

# HANSER



## Leseprobe

zu

# Technische Mechanik für Technomathematik und Physikalische Ingenieurwissenschaft

von Wolfgang H. Müller et al.

Print-ISBN: 978-3-446-46271-7

E-Book-ISBN: 978-3-446-46611-1

Weitere Informationen und Bestellungen unter

<https://www.hanser-kundencenter.de/fachbuch/artikel/9783446462717>

sowie im Buchhandel

© Carl Hanser Verlag, München

# Vorwort

*Everything You Always Wanted to Know About Sex\**  
(\*But Were Afraid to Ask)

Woody Allen

Mit diesem Buch verbinde ich ein spezielles persönliches Anliegen. Üblicherweise werden die Vorlesungen über Technische Mechanik für die Anfangssemester „ingenieurfreundlich“ gelesen, d. h. man vermeidet es tunlichst, fortgeschrittene Kapitel der Höheren Mathematik zu verwenden und erklärt Sachverhalte gerne anschaulich, sozusagen auf der Rückseite des Briefumschlags, da man doch technisch orientiert ist und sich mit abstrusen Formalismen ungern aufhält. Kurz gesagt, man gesteht sich nicht ein, dass es Dinge gibt, mit denen man eventuell Schwierigkeiten hat, sie zu verstehen und zu meistern. Das ist nur allzu menschlich. Nun gibt es jedoch auch Menschen, denen es daran liegt, hinter die Kulissen zu schauen und denen es Freude macht, in voller Tiefe zu begreifen, warum ein Sachverhalt so ist, wie man ihn darstellt, so phantastisch dieser Wunsch auch klingen mag.

Um ein Beispiel zu geben: Das Prinzip der virtuellen Arbeit kann man einführen, ohne den Begriff der Variation zu verwenden und Grundbegriffe der Funktionalanalysis zu kennen. Man wundert sich zwar anfangs darüber, was eine virtuelle Verrückung ist und warum diese mit  $\delta u$  bezeichnet wird, aber mit der Zeit gewöhnt man sich auch daran. Ich würde soweit gehen, festzustellen, dass Personen existieren, die vollauf damit zufrieden sind, etwas anwenden zu können, ohne zu verstehen, warum es funktioniert, und die auch gerne glauben, dass die Energie eines Systems schon extremal werden wird. Irgendein Gott wird es bestimmt so eingerichtet haben! Es gibt sogar Menschen, die wollen nicht einmal anwenden, sondern eigentlich viel lieber gar nichts tun. Aber wie gesagt . . . , es gibt auch andere, die nicht so sind. Und für diese ist dieses Buch geschrieben.

Nichtsdestoweniger, man muss beide Welten kennen! Und so empfehle ich Studierenden der Physikalischen Ingenieurwissenschaft oder der Technomathematik auch das mit dem Kollegen Ferber entstandene, ebenfalls im Hanser-Verlag erschienene Fachbuch *Technische Mechanik für Ingenieure* parallel zu lesen<sup>†</sup>, ja, das vorliegende Buch vielleicht eher als Ergänzung zu begreifen, denn schließlich geht es letztendlich darum, Prüfungen in Echtzeit zu bestehen. Und die Prüfungen drehen sich um die Pflicht und nicht um die Kür.

Zu diesem Buch haben viele Studierende und Mitglieder unserer Fachgruppe direkt bzw. zumindest indirekt beigetragen. Zwei Mitgliedern der Fachgruppe aber gilt für ihre umfangreiche Arbeit besonderer Dank, nämlich den Herren Sebastian Glane und Wilhelm Rickert. Deshalb erscheinen sie auch im Cover und tragen Verantwortung für das hier Gesagte.

In diesem Sinne *per aspera ad astra!*

Berlin, im Juli 2020

Wolfgang H. Müller

<sup>†</sup> oder andere im Verzeichnis angegebene Ingenieurliteratur über Technische Mechanik

URL der Internetseite der Verfasser:

(<https://www.lkm.tu-berlin.de/menue/home/>)

URL der Internetseite der Verfasser zum Grundkurs der Mechanik:

([https://www.lkm.tu-berlin.de/menue/studium\\_und\\_lehre/lehrangebot/](https://www.lkm.tu-berlin.de/menue/studium_und_lehre/lehrangebot/))

# Inhalt

Abbildungsverzeichnis .....	11
<b>1 Statik .....</b>	<b>17</b>
1.1 Eine Vorbemerkung zur Gliederung der Technischen Mechanik .....	17
1.2 Mechanische Grundbegriffe .....	17
1.2.1 Masse, Zeit und Länge .....	18
1.2.2 Kraftbegriff .....	19
1.2.3 Einteilung der Kräfte .....	21
1.2.4 Momentenbegriff .....	24
1.3 Die Grundgleichungen der Statik .....	29
1.4 Der Schwerpunkt .....	35
1.4.1 Eine Vorbemerkung .....	35
1.4.2 Der Begriff des dreidimensionalen Schwerpunktes .....	36
1.4.3 Flächen- und Linienzentren .....	37
1.5 Trag- und Fachwerke .....	46
1.5.1 Vorbemerkungen zur Lagerung und idealisierte Lagertypen .....	46
1.5.2 Fachwerke .....	50
1.5.2.1 Begriffsbildung .....	50
1.5.2.2 Das Knotenpunktverfahren .....	52
1.5.2.3 Der Rittersche Schnitt .....	55
1.5.3 Tragwerke .....	58
1.6 Der biegesteife Träger .....	62
1.6.1 Begriffsbildung .....	62
1.6.2 Schnittgrößen .....	63
1.6.3 Schnittgrößendifferentialgleichungen (gerader Balken) .....	66
1.6.4 Schnittlasten an Rahmen .....	78
1.6.5 Bogen in der Ebene .....	88
1.6.6 Schnittgrößendifferentialgleichungen am Bogen .....	89
1.7 Reibungsphänomene .....	101
1.7.1 Begriffsbildung: Haften und Gleiten, Coulombsche Reibung .....	102
1.7.2 Kraft- und Momentengleichgewicht an der schiefen Ebene .....	104
1.7.3 Umschlingungsreibung .....	107
Literatur .....	111

<b>2</b>	<b>Festigkeitslehre</b> .....	<b>112</b>
2.1	Festigkeitslehre – warum? .....	112
2.2	Wichtige Belastungs- und Verformungsarten – Phänomenologie .....	113
2.3	Mechanische Spannungen .....	114
2.3.1	Erste Begriffsklärungen .....	114
2.3.2	Der Spannungstensor .....	118
2.3.3	Impulsbilanz der Statik .....	124
2.3.4	Momentengleichgewicht .....	126
2.4	Dehnungen .....	133
2.5	Hookesches Gesetz .....	137
2.6	Lamé–Navier–Gleichungen .....	139
2.7	Der Zug-/Druckstab .....	140
2.8	Reine Biegung .....	152
2.9	Reine Scherung .....	166
2.10	Querkraftbiegung .....	168
2.11	Die Biegeliniendifferentialgleichung .....	177
2.12	Schiefe Biegung .....	192
2.13	Torsion .....	197
2.13.1	Torsion des Kreisprofils .....	198
2.13.2	Torsion dünnwandiger geschlossener Profile .....	205
2.14	Biegespannungsformel für den gekrümmten Träger .....	208
2.15	Festigkeitsnachweis .....	210
	Literatur .....	219
<b>3</b>	<b>Bewegungslehre</b> .....	<b>220</b>
3.1	Begriffe der Bewegungslehre .....	220
3.2	Bewegung eines Massenpunktes .....	221
3.2.1	Kinematik .....	221
3.2.1.1	Kartesische Basis .....	223
3.2.1.2	Polar- und Zylinderkoordinatenbasis .....	224
3.2.1.3	Natürliche Basis .....	225
3.2.2	Kinetik .....	228
3.2.3	Energie- und Arbeitssatz .....	232
3.2.4	Drehimpuls und Drallsatz .....	234
3.3	Bewegung von Massenpunktsystemen .....	236
3.3.1	Kinematik .....	236
3.3.2	Kinetik .....	237
3.3.3	Impuls- und Schwerpunktsatz .....	238

3.3.4	Energie- und Arbeitssatz .....	239
3.3.5	Drehimpuls und Drallsatz.....	241
3.4	Der starre Körper .....	242
3.4.1	Begriffsbildung .....	242
3.4.2	Kinematik .....	243
3.4.3	Kinetische Vorbemerkungen I: Der lineare Impuls .....	257
3.4.4	Impuls- und Schwerpunktsatz .....	258
3.4.5	Energie- und Arbeitssatz .....	261
3.4.6	Kinetische Vorbemerkungen II: Der Drehimpuls .....	265
3.4.7	Drallsatz .....	266
3.4.8	Die Eulerschen Kreiselgleichungen.....	270
	Literatur.....	276
<b>4</b>	<b>Kontinuumsmechanik .....</b>	<b>277</b>
4.1	Einführung .....	277
4.1.1	Was ist Kontinuumsmechanik?.....	277
4.1.2	Das Ziel der Kontinuumsmechanik.....	278
4.2	Feldformulierungsmöglichkeiten .....	279
4.2.1	Eulersche Beschreibungsweise .....	279
4.2.2	Transporttheorem in Eulerscher Beschreibungsweise .....	280
4.2.3	Materielle (Lagrangesche) Beschreibungsweise .....	284
4.2.4	Transporttheorem in materieller Beschreibungsweise .....	285
4.3	Bilanzgleichungen.....	286
4.3.1	Allgemeine globale Form .....	286
4.3.2	Allgemeine lokale Form in regulären Punkten .....	287
4.3.3	Bilanzen der Masse .....	289
4.3.4	Bilanzen des Impulses .....	293
4.4	Einfache Materialgleichungen .....	299
4.4.1	Die Notwendigkeit von Materialgleichungen .....	299
4.4.2	Das Euler-Fluid .....	300
4.4.3	Das Navier-Stokes-Fluid.....	305
4.4.4	Der Hookesche Festkörper und Ausbreitung elastischer Wellen .....	315
4.5	Beobachterwechsel.....	317
4.5.1	Grundbegriffe .....	317
4.5.2	Kinematik Euklidischer Transformationen .....	319
4.5.3	Kinematik von Galileitransformationen .....	324
4.5.4	Anwendungen Euklidischer Transformationen .....	324
4.5.5	Die Massenbilanz bei Beobachterwechsel.....	329

4.5.6	Die Impulsbilanz bei Beobachterwechsel .....	330
4.5.7	Materialgleichungen bei Beobachterwechsel .....	331
	Literatur .....	332
<b>5</b>	<b>Energiemethoden .....</b>	<b>334</b>
5.1	Bilanzen der thermo-mechanischen Energien .....	334
5.1.1	Bilanz der kinetischen Energie .....	334
5.1.2	Bilanz der Gesamtenergie .....	335
5.1.3	Bilanz der inneren Energie, 1. Hauptsatz .....	337
5.2	Bilanz der Entropie, 2. Hauptsatz .....	339
5.3	Auswertung der Entropieungleichung .....	340
5.3.1	Der Fall des linear elastischen Festkörpers .....	340
5.3.2	Der Fall der Navier-Stokes-Fourier-Flüssigkeit .....	343
5.4	Die Formänderungsenergie-dichte und ihr Komplement .....	345
5.5	Die Sätze von Castigliano im Kontinuum .....	347
5.6	Darstellungssätze für die freie Energiedichte .....	347
5.7	Die Formänderungsenergie-dichte .....	350
5.8	Die Formänderungsenergie des Balkens .....	351
5.9	Die Sätze von Castigliano im Diskreten .....	354
5.10	Motivation der Extremierung von Energiefunktionalen .....	363
5.11	Einführung in die Variationsrechnung .....	364
5.12	Prinzip der virtuellen Verrückungen .....	367
5.13	Spezialfälle des PdvV .....	371
5.14	PdvV in der Starrkörperkinetik .....	372
5.15	PdvV für gerade linear-elastische Balken .....	374
5.16	Prinzip der virtuellen Kräfte .....	375
5.17	Spezialfälle des PdvK insbesondere angewandt auf Balken .....	376
5.18	Das Prinzip der geringsten Wirkung .....	380
5.19	Die Lagrangeschen Gleichungen .....	386
	Literatur .....	391
	<b>Index .....</b>	<b>393</b>

den, indem man die Gleichgewichtsgleichungen aus [Gleichung \(1.111\)](#) als lineares Gleichungssystem darstellt:

$$\sum_{j=1}^{3n} A_{ij} x_j = b_i, \quad i \in \{1, \dots, 3n\}, \quad (1.112)$$

mit

$$x = \begin{bmatrix} F_{Ax} \\ F_{Ay} \\ M_A \\ F_{Bx} \\ F_{By} \\ F_{Dx} \\ F_{Dy} \\ F_{Cx} \\ F_{Cy} \\ F_{Ex} \\ M_E \\ F_{Fx} \\ F_{Fy} \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ell & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -a & 2a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -F \\ -M \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.113)$$

Das Kriterium für die Lösbarkeit ist nun, ob die Determinante der Matrix ungleich Null ist. In diesem Fall verschwindet  $\det(A) = 0$ , so dass das System nicht lösbar ist. ■

## ■ 1.6 Der biegesteife Träger



**Propädeutikum:** Man studiere aus [\[MF2019\]](#) den Abschnitt 1.6.

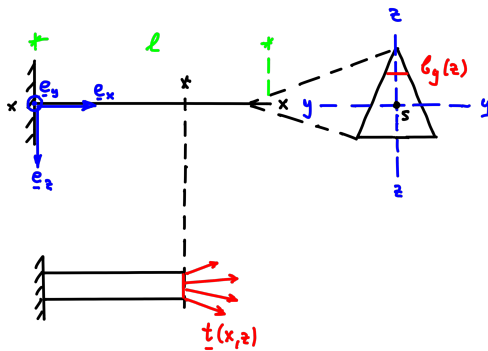
### 1.6.1 Begriffsbildung

Die Pendelstützen eines Fachwerks sind idealerweise gelenkig gelagert, so dass auf sie nur Normalkräfte (Zug oder Druck), aber keine Biegemomente übertragen werden können. Wir haben aber schon in [Abb. 1.26](#) gesehen, dass in der Realität die Kopplung von Stütze zu Stütze mehr oder weniger steif ist, was bedeutet, dass doch Querkräfte und Momente übertragen werden. In der Tat ist das der allgemeine Fall. Daher untersuchen wir im Folgenden durch Normal- und Querkräfte sowie durch Momente belastete **Balken**. Balken ist ein bauteilbezogener Ausdruck: Ein geometrisch definierter Querschnitt (quadratisch, rund, rechteckig, L-Profil, Doppel-T-Profil *etc.*) und eine im Verhältnis dazu i. A. große Länge bestimmen seine Form. In der Tat spricht man von einem (geraden) **schlanken** Balken, wenn die charakteristische Querschnittszur Achslänge in etwa 1:10 oder größer ausmacht. Solche Balken werden wir untersuchen, da dann die zu verwendende Theorie hinreichend simpel ist. Funktionell bezeichnet man waagrechte, nur teilweise aufliegende Balken auch als **Träger**. Außerdem werden wir uns auf Balkenkonstruktionen in der Ebene beschränken. Das lässt bereits hinreichend viel Spielraum für die Belastung zu und erlaubt dennoch eine mathematisch nicht zu umfangreiche Beschreibung.



Unser vordringliches Ziel ist es, Tragwerke sicher zu konstruieren. Somit ist sicherzustellen, dass die in der Konstruktion verwendeten Balken weder zerreißen noch knicken oder sich verbiegen. Um das zu garantieren, muss man über der Balkenachse für jeden Balkenquerschnitt nachweisen, dass die dort herrschenden **Spannungen** gewisse kritische Werte nicht übersteigen. Dass Spannungen quasi Kräfte pro Flächeneinheit, also Kraftintensitäten sind, welche Arten es gibt und wie sie genau berechnet werden, wird später erläutert. Gegenwärtig genügt es zu wissen, dass man dazu die im Balkenquerschnitt wirkenden Kraftverhältnisse genau kennen muss. Diese sind durch die drei **Schnittgrößen**, nämlich **Normalkraft**-, **Querkraft**- und **Momentenverteilung**, gegeben. Ihrer Begriffsbildung und den zugehörigen Berechnungsverfahren wenden wir uns nun zu. Wir studieren zunächst gerade, dann abgewinkelte und schließlich beliebig gekrümmte Balken.

## 1.6.2 Schnittgrößen



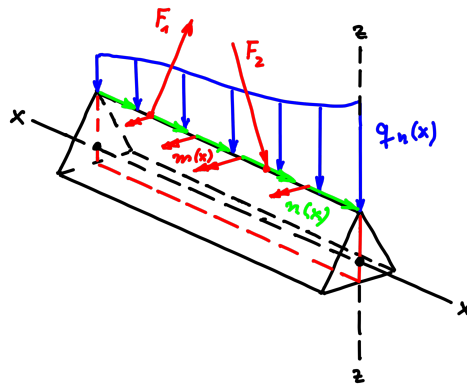
**Bild 1.38** Koordinaten am horizontalen geraden Balken.

Unser Balken sei gerade. Außerdem nehmen wir der Einfachheit halber an, dass er horizontal angeordnet ist. Wir kennzeichnen seine Flächenschwerpunkte durch ein **globales Koordinatensystem** mit kartesischen Einheitsvektoren, siehe Abb. 1.38. Hier hätte man noch diverse Möglichkeiten, Richtungen zu wählen. Wir schließen uns einer im Bauwesen und Maschinenbau oft gebräuchlichen Form an: Die Schwerachse des Trägers bezeichnen wir mit  $x$ - $x$ . Der zugehörige Einheitsvektor  $e_x$  weist von links nach rechts in ihrer Richtung. Den Flächenschwerpunkt an der Stelle  $x$  (zu sehen für einen Dreiecksquerschnitt) identifizieren wir mit dem Fadenkreuz  $y$ - $y$  und  $z$ - $z$ . Dies sind gleichzeitig auch die beiden Achsen, um die weiter unten Biegungen stattfinden können. Ihre Richtungen wählen wir so, dass  $e_z$  quasi in Richtung der Schwerkraft zeigt. Um dann ein mathematisch positives kartesisches Dreibein zu generieren, muss  $e_y$  aus der Tafelenebene hinausweisen. Zusammenfassend darf man sagen, dass dann die Menge der Volumenmittelpunkte durch  $x^v = (x, 0, 0)_i e_i$ ,  $x \in [0, \ell]$  gegeben ist, wobei  $\ell$  die Balkenlänge bezeichnet. Wie in Abb. 1.38 angedeutet, erfolgt diese Zählung sozusagen von links nach rechts.

Nun zerteilen wir in Gedanken den Balken durch einen senkrechten Schnitt an der Stelle  $x$  in zwei Teile. Um die Analyse in einem nicht völlig allgemeingültigen, aber dennoch anspruchsvollen Rahmen zu halten, nehmen wir zunächst an, dass der Balken unter externen Lasten steht, die allesamt in der  $x$ - $z$ -Ebene wirken, siehe Abb. 1.39. Punktkräfte  $F_i$ , sowie Normal- und Querkraftverteilungen  $n(x)$  bzw.  $q_n(x)$  wurden bereits oben diskutiert. Insbesondere wurde in den Abschnitten 1.1 und 1.2 gezeigt, dass sich Normal- und Querkraftverteilungen über Gewichtverteilungen erzeugen lassen. Die Momentenverteilung  $m(x)$  (in Einheiten von  $\text{Nm}/\text{m}$ ) ist neu. Sie kann gedanklich als kontinuierliche Verteilung von Momentenpaaren begriffen werden und wird in der deutschen Literatur auch **Momentenschüttung** genannt. Eine solche

Unser Balken sei gerade. Außerdem nehmen wir der Einfachheit halber an, dass er horizontal angeordnet ist. Wir kennzeichnen seine Flächenschwerpunkte durch ein **globales Koordinatensystem** mit kartesischen Einheitsvektoren, siehe Abb. 1.38. Hier hätte man noch diverse Möglichkeiten, Richtungen zu wählen. Wir schließen uns einer im Bauwesen und Maschinenbau oft gebräuchlichen Form an: Die Schwerachse des Trägers bezeichnen wir mit  $x$ - $x$ . Der zugehörige Einheitsvektor  $e_x$  weist von links nach rechts in ihrer Richtung. Den Flächenschwerpunkt an der Stelle  $x$  (zu sehen für einen Dreiecksquerschnitt) identifizieren wir mit dem Fadenkreuz  $y$ - $y$  und  $z$ - $z$ . Dies sind gleichzeitig

Größe in der Praxis zu erzeugen, ist allerdings nicht einfach. Eine Möglichkeit der Realisierung besteht in einer auf Molekülebene erfolgenden, rotativen Ausrichtung einer dünn aufgetragenen elektrischen Dipolschicht mit Hilfe externer elektrischer Felder.



**Bild 1.39** Kräfteinleitung in der  $x$ - $z$ -Ebene.

Die Wirkung dieser externen Lasten wird durch Reaktionskräfte in der Schnittebene kompensiert, und zwar dergestalt, dass insgesamt, also im Verbund mit auf dem Teilbalken eingepprägten Lasten sowie freigeschnittenen Lagerreaktionen, Kräfte- und Momentengleichgewicht herrscht. Über der freigeschnittenen linken Querschnittsfläche (dem sogenannten **linken Schnittufer** SU) resultiert so eine i. A. komplexe Kraftverteilung, wie in der Abb. 1.38 unten angedeutet, die aufgrund der angenommenen Reduktion der eingepprägten Kräfte auf die  $x$ - $z$ -Ebene, aber nicht von der  $y$ -Richtung abhängt. Wir charakterisieren sie durch das Symbol  $\mathbf{t}(x, z)$  (in  $\text{N}/\text{m}^2$ ), wobei in Komponenten gilt:

$$\mathbf{t}(x, z) = t_x(x, z)\mathbf{e}_x + t_z(x, z)\mathbf{e}_z. \quad (1.114)$$

In der Tat haben wir in Gleichung (1.32) gesehen, dass man eine solche Verteilung durch einen resultierenden Kraft- und einen resultierenden Momentenvektor ersetzen kann. Für diesen Kraftvektor gilt:

$$\mathbf{R}(x) = \int_A \mathbf{t}(x, z) b_y(z) dz, \quad (1.115)$$

wobei  $b_y(z)$  die Breite der Schnittfläche  $A$  in der Höhe  $z$  ist. Folglich können wir ihn in einen Anteil normal zum Schnittufer und einen Anteil im Schnittufer in  $z$ -Richtung aufteilen. Ersteren nennen wir die Normalkraft  $N(x)$ , letzteren die Querkraft  $Q(x)$ , und es gilt:

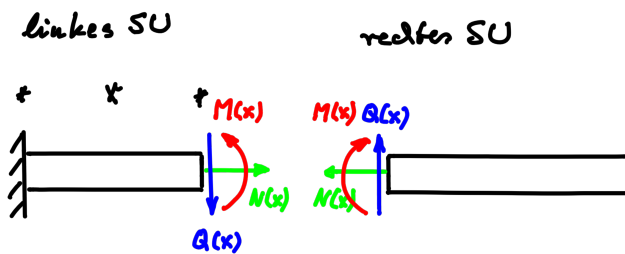
$$N(x) = \mathbf{R}(x) \cdot \mathbf{e}_x, \quad Q(x) = \mathbf{R}(x) \cdot \mathbf{e}_z. \quad (1.116)$$

Nun zum resultierenden Moment. Wir legen den Fußpunkt  $O$  (zum Begriff vgl. Abb. 1.5) in das Flächenzentrum und notieren für den Kraftaufpunkt den Vektor  $\mathbf{x} = (0, y, z)_i \mathbf{e}_i$ . Dann gilt:

$$\mathbf{M}^R(x) = \int_A \mathbf{x} \times \mathbf{t}(x, z) b_y(z) dz \equiv \int_A z t_x(x, z) b_y(z) dz \mathbf{e}_y. \quad (1.117)$$

Wie zu erwarten, steht der Momentenvektor senkrecht zur Krafteinleitungsebene ( $x$ - $z$ ) und hat nur eine in  $\mathbf{e}_y$  weisende Komponente (wie der in Abb. 1.39 gezeigte Momentenschüttungsvektor  $\mathbf{m} = m(x)\mathbf{e}_y$ ). Diverse Bemerkungen sind angebracht:

- Zur Unterscheidung von linkem und rechten Schnittufer ist eine lokale Charakterisierung sinnvoll. In diesem Sinne führen wir von der Balkenschnittfläche jeweils hinausweisende Normalenvektoren  $\mathbf{n}$  ein. Am linken Schnittufer gilt dann offenbar  $\mathbf{n} = \mathbf{e}_x$  und für das rechte Schnittufer  $\mathbf{n} = -\mathbf{e}_x$ . Vereinbarungsgemäß gilt  $N(x) > 0$ , falls die Normalkraft in Richtung der jeweiligen Normale zeigt.
- Am **linken Schnittufer** zeigt eine positive Querkraft vereinbarungsgemäß in Richtung  $\mathbf{e}_z$ , sozusagen in Richtung der Schwerkraft. Ein positives Moment dreht dort nach links, wie in der Abb. 1.40 zu sehen ist, oder anders ausgedrückt, der Momentenvektor zeigt in  $\mathbf{e}_y$ -Richtung. Dieses Moment sorgt für Biegung um die  $y$ - $y$ -Achse sozusagen vom Untergurt zum Obergurt. In Bezug auf ein globales Koordinatensystem müsste man ganz akkurat schreiben  $\mathbf{Q} = Q_z\mathbf{e}_z = Q(x)\mathbf{e}_z$  und  $\mathbf{M}^R = M_y\mathbf{e}_y = M(x)\mathbf{e}_y$ . Nur macht man das i. A. nur dann, wenn Verwechslungen auftreten könnten (siehe unten). Am **rechten Schnittufer** zeigen die Schnittgrößen gemäß dem Prinzip Kraft und Gegenkraft in entgegengesetzte Richtung, also  $\mathbf{Q} = Q_z\mathbf{e}_z = -Q(x)\mathbf{e}_z$  und  $\mathbf{M} = M_y\mathbf{e}_y = -M(x)\mathbf{e}_z$ .

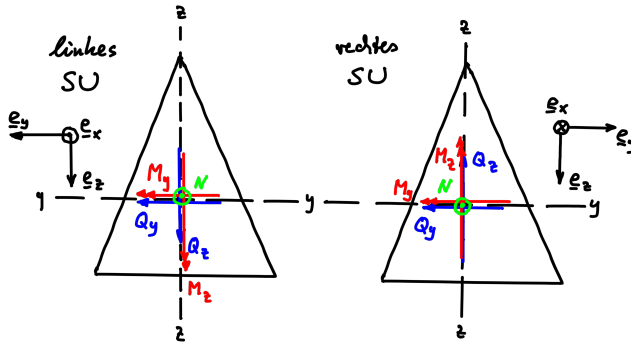


**Bild 1.40** Positive Schnittgrößen für beide Schnittufer.

- Diverse externe, in Abb. 1.39 dargestellte, aber in Abb. 1.38 und Abb. 1.40 nicht eingezeichnete Kräfte, wirkten bislang in der  $x$ - $z$ -Ebene, und diverse externe Momentenvektoren standen senkrecht dazu. Das führte dazu, dass die **drei Schnittgrößen**  $N(x), Q(x), M(x)$  eindimensional von der Achsenposition  $x$  abhingen. Es ist aber auch denkbar, dass der Balken in der  $x$ - $y$ -Ebene belastet wird. Jetzt schreiben wir:

$$\mathbf{R}(x) = \int_A \mathbf{t}(x, z) b_z(y) dz, \quad \mathbf{t}(x, z) = (t_x(x, z), t_y(x, z), 0)_i \mathbf{e}_i, \quad (1.118)$$

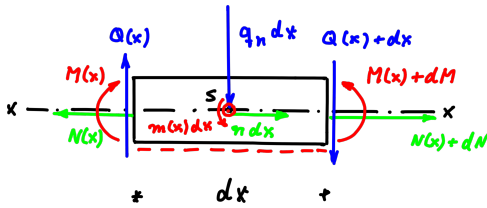
wobei  $b_z(y)$  die Höhe der Schnittfläche  $A$  im Abstand  $y$  ist. Das führt dann wieder zu einer Normalkraft  $N(x) = \mathbf{R}(x) \cdot \mathbf{e}_x$ , die am linken Schnittufer falls positiv in Richtung  $\mathbf{e}_x$  weist, einer Querkraft  $Q_z(x) = \mathbf{R}(x) \cdot \mathbf{e}_y$  und diesmal zu einem Momentenvektor  $\mathbf{M}^R = M_z(x)\mathbf{e}_z$ . Dieser biegt um die  $z$ - $z$ -Achse sozusagen von der Balkenrückseite zur Vorderfront. Man sieht, dass man jetzt mit Indizes bei der eindeutigen Charakterisierung nachhelfen muss. Der kombinierte Fall für gleichzeitige Belastung in der  $x$ - $z$ - und  $x$ - $y$ -Ebene ist für das linke und rechte Schnittufer in der Abb. 1.41 für einen Dreiecksquerschnitt dargestellt.



**Bild 1.41** Positive Schnittgrößen für beide Schnittufer aus kombinierter Belastung.

- Wir werden im Kapitel über Elementare Festigkeitslehre lernen, dass es sich bei der Größe  $t$  um den sogenannten **Spannungsvektor** handelt.

### 1.6.3 Schnittgrößendifferentialgleichungen (gerader Balken)



**Bild 1.42** Freischnitt eines infinitesimalen geraden Balkenstücks.

Eine Bestimmungsmethode der drei Schnittgrößen beruht auf zugehörigen Differentialgleichungen, die wir jetzt ableiten werden. Zu diesem Zweck wird ein infinitesimal kleines Stück der Länge  $dx$  aus dem Balken freigeschnitten, siehe Abb. 1.42. Man beachte, dass wir die Normal- und Querlastverteilungen  $n(x)$  und  $q_n(x)$  sowie die Momentenschüttung  $m(x)$  (Momentenpaarvektoren kann man beliebig im Raum verschieben) in der jeweils positiven Richtung

eingetragen und im Schwerpunkt zusammengefasst haben. Wir werten die Gleichgewichtsbedingungen der Ebene vorzeichengerecht aus:

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 &: -N(x) + N(x) + dN + n(x) dx = 0, \\ \sum F_z = 0 &: -Q(x) + Q(x) + dQ + q_n(x) dx = 0, \\ \sum M^{(S)} = 0 &: -M(x) - Q(x) \frac{dx}{2} + m(x) dx + M(x) + dM - (Q(x) + dQ) \frac{dx}{2} = 0. \end{aligned} \tag{1.119}$$

In der letzten Gleichung ist zu beachten, dass Produkte zweier Differentialausdrücke im Grenzfall  $dx \rightarrow 0$  verschwinden. Es folgt:

$$\frac{dN}{dx} = -n(x), \quad \frac{dQ}{dx} = -q_n(x), \quad \frac{dM}{dx} = Q(x) - m(x). \tag{1.120}$$

Das sind bereits die Schnittliniendifferentialgleichungen, die man **bereichsweise** im Balken **unbestimmt integriert** aufschreibt:

$$\begin{aligned} N(x) &= - \int n(x) dx + C_0, \\ Q(x) &= - \int q_n(x) dx + C_1, \\ M(x) &= \int (Q(x) + m(x)) dx + C_2 \equiv - \int \int q_n(x) dx dx + \int m(x) dx + C_1 x + C_2. \end{aligned} \quad (1.121)$$

Wieder sind einige Bemerkungen nötig:

- Bereiche bzw. Abschnitte definieren sich typischerweise durch Stellen am Balken, an denen Punktkräfte oder Punktmomente eingeleitet werden. Andererseits können im Prinzip auch die Normal- und Querkraftverteilungen  $n(x)$  und  $q_n(x)$  Unstetigkeiten aufweisen. Auch dann ist eine Bereichsaufteilung möglich, aber nicht obligatorisch, da die zugehörigen Integrationen aufgespalten werden können.
- In jedem Bereich gibt es neue Integrationskonstanten  $C'_0, C'_1, C'_2$ , die man durch neue Symbole zu unterscheiden hat. Man bestimmt sie aus einer genügend großen Anzahl von Rand- und Übergangsbedingungen: Beispiele 1.11, 1.12.
- Um eine Übersicht zu gewinnen, wo die Belastungen besonders groß sind, zeichnet man die drei Schnittgrößen vorzeichengerecht über dem Balken auf. Man erhält die **Normalkraft-, Querkraft- und Momentenflächen**.
- An den Stellen des Balkens, wo eine Punktkraft horizontal bzw. vertikal eingeleitet wird, weisen die Normalkraft- bzw. die Querkraftverteilung Unstetigkeiten auf, sie springen! Ebenso ist die Momentenfläche dort unstetig, wo ein reines Moment angebracht ist. Die Anwesenheit einer Punktkraft führt hier nicht zum Sprung. Man sagt, dass Integration (siehe Gleichung (1.121)<sub>3</sub>) glättet.
- Für den Fall, dass keine Normal- und Querlastverteilungen  $n(x)$  und  $q_n(x)$  anwesend sind, sind  $N(x)$  und  $Q(x)$  abschnittsweise konstant (Konstanten  $C_0$  und  $C_1$ ), und  $M(x)$  ist durch Geradenstücke  $C_1 x + C_2$  gegeben.
- Zur (Vorzeichen-)Kontrolle der Flächen  $Q(x)$  und  $M(x)$  kann die Gleichung (1.121)<sub>3</sub> verwendet werden: Die lokale Steigung an der Momentenfläche ist gleich der dort herrschenden Querkraft. Die Steigung entspricht dem Neigungswinkel der Tangente an der Kurve. Sie kann mit fortschreitendem  $x$  ansteigen bzw. fallen. Entsprechend ist die Querkraft dann positiv oder negativ.
- Man muss nicht immer über die Differentialgleichungen gehen, um an die Schnittgrößen an einer Stelle  $x$  zu gelangen. Alternativ kann man an dieser Stelle sowie an den Balkenlagerungen freischneiden und erhält zwei Teilbalken, einen mit einem linken und einen mit einem rechten Schnittufer. An jedem kann man Kräfte- und Momentengleichgewicht studieren, um die drei Schnittgrößen vorzeichenrichtig zu bestimmen. Ob man das linke oder das rechte Balkenstück nimmt, ist gleichgültig, das Endergebnis muss dasselbe sein. Dabei ist natürlich vorausgesetzt, dass man die Lagerreaktionen kennt, also vorab bestimmt hat, was nur bei einem statisch bestimmten System einfach möglich ist. Die Schnittlastendifferentialgleichungsmethode wird bei statisch unbestimmten Systemen oft mit der Bestimmung der Biegelinie kombiniert, vgl. Abschnitt 2.6.4 in [MF2019] und Beispiel 2.9.
- Eine weitere Methode zur Bestimmung der Schnittlasten ist das sogenannte **Aufziehverfahren**, siehe Beispiel 1.14. Dieses führt ausschließlich bei mit Punktkräften und -momenten

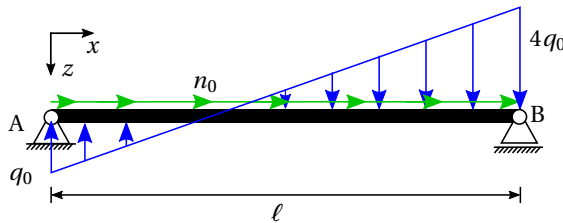
belasteten Balken zum Erfolg. Es ist besonders effizient, wenn der Balken über ein freies Ende verfügt, was es uns erspart, vorab die Auflagerreaktionen zu ermitteln: Beispiel 1.14.

Zum Schluss noch eine Bemerkung, wenn wir eine Belastung in der in Abb. 1.41 gezeigten Art voraussetzen. In diesem Fall müssen wir das System von Differentialgleichungen von einer Belastung in der  $x$ - $z$ -Ebene mit Biegung um die  $y$ -Achse auf eine zusätzliche Belastung in der  $x$ - $y$ -Ebene mit Biegung um die  $z$ -Achse erweitern, wie folgt:

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dx} &= -n(x), \\ \frac{dQ_y}{dx} &= -q_{n,y}(x), \quad \frac{dQ_z}{dx} = -q_{n,z}(x), \\ \frac{dM_y}{dx} &= Q_z(x) - m_y(x), \quad \frac{dM_z}{dx} = Q_y(x) - m_z(x). \end{aligned} \quad (1.122)$$

### Beispiel 1.11 Differentialgleichungsverfahren mit Randbedingungen

Betrachtet wird der Balken in Abb. 1.43, der nicht nur unter einer linearen Querkraftverteilung  $q(x)$  steht, sondern auch noch mit einer konstanten Normallastverteilung  $n(x) = n_0$  belastet wird. Eine Momentenschüttung ist nicht vorhanden, so dass  $m(x) \equiv 0$ .



**Bild 1.43** Kontinuierlich belasteter Balken.

Zur Auswertung der generischen Lösungen in Gleichung (1.121) werden zum einen die Funktionen  $n(x)$  und  $q(x)$  für die Integrationen benötigt, also:

$$n(x) = n_0, \quad q(x) = q_0 \left( 5 \frac{x}{\ell} - 1 \right). \quad (1.123)$$

Zum anderen müssen die Randbedingungen für die Schnittgrößen  $N(x)$ ,  $Q(x)$  und  $M(x)$  ermittelt werden, die für die Bestimmung der drei Unbekannten  $C_0$ ,  $C_1$  und  $C_2$  verwendet werden. In dem betrachteten Beispiel können aufgrund der einfachen Lagerung alle Randbedingungen direkt abgelesen werden. Das Festlager auf der linken Seite kann kein Moment aufnehmen. Neben der Momentenfreiheit des Loslagers auf der rechten Seite kann dieses auch keine Normalkraft aufnehmen. Insgesamt lauten die drei Randbedingungen:

$$M(x=0) = 0, \quad N(x=\ell) = 0, \quad M(x=\ell) = 0. \quad (1.124)$$

Die Lösungen aus Gleichung (1.121) zusammen mit den Funktionen aus Gleichung (1.123) lauten:

$$\begin{aligned} N(x) &= -n_0 x + C_0, \quad Q(x) = -q_0 \ell \left( \frac{5}{2} \frac{x^2}{\ell^2} - \frac{x}{\ell} \right) + C_1, \\ M(x) &= -q_0 \ell^2 \left( \frac{5}{6} \frac{x^3}{\ell^3} - \frac{1}{2} \frac{x^2}{\ell^2} \right) + C_1 x + C_2. \end{aligned} \quad (1.125)$$

Die Auswertung der Randbedingungen führt auf das folgende Gleichungssystem:

$$C_2 = 0, \quad -n_0 \ell + C_0 = 0, \quad -\frac{1}{3} q_0 \ell^2 + C_1 \ell + C_2 = 0. \quad (1.126)$$

Damit können die Schnittlasten angegeben werden als:

$$\begin{aligned} N(x) &= n_0 \ell \left(1 - \frac{x}{\ell}\right), & Q(x) &= -q_0 \ell \left(\frac{5}{2} \frac{x^2}{\ell^2} - \frac{x}{\ell} - \frac{1}{3}\right), \\ M(x) &= -q_0 \ell^2 \left(\frac{5}{6} \frac{x^3}{\ell^3} - \frac{1}{2} \frac{x^2}{\ell^2} - \frac{1}{3} \frac{x}{\ell}\right). \end{aligned} \quad (1.127)$$

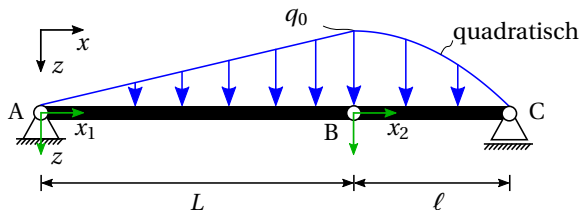


**Beispiel 1.12 Differentialgleichungsverfahren mit Rand- und Übergangsbedingungen**

Das in Abb. 1.44 dargestellte System besteht aus zwei Balken, die im Punkt B mit einem Gelenk verbunden sind. Daher werden auch zwei unterschiedliche Bereiche betrachtet, die jeweils mit einem eigenen Koordinatensystem ausgestattet werden. Es ist prinzipiell nicht notwendig, lokale Koordinatensysteme einzuführen, allerdings erleichtert dies das Aufstellen der Lastverteilungsfunktionen. In jedem Bereich werden die Lösungen aus Gleichung (1.121) neu ausgewertet, so dass sich insgesamt sechs Unbekannte ergeben. Die Randbedingungen im Punkt A sowie im Punkt C wurden bereits im vorherigen Beispiel untersucht – es sind insgesamt drei:

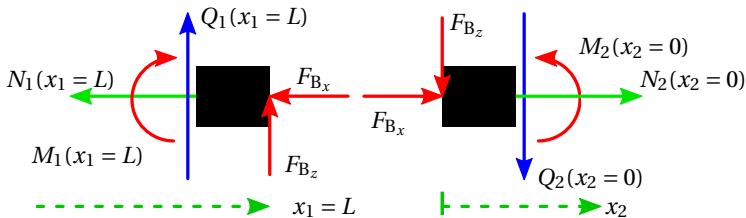
$$M_1(x_1 = 0) = 0, \quad N_2(x_2 = \ell) = 0, \quad M_2(x_2 = \ell) = 0. \quad (1.128)$$

Dementsprechend werden noch drei weitere Bedingungen, Übergangsbedingungen genannt, benötigt.



**Bild 1.44** Belasteter Balken.

Zur Berechnung der Schnittgrößen beim Übergang der beiden Bereiche wird in Abb. 1.45 das Gelenk im Punkt B freigeschnitten.



**Bild 1.45** Schnitrufer am Übergang.

Hier ergeben sich sechs Gleichgewichtsbedingungen, die sich nach Elimination der Lagerreaktionen  $F_{B_x}$  und  $F_{B_y}$  wie folgt reduzieren:

$$N_1(x_1 = L) = N_2(x_2 = 0), \quad Q_1(x_1 = L) = Q_2(x_2 = 0), \quad M_1(x_1 = L) = M_2(x_2 = 0) = 0. \quad (1.129)$$

In Worten: Die Funktionen  $N$ ,  $Q$  und  $M$  sind stetig beim Übergang im Gelenk B. Dieses Ergebnis hätte man sich bereits zuvor überlegen können: Zunächst kann das Gelenk kein Moment aufnehmen, so dass dort das Schnittmoment verschwinden muss. Weiterhin kann das Gelenk Axial- und Querkräfte aufnehmen, was dazu führt, dass diese übertragen werden. Für kompliziertere Übergänge, beispielsweise wenn ein Punktmoment im Übergang angreift, lohnt es sich jedoch, den Übergang freizuschneiden.

Die bereichsweise Querlastverteilung lautet

$$q_1(x_1) = q_0 \frac{x_1}{L}, \quad q_2(x_2) = q_0 \left(1 - \frac{x_2^2}{\ell^2}\right). \quad (1.130)$$

Damit ergeben sich die bereichswisen Lösungen zu

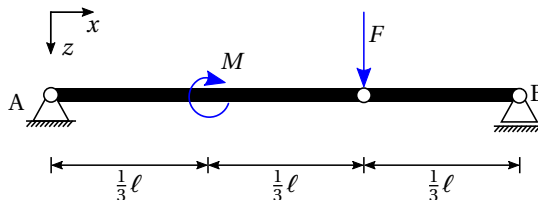
$$\begin{aligned} N_1(x_1) &= C_0^1, & Q_1(x_1) &= -\frac{q_0 L}{2} \left(\frac{x_1}{L}\right)^2 + C_1^1, & M_1(x_1) &= -\frac{q_0 L^2}{6} \left(\frac{x_1}{L}\right)^3 + C_1^1 x + C_2^1, \\ N_2(x_2) &= C_0^2, & Q_2(x_2) &= -q_0 \ell \left(\frac{x_2}{\ell} - \frac{1}{3} \frac{x_2^3}{\ell^3}\right) + C_1^2, \\ M_2(x_2) &= -\frac{q_0 \ell^2}{2} \left(\frac{x_2^2}{\ell^2} - \frac{1}{6} \frac{x_2^4}{\ell^4}\right) + C_1^2 x_2 + C_2^2. \end{aligned} \quad (1.131)$$

Die Auswertung der Randbedingungen in [Gleichung \(1.128\)](#) zusammen mit den Übergangsbedingungen aus [Gleichung \(1.129\)](#) liefert dann:

$$\begin{aligned} N_1(x_1) &= 0, & Q_1(x_1) &= -\frac{q_0 L}{2} \left(\frac{x_1}{L}\right)^2 + \frac{q_0 L}{6}, & M_1(x_1) &= -\frac{q_0 L^2}{6} \left(\frac{x_1}{L}\right)^3 + \frac{q_0 L}{6} x_1, \\ N_2(x_2) &= 0, & Q_2(x_2) &= -q_0 \ell \left(\frac{x_2}{\ell} - \frac{1}{3} \frac{x_2^3}{\ell^3}\right) + \frac{5q_0 \ell}{12}, \\ M_2(x_2) &= -\frac{q_0 \ell^2}{2} \left(\frac{x_2^2}{\ell^2} - \frac{1}{6} \frac{x_2^4}{\ell^4}\right) + \frac{5q_0 \ell}{12} x_2. \end{aligned} \quad (1.132)$$

### Beispiel 1.13 Das elementare Schnittprinzip

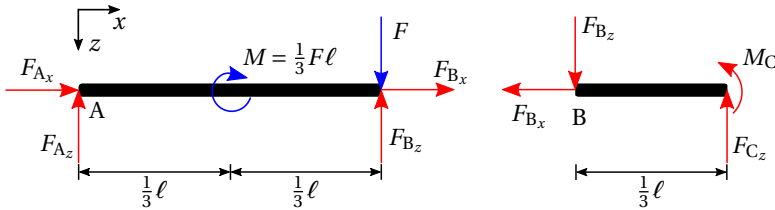
Das in [Abb. 1.46](#) dargestellte System besteht aus zwei Teilsystemen, die im Punkt B über ein Gelenk verbunden sind. Im Punkt C ist eine Schiebehülse angebracht.



**Bild 1.46** Balkensystem unter Punktbelastungen.



Im Allgemeinen werden die Lagerreaktionen für die Berechnung der Schnittlasten benötigt. Zwar kann in der vorliegenden Aufgabe die Berechnung der Lagerreaktionen durch geschickte Wahl der betrachteten Schnitthufer umgangen werden. Der Vollständigkeit halber werden wir dennoch damit beginnen. Wir fertigen hierfür die Freischnitte der beiden Teilsysteme an, wie in Abb. 1.47 gezeigt. Dabei gilt das eingezeichnete Koordinatensystem für beide Freischnitte.



**Bild 1.47** Freischnitt des Balkensystems.

Wichtig ist hier, dass die Kraft  $F$ , die im Gelenk angreift, nur in einen der Teilfreischnitte eingezeichnet wird. In welchem Teilsystem die Kraft angetragen wird, ist gleichgültig, denn es muss nur das Schnittprinzip erfüllt werden: Die Zusammenführung der beiden Teilsysteme muss wieder das Ausgangssystem ergeben.

Es bietet sich an, die Momentengleichgewichte um die Punkte A und B auszuwerten:

$$\sum M^{(A)} \stackrel{!}{=} 0 = -M + \frac{2}{3}\ell(F_{Bz} - F), \quad \sum M^{(B)} \stackrel{!}{=} 0 = \frac{1}{3}\ell F_{Cz} + M_C. \quad (1.133)$$

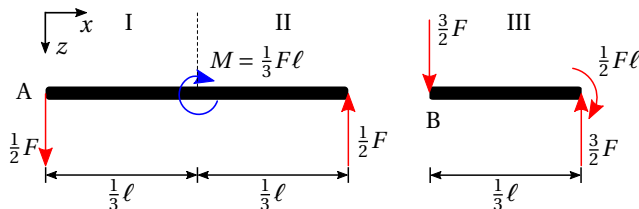
Weiterhin werden die Kräftegleichgewichte an beiden Systemen aufgestellt:

$$\begin{aligned} \sum F_x \stackrel{!}{=} 0 &= F_{Ax} + F_{Bx}, & \sum F_x \stackrel{!}{=} 0 &= -F_{Bx}, \\ \sum F_z \stackrel{!}{=} 0 &= -F_{Az} - F_{Bz} + F, & \sum F_z \stackrel{!}{=} 0 &= F_{Bz} - F_{Cz}, \end{aligned} \quad (1.134)$$

Die Lösung der sechs Gleichgewichtsbedingungen liefert die Auflagerreaktionen:

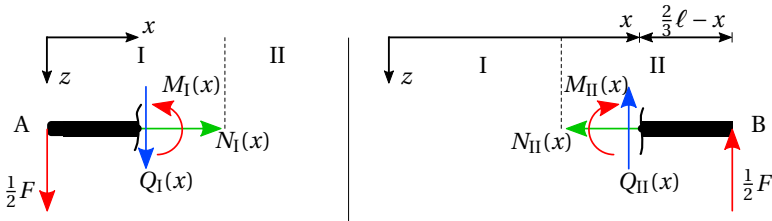
$$F_{Ax} = F_{Bx} = 0, \quad F_{Az} = -\frac{F}{2}, \quad F_{Bz} = F_{Cz} = \frac{3}{2}F, \quad M_C = -\frac{F\ell}{2}. \quad (1.135)$$

Nun wird der Freischnitt erneut gezeichnet, wobei die berechneten Lagerreaktionen als äußere Kräfte angetragen und die Richtungen korrigiert werden. Weiterhin wird in Abb. 1.48 eine Bereichseinteilung vorgenommen. Im Folgenden wird jeder Bereich einzeln freigeschnitten, um die Schnittlasten sichtbar zu machen. Mittels der Gleichgewichtsbedingungen können die Schnittlasten dann bestimmt werden.



**Bild 1.48** Bereichseinteilung des Balkensystems.

Für  $x = \frac{1}{3}\ell$  stellt sich am Übergang zweier Bereiche wieder die Frage, zu welchem der beiden die Punktlast (in diesem Fall ein Punktmoment) zugeteilt werden soll. Es stellt sich heraus, dass diese Überlegung überflüssig ist, da der betrachtete Übergang durch geschickte Wahl der Schnittufer nicht sichtbar ist. In Abb. 1.49 wird für den Bereich I ein positives Schnittufer und für den Bereich II ein negatives verwendet.



**Bild 1.49** Bereichseinteilung des Balkensystems.

Die Gleichgewichtsbedingungen im Bereich I lauten:

$$\begin{aligned} \sum F_x \stackrel{!}{=} 0 &= N_I(x) & \Rightarrow & N_I(x) = 0, \\ \sum F_z \stackrel{!}{=} 0 &= Q_I(x) + \frac{F}{2} & \Rightarrow & Q_I(x) = -\frac{F}{2}, \\ \sum M^{(S)} \stackrel{!}{=} 0 &= M_I(x) + x \frac{F}{2} & \Rightarrow & M_I(x) = -\frac{F}{2}x. \end{aligned} \quad (1.136)$$

Hier ist S der Punkt, an dem der Schnitt durch den Balken durchgeführt wird. Im zweiten Bereich ist zu beachten, dass am negativen Schnittufer alle Schnittgrößen mit einem negativen Vorzeichen zu berücksichtigen sind:

$$\begin{aligned} \sum F_x \stackrel{!}{=} 0 &= -N_{II}(x) & \Rightarrow & N_{II}(x) = 0, \\ \sum F_z \stackrel{!}{=} 0 &= -Q_{II}(x) - \frac{F}{2} & \Rightarrow & Q_{II}(x) = -\frac{F}{2}, \\ \sum M^{(S)} \stackrel{!}{=} 0 &= -M_{II}(x) + \left(\frac{2}{3}\ell - x\right) \frac{1}{2}F & \Rightarrow & M_{II}(x) = \frac{F\ell}{2} \left(\frac{2}{3} - \frac{x}{\ell}\right). \end{aligned} \quad (1.137)$$

Man beachte, dass  $M_{II}(x = \frac{2}{3}\ell) = 0$ , da das Gelenk im Punkt B kein Moment aufnehmen kann. Solche Konsistenzprüfungen sind sehr empfehlenswert, da sich gerade beim Arbeiten mit mehreren Bereichen Rechenfehler einschleichen können. Für den dritten Bereich wird wieder ein positives Schnittufer gewählt, damit das angreifende Moment am rechten Rand nicht betrachtet werden muss:

$$\begin{aligned} \sum F_x \stackrel{!}{=} 0 &= N_{III}(x) & \Rightarrow & N_{III}(x) = 0, \\ \sum F_z \stackrel{!}{=} 0 &= Q_{III}(x) + \frac{3}{2}F & \Rightarrow & Q_{III}(x) = -\frac{3}{2}F, \\ \sum M^{(S)} \stackrel{!}{=} 0 &= M_{III}(x) + \left(x - \frac{2}{3}\ell\right) \frac{3}{2}F & \Rightarrow & M_{III}(x) = \frac{3F\ell}{2} \left(\frac{2}{3} - \frac{x}{\ell}\right). \end{aligned} \quad (1.138)$$

Der zugehörige Freischnitt wird hier nicht gezeigt, da er im wesentlichen aussieht wie in Abb. 1.49 (links), nur dass die dreifache Kraft wirkt und der Hebelarm um den Punkt S mit  $x - \frac{2}{3}\ell$  gegeben ist. Jede der hier berechneten Funktionen ist nur in dem jeweiligen Bereich gültig.

# Index

- 1-Kraft-Konzept, 378
- 1. Bredtsche Formel, 206
- 1. Eulersches Gesetz der Statik, 29
- 1. Hauptsatz der Thermodynamik, 337
- 2. Bredtsche Formel, 208
- 2. Eulerscher Satz der Statik, 29
- 2. Hauptsatz der Thermodynamik, 334, 339
  
- Abbildungsgeschwindigkeit, 279
- Absolutbeschleunigung, 322
- absolute Zeit, 318
- absoluter Raum, 318
- Absolutgeschwindigkeit, 321
- Accelerometer, 223
- actio = reactio, 23
- action, 382
- additiven Dekomposition, 136
- adiabatische Abschottung, 336
- aktuelle Platzierung, 134
- aktuelle Spannung, 144
- aktueller Lagevektor, 134
- Anfangsbedingung, 222
- Anisotropie, 136, 344
- Antisymmetrie, 245
- Arbeitssatz der Mechanik, 371
- Arbeitssatz Massenpunkt, 232, 233
- Arbeitssatz Massenpunktsystem, 240
- Arbeitssatz Starrkörper, 262
- Asperität, 102
- Aufpunkt, 24, 244
- Aufziehverfahren, 67, 95
- Ausflussfunktion, 297
- äußere Kräfte, 237
- äußerer Freischnitt, 23
- äußeres Skalarprodukt, 117
- Auswertemethode nach Coleman-Noll, 342
- Axialbeschleunigung, 225
- axialer Vektor, 25
- Axialgeschwindigkeit, 225
  
- Bahngeschwindigkeit, 226
- Bakzappregel, 21
- Balken, 62
- Balken schlank, 62
- Balkenbiegeformel, 155
- Balkenbiegung, 175
- begleitendes Dreibeins, 226
- Beobachterabhängigkeit, 340
- Beobachterpunkt, 279
- Bernoulli-Balkens, 175
- Bernoullihypothese, 173, 174
- Beschleunigung der relativen Translation, 322
- Beschleunigungssensoren, 223
- Beschleunigungsvektor, 222
- Bewegung, 284
- Bezugsrahmen, 318
- Biegelinie, 172
- Biegespannungen, 115
- biegesteife Verbindung, 51
- bijektive Abbildung der Bewegung, 134
- Binormaleneinheitsvektor, 88
- Binormalenvektor, 227
- Bogenlänge, 86
- Bogenträger, 51
- Boltzmannkonstante, 302
- Boostgeschwindigkeit, 321
- Bredtsche Formel, 205
  
- Capstangleichung, 108
- Cauchyspannung, 144
- center of gravity, 36
- charakteristisches Polynom, 123
- constitutive equations, 136, 300
- Coriolisbeschleunigung, 225, 322
- Cosseratmedien, 126
- Coulombsche Reibung, 102
  
- d'Alembertsche Trägheitskraft, 230, 373

- Darstellungssatz, 344  
Darstellungstheorie, 349  
Dashpot, 381  
Deformationsgradient, 134  
dehnungskontrolliert, 346  
Dehnungspotential, 343  
Dehnungsraum, 350  
Determinante, 123  
Deviationsmomente, 156, 182, 263  
Deviator, 305  
Diagonalisierung von Tensoren, 122  
Differentialgeometrie Ebene, 86  
Dirichletsche Randbedingungen, 141, 166  
Dissipationsfunktion, 381  
dissipative Kräfte, 232  
dissipative Leistung Massenpunktsystem, 240  
Divergenz, 289  
Divergenz in Zylinderkoordinaten, 197  
dog bone specimen, 144  
doppelte äußere Überschiebung, 117  
doppelte innere Überschiebung, 117  
Drall, 265  
Drallsatz der Statik, 29  
Drallsatz für Ingenieurpraxis, 267  
Drallsatz im Schwerpunkt, 267  
Drallsatz in der Ebene, 267  
Drallsatz Massenpunkt, 234  
Drallsatz Massenpunktsysteme, 242  
Drallsatz Starrkörper, 266  
Drehimpuls Massenpunkt, 234  
Drehimpuls Massenpunktsystem, 241  
Drehimpuls Starrkörper, 265  
Drehimpulserhaltung, 234  
Drehtensor, 244  
Druck, 113  
Druckspannungen, 115  
Duhamel-Neumann Gesetz, 136  
Duhamel-Neumannsche Erweiterung, 139  
dyadisches Produkt, 116  
Dynamik, 17  
dynamisches Gleichgewicht, 23
- ebener Spannungszustand, 127  
Eigenbasis, 123  
Eigenvektor, 122  
Eigenwert, 122  
Eigenwertproblem, 122  
eindimensionaler Zugversuch, 143  
einfache Überschiebung, 116  
Einflusszahlen, 354  
Einheitsnormalenvektor, 115  
Einheitstensor, 20  
Einsteinsche Summenkonvention, 19, 117  
Einstensor, 117  
einwertiges Lager, 47  
Elastica, 172  
elastische Dehnungen, 136  
elastische Welle, 316  
Elastizitätsmodul, 139, 143  
Energieerhaltungssatz, 336  
Energiefunktional, 363  
Energieprinzip, 17  
Energiesatz Massenpunkt, 233  
Energiesatz Massenpunktsysteme, 240  
Energiesatz Starrkörper, 263  
Entartung, 123  
Entropiebilanz, 339  
Entropieprinzip, 300, 334  
Entropiegleichung in lokaler Form, 339  
Ergänzungsformänderungsenergiegedichte, 346  
Erhaltungsgröße, 286, 335, 337, 339  
Euklidischer Tensor, 300, 325, 347  
Euler-Bernoulli-Balken, 174, 353  
Euler-Eytelweinsche Seilreibung, 108, 109  
Euler-Lagrangesche Differentialgleichungen, 366  
Euler-Theorem, 256  
Eulerbeschleunigung, 225, 322  
Eulerian description, 279  
Eulerkinematik, 244  
Eulers 1. Gesetz der Bewegung, 258  
Eulers 2. Gesetz der Bewegung, 267  
Eulersche Beschreibung, 279  
Eulersche Kreisgleichungen, 270  
Eulersche Winkel, 254  
Eulersches Fluid, 300  
Extension, 136
- Führungsbeschleunigung, 322  
Führungsgeschwindigkeit, 321

- Fachwerk, 50  
 Fahrstrahl, 221  
 Federrückstellkraft, 381  
 Feldbegriff, 277  
 Feldgleichung, 338  
 Fernwechselwirkung, 231  
 Fernwirkungsprinzip, 23  
 Festkörpermechanik, 279  
 Festlager, 48  
 fixed centrode, 247  
 Flächeneinheitsnormalenvektors, 115  
 Flächenmoment erster Ordnung, 39  
 Flächenmoment zweiter Ordnung, 155  
 Flächenschwerpunktes, 38  
 Flächenträgheitsmoment, 155  
 Flächenträgheitstensor, 180  
 Flächenzentrum, 38  
 Flüssigkeitsreibung, 305  
 Fluidmechanik, 279  
 Formänderungsenergie, 346  
 Formänderungsenergiegedichte, 345  
 Forminvarianz, 330, 331  
 Fouriersches Wärmeleitungsgesetz, 342, 345  
 Frame of Reference, 318  
 free body diagram, 22  
 freie Enthalpie, 342  
 Freiheitsgrad, 387  
 Freiheitsgrade, 47  
 Freiheitsgrade Massenpunktsystem, 236  
 Freischnitt, 22  
 Frenetsche Gleichungen, 226  
 Frenetsches Dreibein, 88  
 Funktional, 363  
 Funktionalableitung, 365  
 Funktionalanalysis, 363  
 Funktionalgleichung, 348  
 Funtionalableitung, 282
- Gâteauxableitung, 282  
 Galileitransformationen, 324  
 Gangpolbahn, 247  
 Gaußscher Satz, 120  
 gebundener Vektor, 21  
 gekrümmter Träger, 208  
 gemischte Torsion, 198  
 generalisierte Koordinaten, 237, 387  
 generalisierte Verschiebung, 354  
 generalisierten Kraft, 354  
 geradlinig gleichförmige Bewegung, 230  
 geschlossene Oberfläche, 119  
 geschlossenes Volumen, 278  
 Geschwindigkeitsgradient, 305  
 Geschwindigkeitsvektor, 221  
 Gestaltänderungsenergiehypothese, 213  
 Gestaltänderungshypothese, 213  
 Gewicht, 36  
 Gibbssche Gleichung, 342  
 Gibbssche Kreuzoperation, 322  
 Gieren, 255  
 Gleichgewicht am undeformierten System, 29  
 Gleichgewichtsentropie, 342  
 Gleitkraft, 103  
 Gleitlager, 48  
 Gleitreibung, 102, 381  
 Gleitreibungskoeffizient, 103  
 Gleitreibungskraft, 103  
 globale Bilanz, 286  
 Grassmann-Identität, 118
- Haften, 103  
 Haftkraft, 103  
 Haftreibung, 102  
 Haftreibungskoeffizient, 103  
 Haftreibungskraft, 103  
 Hamiltonsches Prinzip, 384  
 Hauptachsen, 263  
 Hauptachsenbasis, 123  
 Hauptachsensystem, 122  
 Hauptachsentransformation, 122  
 Hauptinvarianten, 123  
 Hauptspannungen, 131  
 Hauptspannungsrichtungen, 131  
 Hauptträgheitsachsen, 181, 194  
 Hauptträgheitsmomente, 181, 194  
 hinreichende Bedingung Extremum, 365  
 holonom, 236  
 holonom-rheonom, 236  
 Hookesches Gesetz, 139, 349  
 Hookesches Gesetz für Scherung, 168  
 Hundeknochenprobe, 144  
 hyperbolische Differentialgleichung, 385

- Hypothese vom lokalen Gleichgewicht, 301
- ideales Gas, 301
- Impuls Massenpunkt, 228
- Impuls Massenpunkte, 237
- Impuls Starrkörper, 257
- Impulsbilanz der Statik, 125
- Impulssatz für Massenpunktsysteme, 239
- Inertialbeobachter, 317
- Inertialkräfte, 331
- Inertialsystemsbeobachter, 224
- Ingenieurspannung, 122, 144
- inkompressibles Material, 143
- innere Energie, 335
- innere Kräfte, 238
- innere Reaktionskräfte, 24
- instantaneous center of rotation, 246
- integrierender Faktor, 342
- isotroper Festkörper, 347
- Isotropie, 344
- Isotropieprinzip, 300
- Körperpunkt, 243
- Kalorik, 336
- Kanalströmung, 307
- Kette, 48
- kinematische Zwangsbedingungen, 236
- kinetische Energie, 334
- kinetische Energie Massenpunkt, 233
- kinetische Energie Massenpunktsystem, 239
- kinetische Energie Starrkörper, 261
- kinetische Reibkraft, 103
- kinetischer Reibbeiwert, 103
- Kleben, 174
- Knoten, 50
- Kompatibilitätsbedingungen, 153, 173
- komplementäre Formänderungsenergie, 346
- komplementäre Formänderungsenergie-dichte, 346
- Kompressibilität, 302
- Kompression, 136
- Kompressionsmodul, 349
- Kontaktkraft, 23
- Kontinuitätsgleichung, 289
- Kontinuumstheorie, 17
- Kontrollvolumen, 280
- konvektiver Fluss, 286
- Koordinatensystem global, 63
- Koppeltensor, 258
- Kräftegesetz, 29, 259
- Kräftegesetz 2D, 261
- Krümmung, 89
- Krümmungsvektor, 180
- Kraft, 19
- Kraftstoß, 230
- Kreuzprodukt, 20
- Kriechen, 113
- Kroneckersymbol, 20
- Kugelanteil, 305
- Kusinenformel, 170
- Lagevektor, 221
- Lagrangefunktion, 382
- Lagrangesche Beschreibungsweise, 284
- Lagrangesche Darstellung, 134
- Lagrangeschen Gleichungen 2. Art, 387
- Lagrangian, 382
- Lamé-Naviersche Differentialgleichungen, 140
- Lamésche Elastizitätskonstanten, 138
- Laplaceoperator, 140, 294
- Laplaceoperator in Zylinderkoordinaten, 197
- Laufgrad, 47
- Lavaldüse, 299
- Legendretransformation, 343
- Levi-Civita-Symbol, 20
- Lex Tertia, 23
- linear elastisch, 112
- linear-thermoelastischer Festkörper, 349
- lineare Elastomechanik, 29
- linearer Dehnungstensor, 135
- linearer thermischer Ausdehnungskoeffizient, 137
- Linien Schwerpunkt, 38
- Linienzentrum, 39
- lokale Bilanz der kinetischen Energie, 334
- lokale Bilanz in regulären Punkten, 287
- Longitudinalwelle, 385
- Longitudinalwellen, 316
- Loslager, 48
- Massenbilanz, 289

- Massenträgheitstensor, 261  
 Massenträgheitstensor in Komponenten, 263  
 Massenzentrum, 37  
 Materialfunktion, 121  
 Materialgesetzen, 136  
 Materialgleichungen, 300  
 Materialpaarung, 103  
 materielle Beschreibungsweise, 284  
 materielle Zeitableitung, 280  
 materieller Punkt, 277  
 materielles Teilchen, 133, 277  
 materielles Volumen, 278  
 Maximum, 365  
 mechanische Arbeit, 233  
 mechanische Leistung, 233  
 Mikropolartheorie, 126  
 Minimalkalkül, 364  
 Minimum, 365  
 Mohrscher Kreis, 127, 136  
 moment couple, 26  
 Momentanpol, 246  
 Momentenfläche, 63  
 Momentengleichgewicht, 29  
 Momentenpaar, 26  
 Momentenschüttung, 63  
 motion, 284  
 moving centrode, 247
- Nablaoperator, 120  
 Nablaoperator in Zylinderkoordinaten, 197  
 natürliche Basis, 225  
 Navier-Stokes-Gesetz, 305, 345  
 Neumannsche Randbedingungen, 119, 142, 146, 167  
 neutrale Faser, 154  
 Newtons Grundgleichung der Statik, 29  
 Newtonsche Bewegungsgesetze, 229  
 nicht-holonom, 237  
 nicht-holonome Zwangsbedingungen, 237  
 nichtkonvektiver Fluss, 286  
 Nicken, 255  
 Nieten, 174  
 Normaldehnungen, 135  
 Normalkraftfläche, 63  
 Normalspannungen, 115, 122, 127  
 Normalspannungshypothese, 211
- notwendige Extremumsbedingung, 365  
 Nullpunktsniveau, 240  
 Nullstäbe, 52  
 Nullstabsregeln, 52, 55  
 Nutation, 255
- Oberflächenzufuhr, 286  
 objektiver Tensor, 325  
 observational point, 279  
 offenes System, 280  
 offenes Volumen, 278  
 Orthogonalitätsrelationen, 244, 319
- partielle Differentialgleichungen, 300  
 pdV-Thermodynamik, 338  
 PdvK, 376  
 PdvV, 368  
 Pendelstütze, 47  
 Pendelstab, 47  
 physikalische Randbedingung, 187, 374  
 Piola-Kirchhoff-Spannung, 144  
 Piola-Kirchhoff-Spannungstensoren, 122  
 pitch, 255  
 PMO, 331, 348  
 Poissonbeziehung, 245  
 Poissonzahl, 142  
 Pol, 244  
 polarer Vektor, 25  
 polares Flächenmoment, 200  
 Polarkoordinatenbasis, 224  
 Polkurve, 247  
 Potentialkräfte, 232, 381  
 Potentials, 232  
 potentielle Energie, 232  
 potentielle Energie Massenpunktsystem, 240  
 potentielle Energie Starrkörper, 263  
 Präzession, 255  
 primitive Größe, 18, 21  
 principle of least action, 382  
 principle of material objectivity, 331  
 Prinzip der geringsten Wirkung, 382  
 Prinzip der materiellen Objektivität, 300, 331, 348  
 Prinzip der virtuellen Kraft, 376  
 Prinzip der virtuellen Verrückungen, 368  
 Prinzip von d'Alembert, 23

- Prinzip von Torricelli, 372  
Produktionen, 286
- quasistatische Prozessführung, 301, 337  
Quellstärke, 289  
Querkontraktion, 142  
Querkontraktionszahl, 139, 142  
Querkraftbiegung, 113  
Querkraftfläche, 63
- räumliche Beschreibung, 279  
Radialbeschleunigung, 225  
radiale Wechselwirkung, 238  
Radialgeschwindigkeit, 225  
Rahmen, 78  
Rakete, 296  
Rastpolbahn, 247  
Reaktionskraft, 22  
Rechtsgradient, 125  
reference configuration, 284  
reference placement, 284  
Referenzfläche, 122  
Referenzkonfiguration, 133, 284  
Referenzspannung, 144  
Referenztemperatur, 136  
Reibkegel, 107  
reibungsfreies Fluid, 300  
reine Biegung, 113  
reines Moment, 26  
Relativbeschleunigung, 322  
Relativgeschwindigkeit, 321, 330, 381  
restraint, 47  
Restungleichung, 342, 344  
Resultierende, 19, 30  
Reziprozitätssatz von Maxwell und Betti, 355  
Ritterscher Schnitt, 55  
Rodrigues Formel, 256  
roll, 255  
Rollen, 255  
Rotation starrer Körper, 243  
ruhender Beobachter, 224
- Sätze von Castigliano, 347, 356  
Saint-Venant-Torsion, 198  
Satz von Menabrea, 356  
Satz von Steiner, 162, 195, 264  
Schädigungsmechanismen, 173  
Scherdehnungen, 135  
Scherfestigkeit, 174  
Scherspannungen, 115, 122, 127  
Scherung, 114  
Scherviskosität, 306  
Scherwellen, 316  
Scherwinkel, 168  
Schiebehülse, 48  
schiefen Biegung, 192  
schiefer Biegung, 182  
schlanker Balken, 174  
Schmiegekreis, 87, 226  
Schnittgrößen, 63  
Schnittufer links, 64, 65  
Schnittufer rechts, 65  
Schub, 296, 299  
Schubbruch, 211  
Schubspannungen, 122  
Schubspannungsfluss, 175  
Schubspannungshypothese, 211  
Schubstarrheit, 353  
schubsteifer Balken, 172, 352  
schwache Form, 369, 376  
Schweißen, 174  
Schwerpunkt, 36  
Schwerpunkt Massenpunktsystem, 239  
Schwerpunktsatz, 239, 260  
Schwerpunktsatz 2D, 261  
Seil, 48  
Selbstsperrung, 105  
semiinverse Methode, 141, 166, 199, 306  
singuläre Fläche, 119  
singuläre Punkte, 288  
Skalar, 19  
Skalarprodukt, 19  
skleronom, 236  
Spannungsfluss, 142  
spannungskontrolliert, 346  
Spannungskonzentrator, 142  
Spannungsnachweis, 174  
Spannungspotential, 342  
Spannungsraum, 351  
Spannungstensor, 116  
Spannungstensor in Komponenten, 122  
Spannungsvektor, 66, 115



- spatial description, 279  
 Spatproduktregel, 21  
 Spektraldarstellung, 123  
 spezifische Wärme, 336  
 spezifische Wärme bei konstanter Dehnung, 349  
 spezifisches Gewicht, 22  
 Spin, 255  
 Spintensor, 321  
 Stabilitätsbedingung Fachwerk, 52  
 starke Form, 369  
 starre Bindung, 241  
 Statik, 17  
 stationär, 271  
 stationäre Strömung, 306  
 statisch überbestimmt, 47  
 statisch bestimmtes Fachwerk, 52  
 statisch bestimmtes System, 22, 30, 47  
 statisch unbestimmte Systeme, 144  
 statisch unterbestimmt, 47  
 statische Reibkraft, 103  
 statische Ruhelage, 381  
 statischer Reibbeiwert, 103  
 statisches Moment, 39, 170  
 Steifigkeitstensor, 137  
 Steifigkeitstetrade, 137  
 Steiner-Anteile, 164  
 Stoffgleichungen, 300  
 Stokessche Reibung, 381  
 Stokesscher Integralsatz, 206  
 stored energy, 346  
 stored energy density, 345  
 Strahlungsterm, 337  
 Stromfaden, 306  
 substantielle Zeitableitung, 285  
 Symmetrie des Spannungstensors, 126
- Tabellenverfahren, 37, 163  
 Tachometergeschwindigkeit, 223  
 Tangentialbeschleunigung, 227  
 Temperatur, 336  
 Tensor 2. Stufe, 116  
 Testfunktion, 365  
 Theorie 1. Ordnung, 112  
 thermische Dehnungen, 136  
 thermische Zustandsgleichung, 301, 344
- Thermodynamik quasistatischer Prozesse, 338  
 thermoelastischer Festkörper, 340  
 thrust, 296  
 Torsion, 89, 114, 227  
 totale Dehnung, 136  
 totale Zeitableitung, 280  
 Träger, 62  
 Trägheitskraft, 22  
 Trägheitsterme, 322  
 Tragwerk statisch überbestimmt, 58  
 Tragwerk statisch bestimmt, 58  
 Tragwerk statisch unterbestimmt, 58  
 Traktion, 115  
 Translation starrer Körper, 243  
 Translationsbewegung, 29  
 transversal-isotrop, 264  
 Transversalschwingung, 386  
 Transversalwelle, 316  
 Tresca-Kriterium, 211  
 Tribologie, 102  
 trockene Reibung, 102  
 Trockenreibung, 102
- undeformiertes System, 139  
 Unwucht, 263
- Variation am festen Rand, 365, 374  
 Variation bei fester Kraft, 368  
 Variationsrechnung, 363  
 Variationssymbol, 365  
 Vektor, 19  
 Verdrehvektor, 179  
 Verdrillung, 201  
 Vergleichsspannung, 211  
 Versagenshypothese, 211  
 Verschiebungsgradient, 135  
 Verschiebungsvektor, 134  
 Verwindung, 202  
 virtuelle Beschleunigungsarbeit, 368  
 virtuelle Formänderungsenergie, 368  
 virtuelle Impulsarbeit, 369  
 virtuelle Verdrehung, 372  
 viskoses Fließen, 112  
 Viskositätskoeffizienten, 305  
 Volumenkraft, 124

- Volumenviskosität, 306
- Volumenzentrum, 37
- von Mises-Spannung, 213
  
- Wärmeenergie, 335
- Wärmeflussvektor, 336
- Wärmeleitungsgleichung, 139
- Wölbkrafttorsion, 198
- wahre Spannung, 144
- Wandhaftung, 307
- Weg, 223, 225
- Wegunabhängigkeit der Arbeit, 381
- Wellengleichung, 316, 385
- Wichte, 22
- Widerstandsmoment, 155
- Winkelgeschwindigkeit, 225
- Winkelgeschwindigkeitstensor, 245, 321
- Winkelgeschwindigkeitsvektor, 245, 321
- Wirbeltensor, 325
  
- Wirkung, 382
  
- yaw, 255
- Youngscher Modul, 143
  
- Zeitableitung Massenträgheitstensor, 268
- zentrale Kräftegruppe, 30, 58
- Zentralkraft, 238
- Zentrifugalkraft, 23
- Zentrifugalmomente, 263
- Zentripetalbeschleunigung, 225, 227, 322
- Zentripetalkraft, 23
- Zerreißfestigkeit, 173
- Zufuhr, 286
- Zufuhrterm, 335
- Zug, 113
- Zugspannungen, 115
- Zwangskraft, 22, 233
- Zylinderkoordinaten, 196, 198