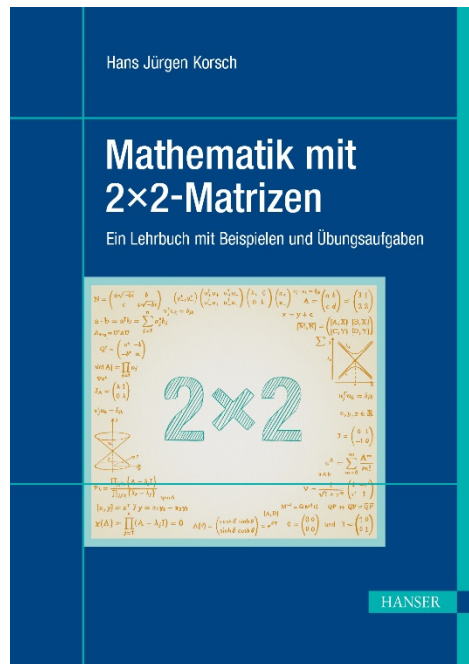


HANSER



Leseprobe

zu

Mathematik mit 2 x 2 Matrizen

von Hans Jürgen Korsch

Print-ISBN: 978-3-446-46693-7

E-Book-ISBN: 978-3-446-46805-4

Weitere Informationen und Bestellungen unter
<http://www.hanser-fachbuch.de/978-3-446-46693-7>

sowie im Buchhandel

© Carl Hanser Verlag, München

Vorwort

Matrizen sind ein Schlüsselkonzept der linearen Algebra. Sie ermöglichen eine einfache und übersichtliche Beschreibung komplexer mathematischer Zusammenhänge. Daher werden sie in Wirtschaft, Technik und Wissenschaft in vielfältiger Weise eingesetzt, um mathematische Operationen zu erleichtern. Zudem helfen Matrix-Methoden bei der numerischen Lösung von Problemen. Dieses Lehrbuch vermittelt die notwendigen mathematischen Grundlagen, um Rechenoperationen mit einfachen sowie speziellen Matrizenarten durchzuführen. Es wendet sich in erster Linie an Studierende der Naturwissenschaften, insbesondere der Physik, zum Selbststudium oder als Begleitmaterial zu Vorlesungen, kann aber allen an den Methoden und Anwendungen der Matrizenrechnung Interessierten gute Dienste leisten.

Zum Aufbau des Buches: In den ersten Kapiteln werden die wichtigsten Grundlagen der Matrix-Algebra dargestellt, also das Rechnen mit Matrizen, die Rolle der Eigenwerte und Eigenvektoren und die wichtigsten Matrixtransformationen, Produktzerlegungen und Matrixfunktionen. Anschließend wird genauer auf spezielle Matrizenarten und Matrixgruppen sowie lineare Abbildungen eingegangen. Kapitel zu komplexen Zahlen, Quaternionen, Matrix-Gruppen und Lie-Algebren runden das Lehrbuch ab.

Das Schwergewicht der Darstellung liegt auf einer sorgfältigen Behandlung für die überschaubaren 2×2 -Matrizen. Hier sind mathematische Beweise explizit ausgeführt, während auf höherdimensionale Verallgemeinerungen oft nur hingewiesen wird.

In jedem Kapitel werden die mathematischen Theoreme und Methoden durch Beispiele, Anwendungen und viele Übungsaufgaben (mit Lösungen) illustriert. Wesentlich mehr Anwendungsbeispiele der Matrizen, hauptsächlich aus den verschiedensten Gebieten der Physik, findet man in dem parallel erschienenen Lehrbuch:

Korsch, Hans Jürgen: *Physik mit 2×2 Matrizen. Ein Lehrbuch mit Beispielen und Übungsaufgaben*, Carl Hanser Verlag 2021, Print-ISBN 978-3-446-46694-4, E-Book-ISBN 978-3-446-46806-1.

Verweise auf diesen Text werden im vorliegenden Buch durch „P2“ angegeben, also beispielsweise als „Mehr dazu findet man in P2, Abschnitt 2.4.“

Viele der Anwendungsbeispiele für einen Einsatz von Matrix-Methoden stammen aus dem Gebiet der Quantenmechanik. Im Rahmen des vorliegenden Buches können die dazu notwendigen mathematischen Grundlagen der Quantenmechanik nur sehr knapp dargestellt werden. Mehr dazu findet man in dem Lehrbuch:

Korsch, Hans Jürgen: *Mathematik der Quantenmechanik*, Carl Hanser Verlag 2019, Print-ISBN 978-3-446-46226-7, E-Book-ISBN 978-3-446-46255-7.

Denjenigen, die noch tiefer in die Matrizen­theorie einsteigen möchten, seien die folgenden Lehrbücher empfohlen:

Gantmacher, Felix R.: *Matrizen­theorie*, Springer Verlag 1986

Kühnel, Wolfgang: *Matrizen und Lie-Gruppen - Eine geometrische Einführung*, Vieweg + Teubner Verlag 2011

Im vorliegenden Buch wurde auf die oft üblichen detaillierten Literaturangaben der Quellen oder der weiterführenden Arbeiten weitgehend verzichtet, da es nach Ansicht des Autors zunehmend einfacher ist, weitere Informationen zu interessanten Themen im Internet zu „er-googeln“, beispielsweise über die immer besser werdenden Einträge bei Wikipedia. Voraussetzung dafür sind natürlich Grundkenntnisse der Thematik und der relevanten Schlagwörter. Quellenangaben gibt es jedoch dort, wo dies unverzichtbar erschien, beispielsweise weil der vorliegende Text sich stark an dieser Literatur orientiert oder weil die betreffenden Arbeiten schwer auffindbar sind.

Ein paar Worte zur Rolle der vielen Aufgaben im Text. Sie sind bewusst einfach gehalten und lassen sich in der Regel in wenigen Denk- und Rechenschritten lösen. Sie haben einerseits das Ziel, dazu anzuregen, aktiv an der Entwicklung eines Themas mitzuarbeiten, um ein besseres Verständnis zu erreichen. Andererseits sollen auf diese Weise Nebenrechnungen, die den Textfluss stören könnten, ausgelagert werden. In allen Fällen findet man ausführliche Lösungen am Ende jedes Kapitels.

Der vorliegende Text beruht auf den Vorlesungen des Autors zu den mathematischen Grundlagen der Physik an der TU Kaiserslautern. Der Autor dankt den ehemaligen Mitgliedern seiner Arbeitsgruppe für viele Anregungen und Kommentare.

Weitere Hinweise und Vorschläge bitte an

h.j.korsch@gmail.com.

Eine aktuelle Korrekturliste und weitere Informationen findet man unter

<https://www.hanser-fachbuch.de>.

Mein Dank gilt auch dem Hanser Verlag für die freundliche Aufnahme des Buches und die hilfreiche Unterstützung durch sein Lektorat.

Kaiserslautern, Oktober 2020

Hans Jürgen Korsch

Inhalt

1	Matrizen: Grundlagen	11
1.1	Lineare Räume	11
1.2	Quadratische Matrizen	13
1.2.1	Determinante, Spur und Inverse	15
1.2.2	Matrizen und lineare Abbildungen	17
1.2.3	Blockmatrizen	18
1.3	Eigenwerte und Eigenvektoren	21
1.3.1	Orthogonale Systeme von Eigenvektoren	25
1.3.2	Rechte und linke Eigenvektoren	26
1.4	Lösungen der Aufgaben	30
2	Transformationen, Matrixfunktionen und Metrik	37
2.1	Ähnlichkeitstransformation und Singulärwertzerlegung	37
2.1.1	Transformation auf Diagonalform	38
2.1.2	Singulärwertzerlegung	40
2.1.3	Die Jordan-Normalform	42
2.1.4	Die Jordan-Arnold kanonische Form	44
2.2	Matrixfunktionen	46
2.2.1	Elementare Matrixfunktionen	48
2.2.2	Matrixfunktionen und SN-Zerlegung	52
2.2.3	Matrixfunktionen und Jordan-Normalform	54
2.3	Metrik und Matrixnorm	55
2.3.1	Norm, Matrixnorm und Operatornorm	56
2.3.2	Koordinatensysteme und ihre Metrik	57
2.4	Lösungen der Aufgaben	61
3	Spezielle Matrizen und Matrixgruppen	67
3.1	Hermiteische Matrizen	67
3.1.1	Eigenwerte und Eigenvektoren	68
3.1.2	Berry-Phasen	70
3.2	Komplexe symmetrische Matrizen	72

3.3	Unitäre Matrizen	72
3.3.1	Orthogonale Matrizen	74
3.3.2	Eigenwerte und Eigenvektoren	76
3.4	Normale Matrizen	77
3.5	Symplektische Matrizen	77
3.5.1	Reelle symplektische Matrizen	79
3.5.2	Pseudounitäre Matrizen	80
3.5.3	Pseudoorthogonale Matrizen	82
3.6	Matrixgruppen	83
3.6.1	Matrix-Lie-Gruppen	85
3.6.2	Lie-Gruppen und Lie-Algebren	89
3.6.3	Lie-Algebren	90
3.7	Positive Matrizen	92
3.8	Lösungen der Aufgaben	93
4	Matrizen als lineare Abbildungen	97
4.1	Abbildung durch eine Defektmatrix	98
4.2	Abbildung durch eine invertierbare Matrix	99
4.2.1	Spezielle einfache Abbildungen	103
4.2.2	Translationen und affine Abbildungen	107
4.2.3	Abbildungen und Singulärwertzerlegung:	108
4.2.4	Invariante Mengen	109
4.2.5	Homogene Darstellung	110
4.3	Der Wertebereich	111
4.4	Lösungen der Aufgaben	114
5	Komplexe Zahlen und Quaternionen	119
5.1	Komplexe Zahlen	120
5.2	Pseudokomplexe Zahlen	123
5.3	Quaternionen & Co.	126
5.3.1	Quaternionen	126
5.3.2	Koquaternionen	132
5.3.3	Bikomplexe Zahlen	134
5.3.4	Biquaternionen	136
5.3.5	Oktonionen	138
5.4	Pseudokomplexe und quaternionische Matrizen	138
5.4.1	Komplexe und pseudokomplexe Matrizen	138
5.4.2	Quaternionische und koquaternionische Matrizen	140
5.5	Lösungen der Aufgaben	144

6	Matrix-Algebren und Lie-Algebren	149
6.1	Algebren	149
6.2	Lie-Algebren.....	151
6.2.1	Die Gruppe $SU(2)$ und die Algebra $\mathfrak{su}(2)$	153
6.2.2	Die Gruppe $SU(1,1)$ und die Algebra $\mathfrak{su}(1,1)$	154
6.2.3	Kanonische Ähnlichkeitstransformationen	155
6.2.4	Exponentielle Operatorprodukte	156
6.3	Geometrisches Produkt und die Geometrische Algebra	157
6.3.1	Die geometrische Algebra der Ebene	159
6.3.2	Die geometrische Algebra des Raumes.....	161
6.3.3	Die Isometrien des \mathbb{R}^3	167
6.3.4	Matrixdarstellung der geometrischen Algebra	168
6.4	Lösungen der Aufgaben	170
A	Vermischtes.....	175
A.1	Quadratische Formen.....	175
A.2	Das Kronecker-Produkt.....	176
A.2.1	Quadratische Matrizen	178
A.2.2	Matrix-Vektor-Transformation	179
A.3	Gauß-Integrale.....	180
A.4	Lösungen der Aufgaben	181
	Index.....	183

1

Matrizen: Grundlagen

*„Mathematicians basically know everything there is to know about matrices.
It's one of the few subjects of math that's thoroughly well understood.“
— J. Weinstein, Boston University.*

In diesem Kapitel werden die wichtigsten Kenntnisse für das Arbeiten mit Matrizen bereitgestellt. Wir behandeln dabei in den meisten Fällen quadratische $n \times n$ -Matrizen mit $n = 2, 3, \dots$, deren Elemente in der Regel komplexe oder reelle Zahlen sind. Wir bezeichnen die Menge dieser Matrizen als $M_n(\mathbb{C})$ bzw. $M_n(\mathbb{R})$. Meist beschränken wir uns sogar auf 2×2 -Matrizen, wobei allerdings Vorsicht geboten ist, denn nicht alle ihre Eigenschaften lassen sich auf höhere Matrixdimensionen übertragen. Mit diesen quadratischen Matrizen kann man unterschiedliche Rechenoperationen durchführen. Man kann sie addieren, sie mit Zahlen multiplizieren und sie auch miteinander multiplizieren, sie bilden eine Algebra. Mehr über die mathematischen Strukturen von Zahlen und Algebren wird in den Kapiteln 5 und 6 dargestellt. Spezielle Typen von Matrizen sind von besonderer Bedeutung, wie beispielsweise hermitesche, symplektische, orthogonale oder unitäre Matrizen. Einige dieser spezielle Matrizentypen bilden eine Gruppe, dazu mehr in Kapitel 3.

■ 1.1 Lineare Räume

Matrizen lassen sich auffassen als lineare Abbildungen eines Vektorraumes auf einen zweiten (mehr dazu in Kapitel 4). Es sei kurz an die Definition eines Vektorraumes erinnert: Ein **Vektorraum** oder auch **linearer Raum** über den reellen oder komplexen Zahlen ist eine Menge von Elementen, wir nennen sie auch **Vektoren** und bezeichnen sie mit kleinen fetten römischen Buchstaben wie **a** oder **b**, in der zwei Operationen definiert sind, eine Addition der Vektoren, geschrieben als **a + b**, und eine Multiplikation mit Zahlen α , geschrieben als $\alpha\mathbf{a}$, wobei wir hier entweder griechische oder nicht-fette römische Buchstaben für die Zahlen verwenden. Damit man sinnvoll rechnen kann, müssen einige wenige Eigenschaften erfüllt sein:

- Die Addition muss assoziativ und kommutativ sein. Es muss also für alle Vektoren gelten $\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}$ und $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$.
- Es muss ein **neutrales Element** der Addition existieren, der **Nullvektor** **0**, mit $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$ für alle **a**.
- Es muss zu jedem Vektor **a** ein inverser Vektor **b** existieren mit $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{0}$. Wir schreiben den inversen Vektor auch als $\mathbf{b} = -\mathbf{a}$.
- Die Addition von Vektoren und die Multiplikation mit Zahlen müssen harmonisieren, das heißt es muss gelten $\alpha(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \alpha\mathbf{a} + \alpha\mathbf{b}$ und $(\alpha + \beta)\mathbf{a} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{a}$ sowie $(\alpha\beta)\mathbf{a} = \alpha(\beta\mathbf{a})$ und $1\mathbf{a} = \mathbf{a}$.

Die kleinste Anzahl n von Vektoren $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$, durch die man jeden Vektor \mathbf{a} als eine **Linearkombination**

$$\mathbf{a} = \alpha_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \mathbf{x}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{x}_n \quad (1.1)$$

mit Koeffizienten α_j darstellen kann, heißt **Dimension** n des Vektorraumes und die \mathbf{x}_j nennt man eine **Basis**.

Ein Beispiel eines Vektorraumes ist der bekannte dreidimensionale euklidische Raum \mathbb{R}^3 mit den kartesischen Basisvektoren $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ oder, noch einfacher, der zweidimensionale euklidische Raum, die Ebene mit den kartesischen Basisvektoren \mathbf{e}_1 und \mathbf{e}_2 . Jeder Vektor aus diesem Raum lässt sich darstellen durch die Linearkombination $\mathbf{a} = a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2$ mit reellen Koeffizienten a_1 und a_2 , was man auch kurz als $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ schreiben kann, ein sogenannter Spaltenvektor. Der transponierte Vektor $\mathbf{a}^T = (a_1, a_2)$ ist dann ein Zeilenvektor und den Spaltenvektor schreibt man auch als $\mathbf{a} = (a_1, a_2)^T$. Wir sollten uns noch einmal vergewissern, dass diese Spaltenvektoren (oder auch die Zeilenvektoren) mit komponentenweiser Addition zweier Vektoren und mit komponentenweiser Multiplikation mit einer Zahl wirklich einen Vektorraum bilden!

Wenn wir komplexwertige Koeffizienten¹ zulassen, ist es zweckmäßig, neben dem transponierten Vektor einen hermitesch konjugierten Vektor $\mathbf{a}^\dagger = (a_1^*, a_2^*)$ zu definieren, also einen transponierten Vektor mit komplex konjugierten Koeffizienten. In einem Vektorraum über den reellen Zahlen ist also die hermitesche Konjugation gleich der Transposition.

Wir definieren jetzt ein weiteres Produkt als Summe der Produkte der Komponenten von \mathbf{a}^\dagger und \mathbf{b} :

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a}^\dagger \mathbf{b} = \sum_{j=1}^n a_j^* b_j. \quad (1.2)$$

Dieses Produkt liefert nicht nur als Ergebnis eine komplexe Zahl, einen Skalar, sondern besitzt alle Eigenschaften eines komplexen oder reellen **Skalarproduktes**:

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} \quad \mathbf{a} \cdot (\lambda \mathbf{b}) = \lambda \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}, \quad \lambda \in \mathbb{C} \quad (1.3)$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{a})^* \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \geq 0 \quad (= 0 \text{ nur für } \mathbf{a} = \mathbf{0}). \quad (1.4)$$

Mehr dazu in Abschnitt 2.3. Wir können dann von dem Betrag, oder der **Norm**², $|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} \geq 0$ eines Vektors sprechen. Normierte Vektoren haben den Betrag eins. Vektoren, deren Skalarprodukt gleich null ist, nennt man **orthogonal**. Es gelten die Ungleichungen

$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}| \quad \text{und} \quad |\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| |\mathbf{b}|, \quad (1.5)$$

die **Dreiecksungleichung** und die **Cauchy-Schwarz-Ungleichung**.

Manchmal werden auch andere Schreibweisen für Vektoren benutzt, in der Physik beispielsweise eine Kennzeichnung durch einen Pfeil wie \vec{a} . In der Quantenphysik findet man oft die Dirac-Schreibweise eines Vektors als $|a\rangle$; der hermitesch konjugierte Vektor ist dann $\langle a|$ und das Skalarprodukt wird zu $\langle a|b\rangle$.

Die oben erwähnte kartesische Basis ist **orthonormiert**,

$$\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_k = \delta_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{für } j = k \\ 0 & \text{für } j \neq k \end{cases} \quad (1.6)$$

¹ Ein kurze Einführung in die komplexen Zahlen \mathbb{C} findet man in Abschnitt 5.1.

² Da es andere Vektornormen gibt, nennt man diese Norm auch **euklidische Norm** und bezeichnet sie dann auch als $\|\mathbf{a}\|_2$.

mit dem Kronecker-Delta δ_{jk} . Wenn wir einen Vektor \mathbf{a} in dieser orthonormierten Basis ausdrücken,

$$\mathbf{a} = a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + \dots + a_n \mathbf{e}_n = \sum_{j=1}^n a_j \mathbf{e}_j, \quad (1.7)$$

dann können wir die Koeffizienten a_j ermitteln, indem wir das Skalarprodukt des Vektors \mathbf{a} mit den Basisvektoren bilden:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_k = \sum_{j=1}^n a_j \underbrace{\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_k}_{=\delta_{jk}} = a_k. \quad (1.8)$$

Unter einer **Matrix** versteht man ein rechteckiges Tableau von Elementen, von denen wir hier fast immer annehmen, dass es sich um reelle oder komplexe Zahlen handelt.³ Man bezeichnet die horizontalen Anordnungen als **Zeilen**, die vertikalen als **Spalten** der Matrix. Das Matrixelement A_{jk} steht dabei in der j -ten Zeile und der k -ten Spalte der Matrix.⁴ Eine Matrix mit m Zeilen und n Spalten bezeichnet man als eine $m \times n$ -Matrix und schreibt $\mathbf{A} = (A_{jk})$, $j = 1, \dots, m$, $k = 1, \dots, n$. Man kann also einen Zeilenvektor wie $(1, 2)$ als Matrix mit nur einer Zeile und zwei Spalten auffassen und entsprechend einen Spaltenvektor als eine einspaltige Matrix. Matrizen mit gleichem m und gleichen n nennt man gleichartig.

■ 1.2 Quadratische Matrizen

Hier interessieren wir uns vor allem für Matrizen mit der gleichen Anzahl von Zeilen und Spalten, also für **quadratische** Matrizen, insbesondere für 2×2 -Matrizen wie beispielsweise

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad (1.9)$$

eine Matrix mit zwei Zeilen und zwei Spalten.

Die Addition zweier gleichartiger Matrizen erfolgt elementweise, und bei der Multiplikation einer Matrix mit einer Zahl wird jedes Element der Matrix mit dieser Zahl multipliziert:

$$\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \end{pmatrix}, \quad \alpha \mathbf{A} = \alpha \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{pmatrix}. \quad (1.10)$$

Mit diesen beiden Operationen wird die Menge gleichartiger Matrizen zu einem Vektorraum. Darüber hinaus lassen sich Matrizen auch miteinander multiplizieren. Das Matrixelement der Produktmatrix mit den Indizes j, k ist das elementweise Produkt der j -ten Zeile der ersten Matrix mit der k -ten Spalte der zweiten, für 2×2 -Matrizen also gleich

$$\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 a_2 + b_1 c_2 & a_1 b_2 + b_1 d_2 \\ c_1 a_2 + d_1 c_2 & c_1 b_2 + d_1 d_2 \end{pmatrix}. \quad (1.11)$$

³ Ausnahmen mit pseudokomplexen und quaternionischen Elementen findet man in Abschnitt 5.4.

⁴ Als Merksatz für die Reihenfolge der Indizes dient: „Zeilen zuerst, Spalten später.“

Wenn man es mit kleinen Matrizen zu tun hat, insbesondere mit 2×2 -Matrizen, dann ist man versucht, die Gleichungen wie oben voll auszuschreiben und alle Rechnungen explizit durchzuführen. Manchmal ist das sinnvoll, aber oft führt es zu einem großem Rechenaufwand. Dazu als Warnung ein Beispiel in der folgenden Aufgabe:

Aufgabe 1.1 (Lös. Seite 30): Die Matrixmultiplikation ist assoziativ und distributiv, aber im Allgemeinen nicht kommutativ. Es gilt

$$\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C}, \quad \mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}, \quad (\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}$$

und im Allgemeinen $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$. Beweisen Sie dies für 2×2 -Matrizen. .

In der angegebenen Lösung wird, wie oben erwähnt, für 2×2 -Matrizen explizit gerechnet, allerdings mit einem unverhältnismäßigen Rechen- und Schreibaufwand. Das lässt sich vermeiden, wenn man anders vorgeht. Mit der Matrixschreibweise $\mathbf{A} = (A_{jk})$, $\mathbf{B} = (B_{jk})$, usw. sind die Matrixelemente der Summenmatrix $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ und der Produktmatrix \mathbf{AB} durch

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})_{ik} = A_{ik} + B_{ik}, \quad (\mathbf{AB})_{ik} = \sum_j A_{ij}B_{jk} \quad (1.12)$$

gegeben. Hier unterstellen wir, dass alle vorkommenden Matrizen quadratische $n \times n$ -Matrizen sind und vereinbaren, dass die Summen über die Indizes von 1 bis n laufen. Damit beweisen wir die Assoziativität des Matrixproduktes in einer einzigen Zeile:

$$(\mathbf{A}(\mathbf{BC}))_{ik} = \sum_j A_{ij}(\mathbf{BC})_{jk} = \sum_{j\ell} A_{ij}B_{j\ell}C_{\ell k} = \sum_{\ell} (\mathbf{AB})_{i\ell}C_{\ell k} = ((\mathbf{AB})\mathbf{C})_{ik}. \quad (1.13)$$

Das lässt sich aber noch kürzer formulieren mithilfe einer **Summenkonvention**: Über doppelt vorkommende Indizes in einem Produkt wird summiert. Damit entfallen die Summationszeichen und die Gleichung oben verkürzt sich zu

$$(\mathbf{A}(\mathbf{BC}))_{ik} = A_{ij}(\mathbf{BC})_{jk} = A_{ij}B_{j\ell}C_{\ell k} = (\mathbf{AB})_{i\ell}C_{\ell k} = ((\mathbf{AB})\mathbf{C})_{ik}. \quad (1.14)$$

Es erfordert allerdings etwas Übung, solche Ausdrücke zu lesen. Als weiteres Beispiel verwenden wir diese Konvention in dem Beweis des Distributivgesetzes aus der Aufgabe. Es gilt für die Matrixelemente von $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C})$

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}))_{ik} &= A_{ij}(\mathbf{B} + \mathbf{C})_{jk} = A_{ij}(B_{jk} + C_{jk}) = A_{ij}B_{jk} + A_{ij}C_{jk} \\ &= (\mathbf{AB})_{ik} + (\mathbf{AC})_{ik} = (\mathbf{AB} + \mathbf{AC})_{ik}. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Eine derartige Summenkonvention ist (fast) unerlässlich in der Relativitätstheorie, wo sie als einsteinsche Summenkonvention bezeichnet wird, oder ganz allgemein in der Rechnung mit **Tensoren**.

Die **Nullmatrix** $\mathbf{0}$ ist das neutrale Element der Matrixaddition, also $\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{A}$ für alle Matrizen \mathbf{A} , und die **Einheitsmatrix** \mathbf{I} ist das neutrale Element der Matrixmultiplikation mit $\mathbf{IA} = \mathbf{A}$ für alle Matrizen \mathbf{A} . Für den 2×2 -Fall haben die beiden Matrizen die Form

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.16)$$

Wie wir gesehen haben, kann man mit den quadratischen Matrizen also rechnen, ähnlich wie mit den reellen oder komplexen Zahlen. Sie bilden eine sogenannte **Algebra**. Mehr über Algebren finden wir in Abschnitt 6.1.

Wie schon in Aufgabe 1.1 erwähnt, ist das Matrixprodukt im Allgemeinen nicht kommutativ. Ein wichtiges Hilfsmittel zur Beschreibung dieser Nicht-Kommutativität ist der sogenannte

Kommutator

$$[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = \mathbf{AB} - \mathbf{BA}. \quad (1.17)$$

Das Klammerpaar $[\]$ bezeichnet man als **Kommutatorklammer**, die eine Matrix-Algebra zu einer sogenannten **Lie-Algebra** macht (mehr darüber in Kapitel 6). An dieser Stelle soll dazu nur eine wichtige Eigenschaften der Kommutatorklammer gezeigt werden, die **Leibniz-Regel**

$$[\mathbf{A}, \mathbf{BC}] = \mathbf{B}[\mathbf{A}, \mathbf{C}] + [\mathbf{A}, \mathbf{B}]\mathbf{C}, \quad (1.18)$$

die für viele Rechnungen nützlich ist. Sie folgt direkt durch Ausschreiben der Klammern, wobei man auf die Reihenfolge der Faktoren achten muss,

$$\begin{aligned} [\mathbf{A}, \mathbf{BC}] &= \mathbf{ABC} - \mathbf{BCA} = \mathbf{ABC} - \mathbf{BCA} + \mathbf{BAC} - \mathbf{BAC} \\ &= \mathbf{BAC} - \mathbf{BCA} + \mathbf{ABC} - \mathbf{BAC} \\ &= \mathbf{B}(\mathbf{AC} - \mathbf{CA}) + (\mathbf{AB} - \mathbf{BA})\mathbf{C} = \mathbf{B}[\mathbf{A}, \mathbf{C}] + [\mathbf{A}, \mathbf{B}]\mathbf{C}. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Das Matrizenprodukt, das wir hier kennengelernt haben, ist aber nicht das einzige Produkt, das man für Matrizen sinnvoll definieren kann. Es existiert außerdem das sogenannte **Kronecker-Produkt** (vgl. Anhang A.2), das allerdings eine höherdimensionale Matrix erzeugt. Aus einer Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ bildet man die **transponierte Matrix** \mathbf{A}^T durch eine Spiegelung an der Hauptdiagonale, die **komplex konjugierte Matrix** \mathbf{A}^* und die **hermitesch konjugierte Matrix** als die Transponierte der hermitesch Konjugierten:

$$\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} a^* & b^* \\ c^* & d^* \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^\dagger = (\mathbf{A}^*)^T = \begin{pmatrix} a^* & c^* \\ b^* & d^* \end{pmatrix}. \quad (1.20)$$

Spezielle Matrizen sind von besonderer Bedeutung:

- Matrizen mit $\mathbf{A} = \mathbf{A}^\dagger$ nennt man **hermitesch**,
- Matrizen mit $\mathbf{A}\mathbf{A}^\dagger = \mathbf{A}^\dagger\mathbf{A} = \mathbf{I}$ nennt man **unitär**,
- Matrizen mit $\mathbf{A}\mathbf{A}^\dagger = \mathbf{A}^\dagger\mathbf{A}$ nennt man **normal**.

Klarerweise ist jede hermitesche und jede unitäre Matrix auch normal.

1.2.1 Determinante, Spur und Inverse

Die inverse Matrix \mathbf{A}^{-1} zu $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, oder kurz die **Inverse**, ist definitiongemäß die Matrix mit $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$. Das wird erfüllt durch

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det\mathbf{A}} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \quad (1.21)$$

mit der **Determinante**

$$\det\mathbf{A} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc, \quad (1.22)$$

was man durch Nachrechnen in der folgenden Aufgabe 1.2 bestätigt. Die Inverse existiert genau dann, wenn $\det\mathbf{A} \neq 0$. Für die Determinante der Transponierten, der komplex konjugierten und der hermitesch Konjugierten gilt

$$\det\mathbf{A}^T = \det\mathbf{A} \quad \text{und} \quad \det\mathbf{A}^\dagger = \det\mathbf{A}^* = (\det\mathbf{A})^*, \quad (1.23)$$

was man sofort einsieht. Einige weitere Eigenschaften überlassen wir einer Aufgabe:

Aufgabe 1.2 (Lös. Seite 30): (a) Beweisen Sie für 2×2 -Matrizen die folgenden Rechenregeln:

$$\det(\mathbf{AB}) = \det \mathbf{A} \det \mathbf{B}, \quad \det(\mathbf{A}^{-1}) = (\det \mathbf{A})^{-1}.$$

(b) Beweisen Sie die Formel (1.21) für die inverse Matrix.

(c) Beweisen Sie die folgenden Formeln für die hermitesch Konjugierte, die Transponierte und die Inverse eines Produktes:

$$(\mathbf{AB})^\dagger = \mathbf{B}^\dagger \mathbf{A}^\dagger, \quad (\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T, \quad (\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}^{-1}.$$

Alle in dieser Aufgabe bewiesenen Aussagen sind allgemein für $n \times n$ -Matrizen gültig.

Unter der **Spur** einer Matrix versteht man die Summe der Diagonalelemente,

$$\text{spur} \mathbf{A} = \sum_j A_{jj}, \quad (1.24)$$

für unsere 2×2 -Matrizen $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ gilt also $\text{spur} \mathbf{A} = a + d$. Aus der Definition der Spur ergibt sich direkt die Rechenregel

$$\text{spur}(\alpha \mathbf{A} + \beta \mathbf{B}) = \alpha \text{spur} \mathbf{A} + \beta \text{spur} \mathbf{B}, \quad (1.25)$$

für die Addition und die Multiplikation mit einer Zahl. Für die Matrix-Multiplikation gilt

$$\text{spur}(\mathbf{AB}) = \sum_{jk} A_{jk} B_{kj} = \sum_{jk} B_{kj} A_{jk} = \text{spur}(\mathbf{BA}). \quad (1.26)$$

Daraus folgt sofort, dass ein Kommutator **spurfrei** ist, $\text{spur}[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = 0$, und dass man unter der Spur die Matrizen zyklisch vertauschen darf:

$$\text{spur}(\mathbf{ABC}) = \text{spur}(\mathbf{BCA}) = \text{spur}(\mathbf{CAB}). \quad (1.27)$$

Gleichartige Matrizen bilden einen Vektorraum und man kann sich durch eine kurze Rechnung davon überzeugen, dass durch

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \text{spur} \mathbf{A}^\dagger \mathbf{B} = \sum_{jk} A_{jk}^* B_{kj} \quad (1.28)$$

auf diesem Vektorraum ein Matrix-Skalarprodukt der Matrizen $\mathbf{A} = (A_{jk})$ und $\mathbf{B} = (B_{jk})$ definiert wird, das sogenannte **Frobenius-Skalarprodukt** (nach dem deutschen Mathematiker Ferdinand Georg Frobenius (1849-1917)). Entsprechend nennt man $\|\mathbf{A}\|$ mit

$$\|\mathbf{A}\|^2 = \text{spur} \mathbf{A}^\dagger \mathbf{A} = \sum_{jk} |A_{jk}|^2 \quad (1.29)$$

die **Frobenius-Norm** der Matrix \mathbf{A} (auch als **Hilbert-Schmidt-Norm** bezeichnet nach den deutschen Mathematikern David Hilbert (1882-1943) und Erhard Schmidt (1876-1959)) mit den Eigenschaften

$$\begin{aligned} \|\alpha \mathbf{A}\| &= |\alpha| \|\mathbf{A}\| \quad \text{für } \alpha \in \mathbb{C}, \\ \|\mathbf{A} + \mathbf{B}\| &\leq \|\mathbf{A}\| + \|\mathbf{B}\| \quad \text{und} \quad \|\mathbf{AB}\| \leq \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{B}\|. \end{aligned} \quad (1.30)$$

Die Frobenius-Norm erfüllt also die **Dreiecksungleichung** wie die Vektornorm (1.5) und sie ist **submultiplikativ**.

Es sei darauf hingewiesen, dass andere Matrixnormen existieren. Insbesondere ist hier die euklidische Matrixnorm

$$\|\mathbf{A}\|_2 = \max_{\|\mathbf{x}\|_2=1} \|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_2 \quad (1.31)$$

zu erwähnen, als ein Beispiel einer sogenannten **Operatornorm**. Diese Norm ist ebenfalls submultiplikativ und hängt mit der Frobenius-Norm durch $\|\mathbf{A}\|_2 \leq \|\mathbf{A}\|$ zusammen. Mehr dazu in Abschnitt 2.3.1.

1.2.2 Matrizen und lineare Abbildungen

Wir wollen hier kurz zu nicht-quadratischen $m \times n$ -Matrizen zurückkehren. Gleichartige Matrizen, also solche mit gleicher Anzahl von m Zeilen und n Spalten, lassen sich gliedweise addieren, auch die Multiplikation einer Matrix mit einer Zahl lässt sich problemlos durchführen, aber bei der Matrixmultiplikation muss man beachten, dass man nur „passende“ Matrizen multiplizieren kann, nämlich eine $m \times n$ Matrix \mathbf{A} mit einer $n \times r$ -Matrix \mathbf{B} . Das liefert eine $m \times r$ -Produktmatrix $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ mit den Matrixelementen

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^n A_{ik} B_{kj}. \quad (1.32)$$

Das lässt sich interpretieren als das Skalarprodukt der i -ten Zeile von \mathbf{A} mit der j -ten Spalte von \mathbf{B} . Es sei dem Leser empfohlen, sich davon zu vergewissern, dass dieses Produkt distributiv und assoziativ ist (vgl. dazu auch die Lösung von Aufgabe 1.1)..

Wendet man eine solche $m \times n$ -Matrix $\mathbf{A} = (A_{jk})$ auf einen n -dimensionalen Vektor \mathbf{x} an, so ergibt sich ein m -dimensionaler Vektor

$$\mathbf{x}' = \mathbf{Ax}. \quad (1.33)$$

Wenn wir in beiden Räumen orthonormierte Basen $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ bzw. $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \dots, \mathbf{e}'_m$ wählen (vgl. Gleichung (1.6)) und die Vektoren als $\mathbf{x} = \sum_{k=1}^n x_k \mathbf{e}_k$ bzw. $\mathbf{x}' = \sum_{j=1}^m x'_j \mathbf{e}'_j$ darstellen, dann gilt für die Komponenten von \mathbf{x}' die Gleichung

$$x'_j = \mathbf{e}'_j \cdot \mathbf{x}' = \mathbf{e}'_j \cdot \mathbf{Ax} = \sum_{k=1}^n \mathbf{e}'_j \cdot \mathbf{Ae}_k x_k = \sum_{k=1}^n A_{jk} x_k \quad (1.34)$$

mit den Matrixelementen

$$A_{jk} = \mathbf{e}'_j \cdot \mathbf{Ae}_k = \mathbf{e}'_j{}^\dagger \mathbf{Ae}_k. \quad (1.35)$$

Die Matrix lässt sich also auffassen als Abbildung eines n -dimensionalen Vektorraums auf einen m -dimensionalen. Dabei werden die kartesischen Basisvektoren $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)^T$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)^T$, usw. auf die Spaltenvektoren der Matrix abgebildet. Diese Spaltenvektoren spannen einen linearen Raum auf; die Dimension dieses **Bildraumes** heißt Spaltenrang. Entsprechend ist der Zeilenrang die Dimension des von den Zeilenvektoren aufgespannten Raumes. Man kann zeigen, dass beide Dimensionen gleich sind, und bezeichnet sie als **Rang** der Matrix. Der Rang ist also gleich der Dimension des Bildraumes.

Für quadratische $n \times n$ -Matrizen ist ihr Rang genau dann maximal, also gleich n , wenn sie invertierbar sind. Das ist genau dann der Fall, wenn ihre Determinante ungleich null ist. Also gilt

$$\text{rang} \mathbf{A} = n \iff \mathbf{A} \text{ invertierbar} \iff \det \mathbf{A} \neq 0. \quad (1.36)$$

Man nennt eine **invertierbare Matrix** auch **regulär** oder **nicht-singulär**.

Die Menge aller Vektoren, die auf den Nullvektor abgebildet werden, heißt **Kern** der Abbildung. Man sollte sich davon überzeugen, dass auch der Kern ein linearer Raum ist. Mehr über die Eigenschaften linearer Matrix-Abbildungen erfahren wir in Kapitel 4.

Oft ist es von Interesse zu wissen, in welcher Beziehung der Bildvektor $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ zum ursprünglichen Vektor \mathbf{x} steht. Darüber gibt ihr Skalarprodukt $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}' = \mathbf{x}^\dagger \mathbf{A}\mathbf{x}$ Auskunft. Man nennt eine quadratische Matrix \mathbf{A} **positiv definit**, wenn für alle Vektoren $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ gilt $\mathbf{x}^\dagger \mathbf{A}\mathbf{x} > 0$, oder **positiv semidefinit** für $\mathbf{x}^\dagger \mathbf{A}\mathbf{x} \geq 0$. Beispiele für positiv definite Matrizen sind die Identität oder, etwas allgemeiner, Diagonalmatrizen mit positiven Diagonalelementen, wovon man sich leicht überzeugen kann, sowie die Matrizen vom Typ $\mathbf{A}^\dagger \mathbf{A}$ nach der folgenden Aufgabe:

Aufgabe 1.3 (Lös. Seite 31): Zeigen Sie: Die Matrix $\mathbf{A}^\dagger \mathbf{A}$ ist positiv semidefinit. Sie ist positiv definit, falls \mathbf{A} maximalen Rang besitzt.

Die positiv definiten Matrizen sollte man aber nicht mit den **positiven** oder den **total positiven** verwechseln. Matrizen mit diesen Eigenschaften werden in Abschnitt 3.7 beschrieben.

1.2.3 Blockmatrizen

Aus vier 2×2 -Matrizen \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} und \mathbf{D} lässt sich durch

$$\overline{\mathbf{M}} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix} \quad (1.37)$$

eine 2×2 -Matrix erzeugen, deren „Matrizelemente“ wieder 2×2 -Matrizen sind. Wir wollen eine solche Matrix als **Blockmatrix** bezeichnen und durch einen Querstrich kennzeichnen. Voll ausgeschrieben in den Matrizelementen der \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} , \mathbf{D} ist eine solche Matrix natürlich eine 4×4 -Matrix und \mathbf{A} , \mathbf{B} , ... sind Untermatrizen. Solche Blockmatrizen treten an verschiedenen Stellen in Anwendungen auf, in der Physik zum Beispiel bei den Dirac-Matrizen (siehe P2, Kapitel 9.5), und es lohnt sich, einige ihrer Eigenschaften zu kennen.

Die Matrixaddition und die Matrixmultiplikation übertragen sich auf die Blockmatrizen und es gilt für die Summe klarerweise

$$\overline{\mathbf{M}}_1 + \overline{\mathbf{M}}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{C}_1 & \mathbf{D}_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{A}_2 & \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{C}_2 & \mathbf{D}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 + \mathbf{B}_1 & \mathbf{A}_2 + \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_2 & \mathbf{D}_1 + \mathbf{D}_2 \end{pmatrix}. \quad (1.38)$$

Für die Multiplikation gilt sogar

$$\overline{\mathbf{M}}_1 \overline{\mathbf{M}}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{C}_1 & \mathbf{D}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{A}_2 & \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{C}_2 & \mathbf{D}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 + \mathbf{B}_1 \mathbf{C}_2 & \mathbf{A}_1 \mathbf{B}_2 + \mathbf{B}_1 \mathbf{D}_2 \\ \mathbf{C}_1 \mathbf{A}_2 + \mathbf{D}_1 \mathbf{C}_2 & \mathbf{C}_1 \mathbf{B}_2 + \mathbf{D}_1 \mathbf{D}_2 \end{pmatrix}, \quad (1.39)$$

das heißt, das Produkt ergibt sich einfach durch Ersetzen der Zahlen in der Vorschrift (1.11) für die Matrix-Multiplikation durch 2×2 -Matrizen, wovon wir uns in einer Aufgabe überzeugen:

Aufgabe 1.4 (Lös. Seite 31): Beweisen Sie die Produktformel (1.39) der Blockmatrizen, und zwar auch für solche, die aus vier $n \times n$ -Matrizen aufgebaut sind.

Besonders einfach wird die Multiplikation von Blockmatrizen, wenn eine der beiden Matrizen die Blockdiagonalform $\overline{\mathbf{K}} = \begin{pmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Y} \end{pmatrix}$ hat. Dann gilt

$$\overline{\mathbf{K}} \overline{\mathbf{M}} = \begin{pmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}\mathbf{A} & \mathbf{X}\mathbf{B} \\ \mathbf{Y}\mathbf{C} & \mathbf{Y}\mathbf{D} \end{pmatrix}, \quad \overline{\mathbf{M}} \overline{\mathbf{K}} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}\mathbf{X} & \mathbf{B}\mathbf{Y} \\ \mathbf{C}\mathbf{X} & \mathbf{D}\mathbf{Y} \end{pmatrix}$$

und für den Kommutator erhält man dann

$$[\overline{\mathbf{M}}, \overline{\mathbf{K}}] = \begin{pmatrix} [\mathbf{A}, \mathbf{X}] & [\mathbf{B}, \mathbf{X}] \\ [\mathbf{C}, \mathbf{Y}] & [\mathbf{D}, \mathbf{Y}] \end{pmatrix}. \quad (1.40)$$

Diese Multiplikationsformeln der Blockmatrizen sollen aber nicht dazu verleiten anzunehmen, dass auch andere Operationen ähnlich einfach sind. Das gilt zwar für die Spur, nicht aber für die Determinante, wie die folgende Aufgabe zeigt:

Aufgabe 1.5 (Lös. Seite 32): Zeigen Sie für $n \times n$ -Matrizen: (a) Für die Spur einer Blockmatrix gilt

$$\text{spur} \overline{\mathbf{M}} = \text{spur} \mathbf{A} + \text{spur} \mathbf{D}.$$

(b) Entgegen einer vorschnellen Vermutung gilt für die Determinante einer Blockmatrix im Allgemeinen $\det \overline{\mathbf{M}} \neq \det \mathbf{A} \det \mathbf{D} - \det \mathbf{B} \det \mathbf{C}$. (c) Für den Spezialfall, dass eine der Untermatrizen \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} , \mathbf{D} in (1.37) eine Nullmatrix $\mathbf{0}$ ist, gilt für $\mathbf{BC} = \mathbf{0}$ bzw. $\mathbf{AD} = \mathbf{0}$

$$\det \overline{\mathbf{M}} = \det \mathbf{A} \det \mathbf{D} \quad \text{bzw.} \quad \det \overline{\mathbf{M}} = \det \mathbf{B} \det \mathbf{C}.$$

Die Lösung dieser Aufgabe für Blockmatrizen, die aus 2×2 -Matrizen aufgebaut sind, stellt nur eine Rechenübung dar und liefert keinen Anhaltspunkt für eine eventuelle Verallgemeinerung des Teils (c) auf $n \times n$ -Matrizen. Deshalb schlagen wir hier einen anderen Weg ein. Zunächst beweisen wir $\det \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix} = \det \mathbf{D}$ durch sukzessives Entwickeln nach der ersten Zeile. Genauso gilt $\det \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix} = \det \mathbf{A}$. Dann erhalten wir unser gesuchtes Resultat für $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ unter Verwendung der Determinatenformel für das Produkt:

$$\det \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} \end{pmatrix} = \det \mathbf{A} \det \mathbf{D}. \quad (1.41)$$

Einige spezielle Typen von Blockmatrizen treten häufiger in Anwendungen auf, und wir wollen dafür einiger Formeln bereitstellen:

Blockmatrizen vom Typ

$$\overline{\mathbf{M}}_{\pm} = \begin{pmatrix} \lambda \mathbf{I} & \mathbf{B}_{\pm} \\ \mathbf{B}_{\pm}^{\dagger} & \gamma \mathbf{I} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \mathbf{B}_{\pm} = \begin{pmatrix} a & b \\ \mp b^* & \pm a^* \end{pmatrix}. \quad (1.42)$$

findet man beispielsweise in der relativistischen Quantenmechanik in P2, Abschnitt 9.5 oder in der Statistik von Zufallsspektren in P2, Abschnitt 10.2. Die Berechnung der Determinante überlassen wir einer Aufgabe:

Aufgabe 1.6 (Lös. Seite 32): Zeigen Sie: Für die Blockmatrix aus Gleichung (1.42) gilt

$$\det \overline{\mathbf{M}}_{\pm} = (\lambda \gamma \mp \det \mathbf{B}_{\pm})^2.$$

Für den speziellen Fall reeller a und b ergibt das Resultat der Aufgabe

$$\det \begin{vmatrix} \lambda & 0 & a & b \\ 0 & \lambda & -b & a \\ a & -b & \gamma & 0 \\ b & a & 0 & \gamma \end{vmatrix} = \det \begin{vmatrix} \lambda & 0 & a & b \\ 0 & \lambda & b & -a \\ a & b & \gamma & 0 \\ b & -a & 0 & \gamma \end{vmatrix} = (\lambda \gamma - a^2 - b^2)^2 \quad (1.43)$$

und genauso finden wir

$$\det \begin{pmatrix} \lambda & 0 & a & b \\ 0 & \lambda & b & a \\ a & -b & \gamma & 0 \\ -b & a & 0 & \gamma \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \lambda & 0 & a & b \\ 0 & \lambda & -b & -a \\ a & b & \gamma & 0 \\ -b & -a & 0 & \gamma \end{pmatrix} = (\lambda\gamma - a^2 + b^2)^2. \quad (1.44)$$

Nützlich ist außerdem die Formel

$$\det \begin{pmatrix} \lambda \mathbf{I} & \mathbf{B} \\ -\mathbf{B}^* & \gamma \mathbf{I} \end{pmatrix} = \det(\lambda\gamma \mathbf{I} + \mathbf{B}^* \mathbf{B}). \quad (1.45)$$

Für rein reelle Blockmatrizen beweist man auf die gleiche Weise

$$\det \begin{pmatrix} x & y & a & b \\ -y & x & -b & a \\ a & -b & x & -y \\ b & a & y & x \end{pmatrix} = (x^2 + y^2 - a^2 - b^2)^2, \quad \det \begin{pmatrix} x & y & a & b \\ -y & x & -b & a \\ -a & b & x & -y \\ -b & -a & y & x \end{pmatrix} = (x^2 + y^2 + a^2 + b^2)^2, \quad (1.46)$$

$$\det \begin{pmatrix} x & y & a & b \\ y & x & b & a \\ a & -b & x & -y \\ -b & a & -y & x \end{pmatrix} = (x^2 - y^2 - a^2 + b^2)^2, \quad \det \begin{pmatrix} x & y & a & b \\ y & x & b & a \\ -a & b & x & -y \\ b & -a & -y & x \end{pmatrix} = (x^2 - y^2 + a^2 - b^2)^2. \quad (1.47)$$

Ein Einblick in die Hintergründe dieser einfachen Formeln wird in Abschnitt 5.4.1 vermittelt.

Die **Inverse einer Blockmatrix** berechnen wir in der folgenden Aufgabe:

Aufgabe 1.7 (Lös. Seite 33): Verifizieren Sie die folgenden äquivalenten expliziten Formeln für die Inverse einer Blockmatrix, falls die auftretenden Inversen existieren:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}^{-1} + \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{A}^{-1} & -\mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{G}^{-1} \\ -\mathbf{G}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{A}^{-1} & \mathbf{G}^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}^{-1} & -\mathbf{F}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{D}^{-1} \\ -\mathbf{D}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{F}^{-1} & \mathbf{D}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{F}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{D}^{-1} + \mathbf{D}^{-1} \end{pmatrix}$$

mit $\mathbf{G} = \mathbf{D} - \mathbf{C} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}$ und $\mathbf{F} = \mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{C}$.

Als direkte Konsequenz der beiden Identitäten aus dieser Aufgabe finden wir außerdem durch Vergleich der Matrixelemente die Formel

$$\mathbf{F}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} + \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{A}^{-1}. \quad (1.48)$$

Für den Fall, dass auf der Nebendiagonale eine Nullmatrix $\mathbf{0}$ auftritt, vereinfachen sich die Gleichungen für die Inverse wesentlich. Zum Beispiel ergibt sich

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}^{-1} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{D}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{A}^{-1} & \mathbf{D}^{-1} \end{pmatrix}, \quad (1.49)$$

wie man leicht verifiziert. Auch die Inverse der Matrix $\overline{\mathbf{M}}_{\pm}$ aus (1.42) ist so zu bestimmen, denn mit $\mathbf{B}_{\pm}^{\dagger} \mathbf{B}_{\pm} = (a^2 + |b|^2) \mathbf{I}$ und $\mathbf{G} = \gamma \mathbf{I} - \mathbf{B}_{\pm}^{\dagger} \mathbf{B} / \lambda = (\lambda\gamma - (a^2 + |b|^2)) / \lambda \mathbf{I}$ erhält man

$$\overline{\mathbf{M}}_{\pm}^{-1} = \frac{1}{\lambda\gamma - (a^2 + |b|^2)} \begin{pmatrix} \gamma \mathbf{I} & -\mathbf{B}_{\pm} \\ -\mathbf{B}_{\pm}^{\dagger} & \lambda \mathbf{I} \end{pmatrix}, \quad (1.50)$$

was man auch eine direkte Rechnung bestätigen kann.

■ 1.3 Eigenwerte und Eigenvektoren

Von großer Bedeutung, insbesondere für Anwendungen in der Quantentheorie, ist der Begriff des **Eigenvektors** einer Matrix. Darunter versteht man einen Vektor $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, der die Bedingung

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u} \quad (1.51)$$

erfüllt. Der Vektor \mathbf{u} wird also durch die Matrix \mathbf{A} auf ein λ -faches seiner selbst abgebildet. Die (reelle oder komplexe) Zahl λ heißt dann **Eigenwert** von \mathbf{A} und man spricht auch von dem Eigenvektor \mathbf{u} von \mathbf{A} zum Eigenwert λ . Die Menge aller Eigenwerte einer Matrix nennt man ihr **Spektrum**. Man liest außerdem von Gleichung (1.51) ab, dass auch jedes α -fache eines Eigenvektors für $\alpha \neq 0$ wieder ein Eigenvektor ist, und zwar zum gleichen Eigenwert λ . Hat man eventuell zwei linear unabhängige Eigenvektoren \mathbf{u}_1 und \mathbf{u}_2 zum gleichen Eigenwert (man spricht dann von einer **Entartung**), so ist auch jede Linearkombination $\alpha_1\mathbf{u}_1 + \alpha_2\mathbf{u}_2$ wieder ein solcher Eigenvektor. Die Eigenvektoren zum Eigenwert λ bilden also einen linearen Raum, den **Eigenraum** \mathcal{E}_λ .

Wenn wir die Definitionsgleichung (1.51) umschreiben als

$$\mathbf{A}_\lambda\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{mit} \quad \mathbf{A}_\lambda = \mathbf{A} - \lambda\mathbf{I} \quad (1.52)$$

mit der Einheitsmatrix \mathbf{I} , so finden wir eine notwendige Bedingung für die Existenz eines Eigenvektors zum Eigenwert λ , denn die Determinante der Koeffizientenmatrix muss verschwinden,

$$\det\mathbf{A}_\lambda = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0. \quad (1.53)$$

Ist diese Determinante nämlich von null verschieden, so hat das lineare Gleichungssystem (1.52) eine eindeutige aber triviale Lösung, den Nullvektor, der nach Definition kein Eigenvektor sein kann. Die Bedingung (1.53) ist nur für spezielle Werte von λ erfüllt und liefert als Lösung eben die Eigenwerte.

Wir schreiben die Eigenwertbedingung (1.53) für unsere 2×2 -Matrizen $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ explizit aus:

$$\left| \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix} \right| = (a-\lambda)(d-\lambda) - bc = \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc = 0. \quad (1.54)$$

Die Eigenwerte sind also die Nullstellen eines Polynoms zweiten Grades in λ , des sogenannten **charakteristischen Polynoms**

$$\chi(\lambda) = \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc = 0 \quad (1.55)$$

mit den bekannten Lösungen

$$\lambda_\pm = \frac{1}{2} \left(a+d \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4(ad-bc)} \right) \quad (1.56)$$

dieser quadratischen Gleichung. Wegen der großen Bedeutung der Eigenwerte notieren wir noch zwei unterschiedliche Formulierungen der gleichen Lösung. Mit der Spur $\text{spur}\mathbf{A} = a+d$ und der Determinante $\det\mathbf{A} = ad-bc$ erhält man

$$\lambda_\pm = \frac{1}{2} \left(\text{spur}\mathbf{A} \pm \sqrt{\text{spur}^2\mathbf{A} - 4\det\mathbf{A}} \right). \quad (1.57)$$

In Abschnitt 2.1 werden wir sehen, dass die Eigenwerte – wie auch die Spur und die Determinante – nicht von der speziellen Basiswahl zur Darstellung der Matrix \mathbf{A} abhängen. Außerdem liefert (1.57) sofort die Beziehungen

$$\text{spur}\mathbf{A} = \lambda_+ + \lambda_- \quad \text{und} \quad \det\mathbf{A} = \lambda_+\lambda_-. \quad (1.58)$$

Index

- Abbildung
 - additive, 97
 - affine, 107, 110
 - antilineare, 97
 - homogene, 97
 - lineare, 11, 97
 - linearisierte, 94
 - unimodulare, 167
- Abel, Niels Henrik, 83
- abelsche Gruppe, 83
- abgeschlossen, 91
- abgeschlossene Hülle, 111
- Abstand, 61
- additiv, 97
- adjungierte Darstellung, 51
- affine Abbildung, 107, 110
- affine Gruppe, 107
- ähnlich, 127
- ähnliche Matrix, 37, 38, 42
- Ähnlichkeitsrelation, 37, 72, 127
- Ähnlichkeitstransformation, 38, 41, 44, 50, 60, 73, 151, 155
- Algebra, 14, 119, 149, 150
 - assoziative, 149
 - Lie-, 151
- algebraische Vielfachheit, 22, 40, 42, 99
- Alternativität, 138
- Alternativkörper, 138
- Antihomomorphismus, 163
- antikommutativ, 158
- Antikommutator, 129, 150
- antilineare Abbildung, 97
- Antisymmetrie, 55
- antisymmetrisch, 152
- antisymmetrische Matrix, 65
- Äquivalenzklasse, 127
- Äquivalenzrelation, 127
- Arnold, Vladimir I., 44
- assoziativ, 11, 14, 83, 84, 119, 126, 158
- Assoziativgesetz, 138
- äußeres Produkt, 158, 159
- axialer Vektor, 158
- Baker-Campbell-Hausdorff Gleichung, 51, 156
- Basis, 12
 - kartesische, 12
 - orthonormierte, 13
 - reziproke, 58
- Berry, Michael V., 71
- Berry-Phase, 70, 71
- Betrag, 12, 121
- bi-orthogonal, 27, 28, 35, 39
- Bifurkation, 103
- bikomplexe Zahlen, 134
- Bildraum, 17
- bilinear, 55, 119, 149, 150
- Bilinearform, 55, 68, 79, 94, 123, 175
- Biquaternion, 137, 170
 - hermitesches, 137
 - kopfloses, 138
- Bivektor, 158, 161
- Blockmatrix, 18, 32, 42, 130–132, 134, 139, 178
- Bohm-Aharonov-Effekt, 71
- Brennpunkt, 113
- Cauchy-Folge, 120
- Cauchy-Schwarz-Ungleichung, 12
- Cayley-Hamilton
 - Satz von, 22
- Cayley-Transformation, 73
- charakteristische Gleichung, 34, 147
- charakteristisches Polynom, 21, 22, 49, 139
- Clifford, William Kingdon, 161
- Clifford-Algebra, 149, 161, 162, 170
- Cockle, James, 132, 134
- Computergraphik, 110

- Darstellung, 84, 151, 153
 - adjungierte, 51
 - homogene, 110
 - treue, 122, 151, 154, 169
- Defekt, 98
- Defektmatrix, 29, 52, 65, 98
- definit, 18, 56, 125
- Derivation, 150
- Determinante, 15, 31, 167, 178
- diabolischer Punkt, 69, 71
- Diagonalebasis, 124
- Diagonalform, 38, 44, 46, 62
- Diagonalisierung, 40
 - unitäre, 39, 42
- ◊-Produkt, 150
- Dimension, 12
 - einer Gruppe, 86
- Dimensionssatz, 98
- Dirac-Algebra, 170
- Dirac-Matrix, 18
- diskrete Gruppe, 83, 84
- distributiv, 14, 126
- Distributivgesetz, 14, 30, 119, 120, 123, 149
- Divisionsalgebra, 119
- Divisionsring, 119
- Doppelkegel, 69
- Drehmatrix, 74, 102, 122
- Drehspiegelung, 75
- Drehung, 67, 104, 110, 166, 168
 - hyperbolische, 124
- Dreiecksmatrix, 84, 87
- Dreiecksungleichung, 12, 16, 56
- Durchschneidung
 - konische, 69

- Eigenraum, 21, 22
- Eigenvektor, 21, 69
 - linker, 27, 34, 39, 41, 63, 100
 - quaternionischer, 142
 - rechter, 27, 34, 39, 41, 63, 100
 - verallgemeinerter, 52
- Eigenwert, 21, 111
 - einfacher, 22
 - quaternionischer, 142
- einfach, 152, 154

- Einheit
 - pseudoimaginäre, 123
- Einheitsmatrix, 14
- Einselement, 119, 133, 149
- Einstein, 58, 66
- einsteinsche Summenkonvention, 14
- Ellipse, 41, 101, 109, 113, 176
- elliptischer Fixpunkt, 101
 - entartet, 139
- Entartung, 21, 69
- euklidische Norm, 12
- euklidischer Raum, 114
- Euler-Formel, 122
- Exponentialdarstellung, 122
- Exponentialfunktion, 49
- exzeptionell, 101

- Fixgerade, 107, 109, 115
- Fixpunkt, 109, 115
 - elliptischer, 101
 - hyperbolischer, 101
 - instabiler, 101
 - stabiler, 101
- Fläche
 - orientierte, 158
- flächentreu, 100, 106
- Frobenius, Ferdinand Georg, 16
- Frobenius-Norm, 16, 57, 65
- Frobenius-Skalarprodukt, 16, 68, 153
- Fundamentalsatz der Algebra, 120

- Gantmacher und Krein, Satz von, 93
- ganze Zahlen, 119, 120
- Gauß-Integral, 180
- geometrische Vielfachheit, 22, 40, 42, 99
- geometrisches Produkt, 50, 158, 160, 169
- geordnet, 120
- $GL(2, \mathbb{C})$, 88
- $GL^+(2, \mathbb{R})$, 88
- $GL(2, \mathbb{R})$, 88
- $GL(n, \mathbb{C})$, 84–86
- $GL(n, \mathbb{R})$, 84–86
- gleichartig, 13
- Gleichung
 - charakteristische, 147
 - quadratische, 21

- Grad, 162
 Gruppe, 83, 124
 – abelsche, 83
 – affine, 107
 – allgemeine lineare, 84
 – diskrete, 83, 84
 – kontinuierliche, 83
 – orthogonale, 75, 85, 87, 90
 – pseudoorthogonale, 83
 – pseudounitäre, 81
 – spezielle lineare, 79, 85
 – symplektische, 79, 85, 87, 90
 – zyklische, 84
- Hamilton, William Rowan, 126
 Hamilton-Regeln, 127
 hermitesch, 67, 111, 153
 hermitesch konjugiert, 12, 15
 hermitesch konjugierte Matrix, 31
 hermitesche Konjugation, 163
 Herzberg, Gerhard, 70
 Hilbert, David, 16, 97
 Hilbert-Schmidt-Norm, 16
 homogen, 56, 97
 homogene Darstellung, 110
 Homomorphismus, 97
 Homöomorphismus, 151
 Hyperbel, 101, 124, 176
 hyperbolische Drehung, 124
 hyperbolischer Fixpunkt, 101
 Hyperboloid, 133
- Ideal, 152
 idempotent, 104, 106, 124, 133
 imaginäre Einheit, 122
 Imaginärteil, 120
 indefinit, 68
 indefinite Metrik, 123
 Indizes
 – untere und obere, 58
 inneres Produkt, 158
 instabiler Fixpunkt, 101
 invariante Menge, 102, 109
 Invarianz, 56
 Inverse, 31, 121, 123
 inverses Element, 83
- invertierbar, 164
 invertierbare Matrix, 17
 Isometrie, 168
 isomorphe Gruppen, 85, 88
 Isomorphismus, 151
- Jacobi, Carl, 151
 Jacobi-Determinante, 94
 Jacobi-Identität, 151, 152, 170
 Jahn-Teller-Effekt, 71
 Jordan, M. E. Camille, 42
 Jordan-Arnold-Form, 44, 45, 91
 Jordan-Basis, 43
 Jordan-Block, 42
 Jordan-Chevalley-Zerlegung, 53
 Jordan-Form, 54
 Jordan-Matrix, 45, 72
 Jordan-Normalform, 42, 44, 54, 72
- kartesische Basis, 12
 kartesische Koordinaten, 57
 Kegelschnitt, 101, 109, 176
 Keilprodukt, 158
 Kern, 17, 43, 98
 Kodimension, 69
 kommutativ, 11, 14, 83, 126
 Kommutator, 15, 16, 44, 51, 90, 129, 150, 166
 kompakt, 86
 komplexe Zahlen, 119, 120
 komplexe Zahlenebene, 121
 konische Durchschneidung, 69
 Konjugation
 – hermitesche, 163, 169
 konjugiert komplex, 120
 konjugiert pseudokomplexe Zahl, 123
 konjugiertes Quaternion, 126
 kontinuierliche Gruppe, 83
 kontravariant, 28, 58, 59
 kontravariante Metrik, 60, 66
 Kontrollparameter, 44
 konvex, 111
 Koordinaten
 – schiefwinklige, 59, 61
 kopfloses Quaternion, 129
 Koquaternionen, 132
 koquaternionische Matrix, 144

- Körper, 119, 121, 126
kovariant, 28, 58, 59
kovariante Metrik, 60, 66
Kreuzung
– vermiedene, 69
Kronecker, Leopold, 176
Kronecker-Delta, 13, 58, 138
Kronecker-Produkt, 15, 176
krummlinige Koordinaten, 58
Kugelkoordinaten, 58
- Leibniz-Regel, 15, 152
Lie
– -Algebra, 15, 51, 89, 90, 151
– -Gruppe, 85
– -Klammer, 151, 152
– -Produktformel, 51, 90
Lie, Sophus, 151
lineare Abbildung, 11, 97
linearer Operator, 97
linearer Raum, 11, 67
linearisierte Abbildung, 94
Linearkombination, 12, 21
linker Eigenvektor, 27, 34, 39, 41, 63, 100
linksinvers, 94
linksneutral, 94
Logarithmus, 52
Longuet-Higgins, Hugh Christopher, 70
Lorentz-Transformation, 82, 84
- Mannigfaltigkeit, 89
Matrix
– -Lie-Gruppe, 85
– -Logarithmus, 89, 91
– -gruppe, 84
– ähnliche, 37, 38, 42
– antisymmetrische, 65, 150
– Defekt-, 29
– gleichartige, 13
– hermitesche, 15, 67
– invertierbare, 17
– konjugierte, 31
– koquaternionische, 144
– nicht-diagonalisierbare, 40, 64
– nicht-singuläre, 17
– nilpotente, 43
– normale, 15, 40, 77, 111
– orthogonale, 26, 74
– positiv definite, 24
– positive, 18, 92
– pseudokomplexe, 139
– pseudoorthogonale, 82
– pseudounitäre, 80
– quadratische, 13
– quaternionische, 140
– reguläre, 17
– symmetrische, 26, 29, 67, 72
– symplektische, 77, 87, 100
– total positive, 18, 92
– unitär diagonalisierbare, 40
– unitäre, 15, 26, 38, 72
Matrix-Rekursion, 48
Matrix-Vektor-Transformation, 179
Matrixfunktion, 46, 52, 54
Matrixnorm, 16, 46, 56
Matrixprodukt, 17
Maximumsnorm, 56
Metrik, 55, 61
– aus Skalarprodukt, 59
– bilineare, 85
– indefinite, 123
– kontravariante, 58, 60, 66
– kovariante, 58, 60, 66
– sequilineare, 121
– sesquilineare, 85
metrischer Tensor, 60
Minkowski-Raum, 80
Mischungswinkel, 70
Multikommutator, 50
Multikommutatorentwicklung, 152, 155
Multivektor, 160
– inverser, 164
- natürliche Zahlen, 120
Netzwerk, 92
– planares, 96
neutrales Element, 11, 83
nicht-diagonalisierbare Matrix, 40, 64
nilpotent, 43, 49, 53, 54, 133
Nilpotenzgrad, 49
Norm, 56, 121, 125, 126, 130
– bikomplexe, 135

- euklidische, 12
- Frobenius-, 16
- Hilbert-Schmidt-, 16
- indefinite, 132, 133
- Matrix-, 16
- normal, 15
- normale Matrix, 40, 77, 111
- Nullmatrix, 14
- Nullteiler, 123, 124, 132, 133
- Nullvektor, 11

- $O(1, 1)$, 88, 124
- $O(2)$, 85, 88
- $O(2, \mathbb{C})$, 87, 88
- $O(2, \mathbb{R})$, 75, 87
- $O(3)$, 168
- $O(n_+, n_-, \mathbb{R})$, 85, 86
- $O(n, \mathbb{R})$, 85
- Oktonion, 138
- Operator
 - linearer, 97
- Operatornorm, 17, 56, 57, 65
- Ordnung, 84
- orientierte Fläche, 158
- orthogonal, 12, 26, 69, 85
- orthogonale Gruppe, 75
- orthogonale Matrix, 74
- Orthogonalprojektion, 107
- orthonormiert, 12

- p-Norm, 56
- Parallelepiped, 157
- Parallelogramm, 94, 99, 104, 158
- Pauli, Wolfgang Ernst, 163
- Pauli-Algebra, 163, 169
- Pauli-Matrix, 169
- Permutation, 172
- Permutationsgruppe, 84
- Phasenraum, 79
- planares Netzwerk, 92, 96
- $PO(2, \mathbb{R})$, 83
- Poisson-Klammer, 152
- Polardarstellung, 121
- polarer Vektor, 158
- Polarisierung, 175

- Polynom
 - charakteristisches, 21, 22, 139
 - positiv definit, 24, 31, 41
 - positiv semidefinit, 31
 - positive Matrix, 92
 - Potenzfunktion, 48
 - Potenzreihe, 50
 - Potenzreihenentwicklung, 46, 52
- Produkt
 - äußeres, 158, 159
 - geometrisches, 50, 158, 160, 169
 - inneres, 158
- Produktzerlegung, 40
- Projektion, 106
- Projektor, 26, 47, 63
- pseudoimaginäre Einheit, 123
- pseudokomplexe Zahlen, 123
- Pseudonorm, 124
- pseudoorthogonale Gruppe, 83
- pseudoorthogonale Matrix, 82
- Pseudoskalar, 162
- pseudounitär, 154
- pseudounitäre Gruppe, 81
- pseudounitäre Matrix, 80
- Pseudovektor, 162

- quadratische Form, 175
- quadratische Gleichung, 21
- Quantenmechanik, 19, 21, 49, 97, 170
- Quantenphysik, 12, 67, 75, 77, 80, 83, 154
- Quantensystem, 156, 169
- Quaternion
 - kopfloses, 129
- Quaternionen, 119, 126
- Quaternionen-Matrix, 140
- Quaternionenformel, 164

- \mathbb{R}^\times , 85, 86
- Rang, 17, 41, 98, 175
- rationale Zahlen, 119, 120
- Realteil, 120
- rechter Eigenvektor, 27, 34, 39, 41, 63, 100
- rechtshändig, 167
- rechtsinvers, 94
- rechtsneutral, 94
- reelle symplektische Gruppe, 79

- reelle Zahlen, 119, 120
 regulär, 17
 Rekursionsgleichung, 48
 Relativitätstheorie, 14, 19, 58
 Residuum, 103
 Reversion, 163, 170
 reziproke Basis, 58
 riemannsches Blatt, 71
 Ring, 119, 123, 133, 149
 Robotik, 110
 Rotationszahl, 103
- S^1 , 83, 85, 86
 Satz
 - von Cayley-Hamilton, 22
 - von Gantmacher und Krein, 93
 - von Sylvester, 175
 - von Toeplitz und Hausdorff, 111
- Scherung, 105, 108
 schief-hermitesch, 153
 Schiefkörper, 119, 138
 schiefsymmetrisch, 151
 schiefwinklige Koordinaten, 59, 61
 Schmidt, Erhard, 16
 Schopenhauer, Arthur, 67
 semidefinit, 18
 Separatrix, 45
 sesquilinear, 55, 85
 Sesquilinearform, 55, 79, 102
 Signatur, 85, 123, 175
 Singulärvektor, 41
 Singulärwert, 41, 57, 108
 Singulärwertzerlegung, 40, 108
 Skalar, 164
 Skalarprodukt, 12, 55, 56, 61, 73, 157
 - Frobenius-, 16, 68
- Skalierung, 104
 $SL(2, \mathbb{C})$, 79, 86, 88
 $SL(2, \mathbb{R})$, 79, 88
 $SL(n, \mathbb{C})$, 85
 $SL(n, \mathbb{R})$, 85
 $SL_1(n, \mathbb{C})$, 85
 $SL_2(n, \mathbb{C})$, 85
 SN-Zerlegung, 52, 53
 $SO^+(1, 1)$, 88, 124
 $SO(2)$, 88
 $SO^*(2, \mathbb{R})$, 89
 $SO(2, \mathbb{C})$, 88
 $SO(2, \mathbb{R})$, 87, 88
 $SO(3)$, 89, 168
 $SP(2, \mathbb{C})$, 79, 86–88
 $SP(2, \mathbb{R})$, 79, 88
 $SP(2n, \mathbb{C})$, 85
 $SP(2n, \mathbb{R})$, 85
 Spaltenrang, 17
 Spaltenvektor, 12
 Spatprodukt, 157
 Spektraldarstellung, 47
 Spektralnorm, 57, 178, 181
 Spektrum, 21, 111
 spezielle lineare Gruppe, 79, 85
 Spiegelung, 75, 104, 167
 Spinmatrix, 68, 74, 75, 83, 131, 137, 153, 169
 Spur, 16, 178
 spurfrei, 131, 153
 Störung, 44
 stabile Richtung, 101
 stabiler Fixpunkt, 101
 Stabilitätskriterium, 103
 Stabilitätsexponent, 100
 Stabilitätswinkel, 101
 Strahlenoptik, 79
 Streckung, 104
 Strukturkonstante, 151
 $SU(1, 1)$, 88, 154
 $SU(1, 1, \mathbb{C})$, 81
 $SU(2)$, 130, 153
 $\mathfrak{su}(2)$, 153
 $SU^*(2, \mathbb{C})$, 89
 $SU(2, \mathbb{C})$, 87, 88
 subadditiv, 56
 submultiplikativ, 16, 56, 57
 Summenkonvention, 14, 58, 66
 Summennorm, 56
 Supersymmetrie, 138
 SWZ, 40
 Sylvester, James Joseph, 48
 Symmetrie, 55
 symmetrisch, 26, 67
 symmetrische Matrix, 29, 72
 symplektisch, 85, 87
 symplektische Gruppe, 79
 symplektische Matrix, 77, 100

- Szent-Györgyi, Albert, 67
- Teller, Edward, 70
- Tensor, 14, 37, 60
- metrischer, 60
 - total antisymmetrischer, 138, 162
- Tessarinen, 123, 134
- Theorem von Sylvester, 48
- topologisch, 86, 89
- total antisymmetrischer Tensor, 162
- total positive Matrix, 92
- Trägheitssatz von Sylvester, 175
- Transfermatrix, 80
- Transformation
- orthogonale, 168
- Transformationsgruppe, 56, 84
- Transformationsmatrix, 25, 38, 62
- Translation, 103, 107, 110
- Transponierte, 15
- Transposition, 163
- treue Darstellung, 122, 151, 154, 169
- Trivektor, 158, 161
- Tschebyscheff, P. L., 48
- Tschebyscheff-Identität, 48
- Tschebyscheff-Polynom, 48
- $U(1, 1)$, 88
- $U(1, \mathbb{C})$, 85, 86
- $U(1, \mathbb{R})$, 85
- $U(2)$, 85, 88
- $U(2, \mathbb{C})$, 87
- $U(n, \mathbb{C})$, 85
- $U(n_+, n_-, \mathbb{C})$, 85
- $U(n_+, n_-, \mathbb{R})$, 85
- Umordnung, 156
- unimodular, 164, 166, 170
- unitär, 15, 38
- unitär diagonalisierbar, 39, 40
- unitär invariant, 56, 57
- unitäre diagonalisierbar, 42
- unitär, 26, 72
- Unteralgebra, 164, 171
- Untergruppe, 84
- Vektor, 11
- axialer, 158
 - polarer, 158
- Vektorisierung, 179
- Vektornorm, 12, 16, 56, 57
- Vektorprodukt, 157, 170
- Vektorraum, 11
- verallgemeinerter Eigenvektor, 52
- vermeidene Kreuzung, 69
- verträglich, 56
- Vielfachheit
- algebraische, 22, 40, 42, 99
 - geometrische, 22, 40, 42, 99
- vollständig, 120
- Wertebereich, 111
- quaternionischer, 144
- Zahlen
- bikomplexe, 134
 - ganze, 119, 120
 - komplexe, 119, 120
 - natürliche, 120
 - pseudokomplexe, 123
 - rationale, 119, 120
 - reelle, 119, 120
- Zahlenebene
- komplexe, 121
 - pseudokomplexe, 124
- Zeilenrang, 17
- Zeilenvektor, 12
- Zeitumkehr, 97
- Zerlegung der Eins, 26, 58
- zusammenhängend, 86
- Zusammenhangskomponente, 86, 89, 90, 95
- zyklische Gruppe, 84
- Zylinderkoordinaten, 58