch als Summe von b und $-a$ sehen, also $b-a=b+(-a)$; hier darf die Reihenfolge ohne Schaden vertauscht werden und man erhält $b-a=b+(-a)=-a+b$. Wir halten fest:

> Steht vor einer Klammer ein Minus-Zeichen, so müssen beim Auflösen der Klammern die Vorzeichen aller Summanden in der Klammer umgekehrt werden:
>
> $-(x+y)=-x-y,\ -(x-y)=-x+y,\ -(-x-y)=x+y.$ ■

Natürlich können Klammern auch geschachtelt auftreten. Bei Rechnungen per Hand kann man sich dabei die Übersicht erleichtern, indem man verschiedene Sorten Klammern verwendet, etwa (,), [,], {, } usw. Diese Hilfe steht in Programmiersprachen nicht zur Verfügung, daher wollen wir hier auch nur die „runden" Klammern verwenden und Leserin und Leser zu genauem Hinschauen motivieren.

Beispiel 1.1
Lösen Sie die Klammern in $-(a-(b+c-(5-(a+3))))$ auf und vereinfachen Sie soweit wie möglich.

Lösung: Wir lösen zuerst die Klammern auf der innersten Ebene auf:

$$\begin{aligned}-(a-(b+c-(5-(a+3)))) &= -(a-(b+c-(5-a-3)))\\ &= -(a-(b+c-5+a+3))\\ &= -(a-b-c+5-a-3)\\ &= -a+b+c-5+a+3=b+c-2.\end{aligned}$$ ■

Aufgabe

1.1 Lösen Sie in den folgenden Ausdrücken die Klammern auf und vereinfachen Sie soweit wie möglich.

a) $b-(a+2-(c+d-(3-a))+b)$
b) $c+(-3-d-(-(-4-b))-c-(d-2))$
c) $-(b+a-(c-3-d+b-(a+c+b-d)))$
d) $a+c-(d+a+2-(b+c-(-d+c)))$

Wir erkennen also:

> Klammern dienen nicht der Zierde, auch nicht vorrangig der Übersicht, sondern stellen eine nicht vernachlässigbare Information über die Reihenfolge von Rechenoperationen dar. ■

In der Mathematik ist man bestrebt, Formeln möglichst kurz und bündig zu schreiben. Für wiederholte Additionen desselben Summanden hat man daher die Multiplikation zur Verfügung. So schreibt man beispielsweise anstelle von $a+a+a+a+a$ einfach das Produkt $5 \cdot a$, oder noch kürzer $5\,a$. Die Umkehrung der Multiplikation ist die Division. Da die Division nichts anderes als die Multiplikation mit dem Kehrwert ist, also keine wirklich neue Operation, werden wir im Folgenden, wenn wir „Multiplikation oder Division“ meinen, einfach nur von „Multiplikation“ reden. Bei der Division ist eine Ausnahme zu beachten: Durch 0 kann nicht dividiert werden: Für *jedes* a gilt $0 \cdot a = 0$; für eine Umkehrung müssten wir das Produkt durch 0 dividieren und wieder a erhalten. Im Produkt 0 ist aber nicht mehr erkennbar, ob diese 0 aus $5 \cdot 0$, $6 \cdot 0$, oder wo auch immer herstammt, sodass eine Umkehrung nicht möglich ist. Das Ergebnis einer Division $a : b$, der sog. Quotient, wird meist als Bruch geschrieben: $a : b = \frac{a}{b}$ (natürlich muss $b \neq 0$ sein). Dabei heißt a der Zähler und b der Nenner des Bruches $\frac{a}{b}$.

Wir halten also fest:

> **!** Die Multiplikation ist eine Abkürzung der Addition.
> Niemals(!!!) darf durch 0 dividiert werden.
> Bei Brüchen darf nie 0 im Nenner auftauchen. ■

Der Quotient zweier ganzer Zahlen muss keine ganze Zahl mehr sein. Man bezeichnet die Menge aller Zahlen, die als Quotient zweier ganzer Zahlen dargestellt werden können, als „rationale Zahlen“, symbolisch $\mathbb{Q}$.

Einen Bruch aus zwei ganzen Zahlen kann man alternativ auch als *Dezimalzahl* schreiben. Dazu dividiert man Zähler durch Nenner fortlaufend mit Rest, wie man es in der Grundschule gelernt hat, und erhält beispielsweise:

$$\frac{78}{125} = 78 : 125 = 0 \cdot 1 + 6 \cdot \frac{1}{10} + 2 \cdot \frac{1}{100} + 4 \cdot \frac{1}{1000} = 0.624$$

$$\frac{1}{9} = 1 : 9 = 0 \cdot 1 + 1 \cdot \frac{1}{10} + 1 \cdot \frac{1}{100} + 1 \cdot \frac{1}{1000} + \ldots = 0.111111\ldots = 0.\overline{1}$$

$$\begin{aligned}\frac{37}{33} &= 37 : 33 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot \frac{1}{10} + 2 \cdot \frac{1}{100} + 1 \cdot \frac{1}{1000} + 2 \cdot \frac{1}{10000} + \ldots \\ &= 1.12121212\ldots = 1.\overline{12}\end{aligned}$$

Diese Rechnung findet im 10er-System (Dezimalsystem) statt, d. h. man verwendet nur die Ziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Man beachte den Unterschied zwischen *Ziffer* und *Zahl*: Eine Zahl besteht aus Ziffern gerade so wie ein Wort aus Buchstaben besteht. Die rationalen Zahlen besitzen eine abbrechende Dezimaldarstellung (Beispiel: $\frac{78}{125}$) oder eine periodische Dezimaldarstellung (Beispiel: $\frac{37}{33}, \frac{1}{9}$). Aus der Dezimaldarstellung von $\frac{1}{9}$ sehen wir übrigens, dass $\frac{9}{9} = 0.9999\ldots = 0.\overline{9}$; man kann also $1 = \frac{9}{9}$ auch als $1 = 0.\overline{9}$ darstellen[1].

Es gibt auch Zahlen mit nicht-periodischer, nicht-abbrechender Dezimaldarstellung, z. B. $\pi = 3.141592654\ldots$ Diese Zahlen können also nicht rational sein, sie werden daher *irrational* genannt. Man bezeichnet die Menge aller Zahlen mit abbrechender oder nicht-abbrechender Dezimaldarstellung als die *reellen Zahlen*, symbolisch $\mathbb{R}$. Die Menge der nicht-negativen reellen Zahlen wird mit $\mathbb{R}_+$ bezeichnet.

Aus verschiedenen Gründen gibt man oft Dezimalzahlen nicht mit allen Ziffern hinter dem Komma an, sondern nur mit einer begrenzten Anzahl. Dabei verwendet man *Rundung*.

Rundungsregeln:
Ist die erste weggelassene Ziffer $0, 1, 2, 3$ oder 4, so bleibt die letzte geschriebene Ziffer unverändert („Abrunden").
Ist die erste weggelassene Ziffer $5, 6, 7, 8$ oder 9, so wird die letzte geschriebene Ziffer um 1 erhöht („Aufrunden").

Beispiele:

$$\begin{aligned}
&\pi \text{ auf 2 Stellen nach dem Komma gerundet:} && \pi = 3.141592\ldots \approx 3.14\\
&\pi \text{ auf 3 Stellen nach dem Komma gerundet:} && \pi = 3.141592\ldots \approx 3.142\\
&\pi \text{ auf 4 Stellen nach dem Komma gerundet:} && \pi = 3.141592\ldots \approx 3.1416
\end{aligned}$$

Wer Genaueres über die dabei entstehenden Abweichungen wissen möchte, sei z. B. auf [3] verwiesen.

Nach diesem Exkurs über Dezimalzahlen wenden wir uns wieder den Grundrechenarten und ihren Regeln zu.

Da die Multiplikation quasi relativ zur Addition eine höhergestellte Operation ist, vereinbart man, um Klammern zu sparen, dass die Multiplikation stärker bindet als die Addition, kurz „Punktrechnung geht vor Strichrechnung". Es gilt also $a \cdot b + c = (a \cdot b) + c \neq a \cdot (b + c)$. Wiederum erkennt man, dass das Weglassen von Klammern die Bedeutung eines Ausdrucks ändert.
Oft spart man sich bei Produkten auch den Punkt zwischen den Faktoren; man schreibt also beispielsweise anstelle von $x \cdot y$ einfach xy. Dabei gibt es jedoch eine Situation, in der es zu Missverständnissen kommen kann: Ist nämlich ein Faktor eine Zahl, und der andere Faktor ein Bruch, so würde man anstelle von, sagen wir $2 \cdot \frac{1}{2}$, gemäß der erwähnten Konvention $2\frac{1}{2}$ schreiben. Damit entsteht aber ein Gebilde,

[1] Eine beliebte Streitfrage unter Möchtegernmathematikern ist, ob $0.\overline{9}$ vielleicht doch nicht gleich 1 sei, sondern eine andere Zahl, die nur eine Winzigkeit kleiner als 1 ist.

das aussieht wie ein gemischter Bruch, nämlich wie zweieinhalb, also 2.5, wogegen $2 \cdot \frac{1}{2}$ aber nichts anderes als 1 ist. Um das Problem zu umgehen, empfiehlt es sich, im Zusammenhang mit Mathematik auf gemischte Brüche konsequent zu verzichten – wie wir es in diesem Buch tun werden. Im Alltag sind gemischte Brüche allerdings verbreitet („Ich hätte gerne zweieinhalb Kilo Kartoffeln"), dort sollte man sie auch belassen.

Treten Multiplikation und Addition gemeinsam in einem Ausdruck auf, so ist das Distributivgesetz zu beachten:

$$\boxed{a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c}$$

Es ist also beispielsweise

$$5 \cdot (3 + 7) = 5 \cdot 3 + 5 \cdot 7, \qquad \text{Punkt- vor Strichrechnung}$$

wovon man sich durch Nachrechnen überzeugen sollte. Außerdem ist natürlich

$$5 \cdot (3 + 7) \neq 5 \cdot 3 + 7.$$

Tatsächlich, die Klammern dürfen also nicht weggelassen werden!
Die Anwendung des Distributivgesetzes in der obigen Form bezeichnet man auch schlicht als „Ausmultiplizieren".
Man muss jedoch auch in der Lage sein, das Distributivgesetz von rechts nach links anzuwenden.

$$\boxed{a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c)}$$

Diesen Vorgang nennt man auch „Ausklammern", also beispielsweise:

$$5 \cdot 3 + 5 \cdot 7 = 5 \cdot (3 + 7).$$

Hier wird der gemeinsame Faktor 5 ausgeklammert. Um auszuklammern, ist – außer der Kenntnis des Distributivgesetzes – erforderlich, dass man den gemeinsamen Faktor, in diesem Fall 5, erkennt. Für das Erkennen solcher Merkmale in Ausdrücken gibt es keine Regeln; dies ist eine Erfahrungssache, also ist hier Üben, Üben, Üben angesagt.

Will man die für ein Ingenieurstudium nötigen Rechenfertigkeiten erwerben, so ist Folgendes nützlich zu wissen:

> **!** Ebensowenig wie man Klavierspielen durch häufigen Besuch von Klavierkonzerten erlernt, lernt man Rechnen durch Lesen von Mathematik–Büchern (auch nicht von diesem Buch!) oder durch Besuch von Vorlesungen. ■

Bestehen in einem Produkt beide Faktoren aus einer Summe, so gilt:

$$\boxed{(a + b) \cdot (c + d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d}$$

In Worten, es ist jeder Summand des einen Faktors mit jedem Summanden des anderen Faktors zu multiplizieren und alle entstehenden Produkte sind zu addieren. Man sollte auch üben, solche Sätze sprachlich und inhaltlich zu erfassen; dann erkennt man, welche enormen Vorteile die Kürze und Präzision der Formelsprache bietet.

Aufgabe

1.2 Multiplizieren Sie die folgenden Ausdrücke aus und fassen Sie so weit wie möglich zusammen.

a) $a(c+b)-c(b+a)+b(c-a)$

b) $a(c+b(a-c))-c(b(a-1)+a)-b(c-a(b-a))$

c) $(a+b)(a-c)-(a-b)(b+c)$

d) $(a+b-c)(a+c)-(a-c)(b+a+c)$

e) $(a+b)(a-c(b-c))-(a-b(c-a))(b-c)$

f) $(a+b-c)(a+c-b)+(a-c-b)(b+a+c)$

Spätestens jetzt kommen uns natürlich die bekannten binomischen Formeln in den Sinn, die übrigens, entgegen anders lautenden Gerüchten, nicht nach einem Mathematiker namens Binomi benannt sind. Vielmehr heißen sie so, weil sie aus zwei („bi“) Ausdrücken zusammengesetzt sind.

Binomische Formeln

Für alle a, b gilt:

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$$
$$(a+b)(a-b) = a^2-b^2$$

■

Auf die drei binomischen Formeln wird oft auch als erste bzw. zweite bzw. dritte binomische Formel Bezug genommen.

Beispiel 1.2
Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke so weit wie möglich unter Verwendung der binomischen Formeln.

$$(a+2b)^2+(2b-a)(2b+a) \text{ und } (a+b+c)(a+c-b)$$

Lösung: Im ersten Ausdruck warten die erste und die dritte binomische Formel auf Anwendung:
$(a+2b)^2+(2b-a)(2b+a) = a^2+2\cdot 2ab+(2b)^2+(2b)^2-a^2 = 4ab+8b^2$.
Sicherheitshalber weisen wir ausdrücklich darauf hin, dass wir hier die Regel $(2b)^2 = 2b2b = 4b^2$ verwendet haben.
Wenn wir im zweiten Ausdruck erkennen, dass

$$(a+b+c)(a+c-b) = ((a+c)+b))((a+c)-b)$$

ist, so können wir zunächst die dritte und anschließend die erste binomische Formel anwenden:
$(a+b+c)(a+c-b) = ((a+c)+b)((a+c)-b) = (a+c)^2 - b^2 = a^2 + 2ac + c^2 - b^2$.
Es ist eine große Erleichterung, wenn man so geübt ist, dass man sofort erkennt, wenn man durch geringfügige Umstellungen binomische Formeln anwenden kann.

■

Aufgabe

1.3 Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke so weit wie möglich unter Verwendung der binomischen Formeln.

a) $(2a+b)(2a-b)+(c+b)(c-b)$

b) $(a+b+c)(-a+b+c)+(2c+b-a)^2-2(b+c)^2$

c) $(b-a)(a+b)+(c+b-a)(c-b-a)-(b-c)^2$

d) $(2b-3a)(3a-2b)-(2a-b)^2$

Natürlich kann man auch die binomischen Formeln von rechts nach links lesen und auf diese Weise anwenden. Dadurch kann man in manchen Fällen einen Ausdruck vollständig in Faktoren zerlegen.

Beispiel 1.3
Zerlegen Sie die Ausdrücke $16a^2 - 25b^2$ und $4a^2 + 12ab + 9b^2$ mithilfe der binomischen Formeln in Faktoren.

Lösung: $16a^2 - 25b^2 = (4a)^2 - (5b)^2 = (4a+5b)(4a-5b)$
$4a^2 + 12ab + 9b^2 = (2a)^2 + 2\cdot(2a)\cdot(3b) + (3b)^2 = (2a+3b)^2$. ■

Aufgabe

1.4 Zerlegen Sie die folgenden Ausdrücke mithilfe der binomischen Formeln in Faktoren.

a) $4a^2 + 20ab + 25b^2$ b) $169x^2 - 312xy + 144y^2$

c) $x^2 + 2xy + y^2 - 9z^2$ d) $x^2 + 6xz - y^2 + 9z^2$

Oft lassen sich Ausdrücke mithilfe der binomischen Formeln nicht vollständig in Faktoren zerlegen, sondern beispielsweise nur in ein Quadrat plus einen restlichen Ausdruck. Dies ist in vielerlei Hinsicht sehr nützlich, wie wir später noch sehen werden. Es kommt dabei darauf an, den Anfang einer binomischen Formel (von rechts nach links gelesen!) zu erkennen und den fehlenden Ausdruck zu ergänzen, um ein vollständiges Quadrat zu erhalten. Daher wird diese Methode auch „quadratische Ergänzung“ genannt.

Beispiel 1.4
Schreiben Sie den Ausdruck $4\,a^2+24\,a\,b+9\,b^2$ mit der quadratischen Ergänzung um.

Lösung: Offensichtlich handelt es sich nicht um ein komplettes Binom (denn dazu müsste der mittlere Ausdruck ja $2\cdot(2\,a)\,(3\,b) = 12\,a\,b$ lauten). Der vorgegebene Ausdruck soll nun in der Form des Ansatzes $(2\,a + c)^2 + d\,b^2$ geschrieben werden, mit passenden Termen c und d. Vergleicht man dieses mit dem gegebenen Ausdruck, so sieht man, dass der „gemischte Ausdruck" $24\,a\,b$ offensichtlich gleich dem gemischten Ausdruck im Ansatz sein muss, also $24\,a\,b = 2\cdot(2\,a)\,c$, was auf $c = 6\,b$ führt. Damit haben wir:

$$\begin{aligned}4\,a^2+24\,a\,b+9\,b^2 &= (2\,a)^2+2\cdot(2\,a)\cdot(6\,b)+9\,b^2\\ &= (2\,a)^2+2\cdot(2\,a)\cdot(6\,b)+(6\,b)^2-(6\,b)^2+9\,b^2\\ &= (2\,a+6\,b)^2-27\,b^2.\end{aligned}$$

Man kann natürlich das Ganze auch von hinten aufzäumen und passend zu $9\,b^2$ quadratisch ergänzen:

$$\begin{aligned}9\,b^2+24\,a\,b+4\,a^2 &= (3\,b)^2+2\cdot(3\,b)\cdot(4\,a)+4\,a^2\\ &= (3\,b)^2+2\cdot(3\,b)\cdot(4\,a)+(4\,a)^2-(4\,a)^2+4\,a^2\\ &= (3\,b+4\,a)^2-12\,a^2.\end{aligned}$$

Eine weitere Variante ist $4\,a^2+24\,a\,b+9\,b^2 = (2\,a+3\,b)^2+12\,a\,b$. Alle drei sind legitime quadratische Ergänzungen. Welche davon in einer konkreten Anwendung geeigneter ist, hängt vom Zusammenhang ab. Man sollte daher alle Möglichkeiten im Auge behalten – es ist eine Illusion anzunehmen, dass in Anwendungen die Ausdrücke schön von links nach rechts so angeordnet auftauchen, dass die zweckmäßigste links steht. ∎

Aufgabe

1.5 Schreiben Sie die folgenden Ausdrücke mit der quadratischen Ergänzung jeweils auf zwei verschiedene Weisen um. Überprüfen Sie Ihr Ergebnis durch Ausmultiplizieren.

a) $64\,x^2+112\,x+64$ b) $4\,x^2-36\,x\,y+36\,y^2$

c) $16\,x^2-56\,x\,y+196\,y^2$ d) $16\,x^2-40\,x\,y+100\,y^2$

Wir haben oben bereits Ausdrücke, die aus binomischen Formeln stammen, vollständig in Faktoren zerlegt. Das vollständige Zerlegen eines Ausdrucks nennt man auch „Faktorisieren". In vielen Situationen ist das Faktorisieren von Ausdrücken sehr nützlich; einige Anwendungen findet man in Kapitel 4.

Wir wollen hier noch einen einfachen Fall genauer betrachten, nämlich den von Ausdrücken der Form $x^2 + a\,x + b$. Hier gilt:

$$\boxed{(x+p)\,(x+q) = x^2 + (p+q)\,x + p\,q}$$

Will man einen vorgegebenen Ausdruck $x^2 + a\,x + b$ faktorisieren, so muss man also zwei Zahlen p und q finden, sodass $p + q = a$ und $p\,q = b$ ist. Dies ist eine nützliche Erkenntnis, denn wenn man aus irgendeinem Grund p schon kennt, so erhält man q natürlich sofort über $q = a - p$ (oder genauso schnell über $q = \frac{b}{p}$, falls $p \neq 0$). Kennt man zunächst weder p noch q, weiß aber, dass p und q ganze Zahlen sind, so findet man oft p und q durch schlichtes Raten.

Satz von Vieta[2]

$x^2 + a\,x + b = (x+p)\,(x+q)$ ist dann und nur dann für alle x erfüllt, wenn $a = p + q$ und $b = p\,q$ gilt. ∎

Beispiel 1.5
a) Faktorisieren Sie $x^2 + 29.5\,x + 91$, wobei $p = 26$ gegeben ist.
b) Faktorisieren Sie $x^2 - 7\,x + 12$, wenn Sie wissen, dass p und q ganze Zahlen sind.

Lösung: a) Wie wir gesehen haben, muss $p + q = 29.5$ gelten; da $p = 26$ bekannt ist, muss also $q = 3.5$ sein. Die gesuchte Faktorisierung lautet damit $x^2 + 29.5\,x + 91 = (x+26)\,(x+3.5)$. – Ein anderer Weg: Wie wir gesehen haben, muss $p\,q = 91$ gelten; da $p = 26$ bekannt ist, muss also $q = 91/26 = 3.5$ sein. Je nachdem wie „krumm" die Zahlen sind, kann man also selbst entscheiden, ob man lieber dividieren oder subtrahieren möchte.
b) Es gilt also $p\,q = 12$. Da p und q ganze Zahlen sind, gibt es nur die Möglichkeiten $12 = 1 \cdot 12 = 2 \cdot 6 = 3 \cdot 4 = (-1) \cdot (-12) = (-2) \cdot (-6) = (-3) \cdot (-4)$. Noch einmal soviele Möglichkeiten erhält man, wenn man die Rollen von p und q vertauscht – die Zerlegung ergibt damit aber keine neuen Faktoren, sondern wieder dieselben in anderer Reihenfolge. Außerdem muss noch $p + q = -7$ gelten, dies ist nur mit der Wahl $p = -3$, $q = -4$ (oder umgekehrt) möglich. Die gesuchte Faktorisierung lautet damit $x^2 - 7\,x + 12 = (x-3)\,(x-4)$. ∎

[2] Vieta, eigentlich François Viète, 1540-1603, franz. Jurist und Freizeitmathematiker

Stichwortverzeichnis

A
Abbildung → Funktion
Abrunden 4
Absolutbetrag 41
Additionstheorem
– für sin und cos 124
– für tan 127
äquivalent 26
Amplitude 125
arccos 129
arccot 129
arcsin 128
arctan 129
Asymptoten 112
Aufrunden 4
Aussage 25
– Regeln 28
– Verknüpfungen 26
Aussageform 25
– Quantifizierung 30

B
Behauptung 29
Betrag
– Definition 41
– Rechenregeln 80
Beweis 29
– indirekter 29
Bildmenge 38
Binomial
– -koeffizient 19
– -satz 22
Binomische Formeln 6
Bogenmaß 119
Bruchrechnung 10

C
cos 120
cot 120, 127

D
Definitionsbereich 38
Dezibel 70
Dezimalzahl 3
Distributivgesetz 5
Doppelbrüche 12
Dreieck, Pascal'sches 21
Dreiecksungleichung 80

E
e-Funktion 63
Einheitskreis 109
Element 32
Ellipse 110
– Mittelpunktsgleichung 111
Ergänzung, quadratische 7
Erweitern 10
Euler'sche Zahl 64

F
Faktorisieren 8
Fakultät 19

Folgerung 27
Funktion 38
– ganzrationale 55
– gebrochenrationale 59
– gerade 51
– lineare 57
– monoton fallende 45
– monoton steigende 45
– periodische 123
– rationale 59
– streng monoton fallende 45
– streng monoton steigende 45
– trigonometrische 121
– ungerade 51
Funktionswert 38

G
Gefälle 129
Gegenzahl 1
Gerade 56
Gleichung 75
– lineare 77
– mit Beträgen 79
– mit Brüchen 78
– mit Wurzeln 83
– quadratische 81
– weitere 87
Gleichungssystem 89
Goldener Schnitt 93
Graph einer Funktion 40

H
Halbachsen 110
Halbwertszeit 71
Hertz 125
hinreichend 26
Hyperbel 111
– Mittelpunktsgleichung 111
Hypotenuse 107

I
Implikation 27
Indexverschiebung 18
Intervalle 35

K
Katheten 107
Klavierkonzert 5
Kombinatorik 20
Komposition 47
Kreisfrequenz 125
Kreisgleichung 111
Kürzen 10

L
lg 69
ln 65
log 68
Logarithmus
– allgemein 68
– dekadischer 69
– dualer 69
– natürlicher 65
– Rechenregeln 66

M
Mächtigkeit 33
Menge 32
– leere 32
Mittelpunktsgleichung
– der Ellipse 111
– der Hyperbel 111
– des Kreises 111
Monotonie von Funktionen 45

N
Negation 26
Nenner 3
notwendig 26
Nullpolynom 56
Nullstelle 75

O
Oder, logisches 26

P
p-q-Formel 81
Parabel 58, 114
– Scheitelgleichung 115
Pascal'sches Dreieck 21

periodische Funktion 123
Pfeildiagramm 38
pH-Wert 72
Phasenwinkel 125
Polynom 55
– -division 60
– Koeffizienten 55
Polynomfunktion 55
Potenzen 15
Potenzmenge 34
Potenzrechenregeln 15
Probe 76
Produktzeichen 18
Promille 13
proportional 57
Proportionalitätskonstante 57
Prozentrechnung 13
Pythagoras 108

Q
Quantifizierung 30

R
Radikand 52
Rechenregeln
– für Betrag 80
– für Gleichungen 77
– für Logarithmen 66
– für Potenzen 15
– für Ungleichungen 94, 95
Regeln für Aussagen 28
rekursiv 20
Richter-Skala 72
Rundung 4

S
Satz des Pythagoras 108, 121
Satz von Vieta 9
Scheitelgleichung 115
Scheitelpunkt 58, 115
Schnitt, Goldener 93
Schnittpunkt 91
Schwingung 125
sin 120
Skalierung 48
Spiegelung 50
Steigung 56
Steigungsdreieck 56
Strahlensätze 117
Summenzeichen 16

T
tan 120, 127
Teilmenge 32
Textaufgaben 91
Translation 48

U
umkehrbar 42
Umkehrfunktion 42
– Bestimmung 86
Und, logisches 26
Ungleichung 94
– mit Beträgen 98
– quadratische 101
– weitere 103

V
Variable 38
Verschiebung 48
Vieta, Satz von 9
Voraussetzung 29

W
Wachstum, exponentielles 64
Wachstumsrate 71
Wahrheitstafel 27
Wertebereich 38
Winkelfunktionen 121
Winkelhalbierende 56
Wurzel 52
Wurzelfunktion 52

Z
Zähler 3
Zahl, Euler'sche 64
Zahlen
– ganze 1
– irrationale 4
– natürliche 1

– rationale 3
– reelle 4
Zahlengerade 32
Zahlenstrahl 32
Zerfallsrate 71
Ziffer 3