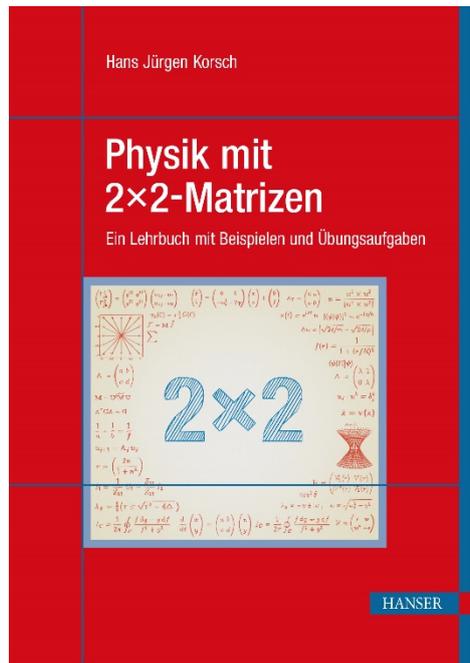


# HANSER



## Leseprobe

zu

## Physik mit 2 x 2 Matrizen

von Hans Jürgen Korsch

Print-ISBN: 978-3-446-46694-4

E-Book-ISBN: 978-3-446-46806-1

Weitere Informationen und Bestellungen unter  
<http://www.hanser-fachbuch.de/978-3-446-46694-4>

sowie im Buchhandel

© Carl Hanser Verlag, München

# Vorwort

In der Physik werden Matrizen, insbesondere  $2 \times 2$ -Matrizen, oft als einfache Modelle eingesetzt, um komplizierte Probleme verständlicher zu machen und ihre theoretischen und praktischen Lösungsmethoden zu illustrieren. Das vorliegende Lehrbuch behandelt interessante aktuelle und anwendungsnahe Aufgabenfelder der modernen Physik, in denen die Matrix-Algebra zum Einsatz kommt. Es wendet sich in erster Linie an Studierende der Physik, zum Selbststudium oder als Begleitmaterial zu Vorlesungen. Das Buch kann jedoch auch fortgeschrittenen Interessenten an physikalischen Fragestellungen und ihrer theoretischen Beschreibung neue Perspektiven eröffnen.

Zum einen bietet es einen schnellen Einstieg in sehr unterschiedliche Gebiete der Physik. Durch die oft verwendete ähnliche Methodik, wie zum Beispiel die Transfermatrizen, erkennt man interessante Zusammenhänge zwischen weit auseinander liegenden Feldern. Zum anderen ermöglicht es der Leserin oder dem Leser, die vermittelten Methoden erfolgreich auf neue Probleme anzuwenden.

Die Themenvielfalt des Buches spannt einen weiten Bogen von fundamentalen Themen wie Dynamischen Systemen bis hin zur allgemeinen Relativitätstheorie und Quantenphysik. Dabei steht die Quantenmechanik im Zentrum, aber es werden auch anwendungsorientiertere Gebiete wie Mechanik, Optik, Elektronik oder Quantencomputing behandelt.

Jedes Kapitel gibt eine kurze Einführung in den physikalischen Problemkreis und illustriert die angewandten Methoden mithilfe zahlreicher durchgerechneter Beispiele und Übungsaufgaben samt Lösungen. Es wird vorausgesetzt, dass der Leser mit den elementaren Methoden der Matrix-Algebra vertraut ist. Deshalb werden mathematische Verfahren nur kurz erläutert. Eine ausführlichere Darstellung der mathematischen Grundlagen findet der Leser in dem parallel erscheinenden Lehrbuch:

Korsch, Hans Jürgen: *Mathematik mit  $2 \times 2$  Matrizen. Ein Lehrbuch mit Beispielen und Übungsaufgaben*, Carl Hanser Verlag 2021, Print-ISBN 978-3-446-46693-7, E-Book-ISBN 978-3-446-46805-4 .

Verweise darauf werden im vorliegenden Buch durch „M2“ angegeben, also beispielsweise als „Mehr dazu findet man in M2, Abschnitt 2.4.“

Wie oben erwähnt, stammen viele der Beispiele für einen Einsatz von Matrix-Methoden aus dem Gebiet der Quantenmechanik. Deren mathematische Grundlagen werden im Rahmen des vorliegenden Buches nur sehr knapp dargestellt. Mehr dazu findet man in dem Lehrbuch

Korsch, Hans Jürgen: *Mathematik der Quantenmechanik*, Carl Hanser Verlag 2019, Print-ISBN 978-3-446-46226-7, E-Book-ISBN 978-3-446-46255-7 .

Zwei weitere aktuelle Lehrbücher, die sich auf den Einsatz von Matrizen in der Physik konzentrieren, sind:

Ludyk, Günter: *Relativitätstheorie nur mit Matrizen* sowie *Quantenmechanik nur mit Matrizen*, beide erschienen im Springer-Verlag 2020.

Im vorliegenden Buch wurde auf die oft üblichen detaillierten Literaturangaben der Quellen oder der weiterführenden Arbeiten weitgehend verzichtet, da es nach Ansicht des Autors zunehmend einfacher ist, weitere Informationen zu interessanten Themen im Internet zu „er-googeln“, beispielsweise über die immer besser werdenden Einträge bei Wikipedia. Voraussetzung dafür sind natürlich Grundkenntnisse der Thematik und der relevanten Schlagwörter. Quellenangaben gibt es jedoch dort, wo dies unverzichtbar erschien, beispielsweise weil der vorliegende Text sich stark an dieser Literatur orientiert, oder weil die betreffenden Arbeiten schwer auffindbar sind.

Ein paar Worte zur Rolle der vielen Aufgaben im Text. Sie sind bewusst einfach gehalten und lassen sich in der Regel in wenigen Denk- und Rechenschritten lösen. Sie sollen einerseits dazu anregen, aktiv an der Entwicklung eines Themas mitzuarbeiten, um ein besseres Verständnis zu erreichen. Andererseits sollen auf diese Weise Nebenrechnungen, die den Textfluss stören könnten, ausgelagert werden. In allen Fällen findet man ausführliche Lösungen am Ende jedes Kapitels.

Der vorliegende Text beruht auf den Vorlesungen des Autors zu Themen der Theoretischen Physik an der TU Kaiserslautern. Der Autor dankt den ehemaligen Mitgliedern seiner Arbeitsgruppe für viele Anregungen und Kommentare. Insbesondere möchte ich hier Dr. Bruno Mirbach hervorheben, der die Mühe nicht scheute, den vorliegenden Text kritisch durchzusehen, und der durch viele hilfreiche Anmerkungen dazu beitrug, dass der Text verständlicher und ärmer an Fehlern wurde. Weitere Hinweise und Vorschläge bitte an

[h.j.korsch@gmail.com](mailto:h.j.korsch@gmail.com).

Eine aktuelle Korrekturliste und weitere Informationen findet man unter

<https://www.hanser-fachbuch.de>.

Mein Dank gilt auch dem Hanser Verlag für die freundliche Aufnahme des Buches und die hilfreiche Unterstützung durch sein Lektorat.

Kaiserslautern, Oktober 2020

Hans Jürgen Korsch

# Inhalt

<b>1</b>	<b>Lineare Dynamik</b> .....	<b>11</b>
1.1	Phasenportraits linearer Flüsse .....	11
1.2	Fixpunkte und Phasenportraits .....	13
1.3	Der harmonische Oszillator .....	17
1.4	Ein Ausflug in die Nichtlinearität .....	20
1.4.1	Ein nichtlinearer Oszillator .....	22
1.4.2	Das Lotka-Volterra-Modell .....	23
1.5	Iterierte lineare Abbildungen .....	26
1.6	Lösungen der Aufgaben .....	27
<b>2</b>	<b>Schwingungen und Stöße</b> .....	<b>31</b>
2.1	Gekoppelte Schwingungen .....	31
2.2	Angetriebene Schwingungen .....	36
2.2.1	Zeitperiodische Systeme .....	40
2.2.2	Die Mathieu-Gleichung .....	42
2.3	Drei-Teilchen-Stöße .....	44
2.4	Billard-Systeme .....	51
2.4.1	Das ebene Billard .....	51
2.4.2	Fermi-Beschleunigung .....	55
2.5	Lösungen der Aufgaben .....	57
<b>3</b>	<b>Ordnung und Chaos</b> .....	<b>61</b>
3.1	Hamilton-Dynamik .....	61
3.1.1	Poincaré-Schnitte .....	64
3.1.2	Das Hénon-Heiles-System .....	65
3.2	Diskrete Abbildungen .....	67
3.2.1	Stroboskopische Abbildungen .....	67
3.2.2	Arnolds Katze .....	68
3.2.3	Fraktale Abbildungen .....	75
3.3	Lösungen der Aufgaben .....	79

---

<b>4</b>	<b>Elektrische Netzwerke und Vierpole</b> .....	<b>83</b>
4.1	Elektrische Schwingkreise.....	83
4.2	Vierpole.....	87
4.3	Vierpolketten.....	96
4.4	Lösungen der Aufgaben.....	98
<b>5</b>	<b>Gekrümmte Räume</b> .....	<b>101</b>
5.1	Flächen im euklidischen Raum.....	101
5.2	Die flache Raumzeit.....	114
5.3	Die gekrümmte Raumzeit.....	120
5.4	Lösungen der Aufgaben.....	124
<b>6</b>	<b>Optische Systeme</b> .....	<b>127</b>
6.1	Linsensysteme.....	127
6.1.1	Elementare optische Abbildungen.....	128
6.1.2	Die Systemmatrix.....	131
6.1.3	Stationäre Lösungen.....	137
6.1.4	Wellenoptik mit Gauß-Strahlen.....	138
6.2	Optische Resonatoren.....	141
6.2.1	Die Systemmatrix.....	141
6.2.2	Die Grundmode.....	144
6.3	Polarisationsoptik und Jones-Matrizen.....	146
6.4	Lösungen der Aufgaben.....	154
<b>7</b>	<b>Elementare Quantensysteme</b> .....	<b>159</b>
7.1	Grundbegriffe der Quantenmechanik.....	159
7.2	Das Zweiniveausystem.....	164
7.3	Einfache Modellsysteme.....	165
7.3.1	Der harmonische Oszillator.....	165
7.3.2	Das Kastenpotential.....	166
7.3.3	Ein Doppelmuldenpotential.....	167
7.4	Resonanzzustände.....	172
7.5	Periodische Potentiale.....	174
7.6	Semiklassische Näherungen.....	176
7.7	Lösungen der Aufgaben.....	184

<b>8</b>	<b>Transfermatrix und Streumatrix .....</b>	<b>189</b>
8.1	Eigenschaften von Transfer- und Streumatrix .....	190
8.2	Einfache Modellpotentiale .....	194
8.2.1	Das Delta-Potential .....	194
8.2.2	Die Potentialstufe .....	195
8.2.3	Das Kastenpotential .....	196
8.3	Potentialketten.....	198
8.3.1	Das Doppel-Delta-Potential .....	199
8.3.2	Der Delta-Kamm .....	200
8.3.3	Allgemeine periodische Potentiale .....	203
8.4	Lösungen der Aufgaben .....	203
<b>9</b>	<b>Von den Spinmatrizen zur Dirac-Gleichung .....</b>	<b>209</b>
9.1	Die Spin- oder Pauli-Matrizen .....	209
9.2	Dichtematrix für Spin-1/2-Teilchen .....	212
9.3	Dynamik des Bloch-Vektors.....	214
9.4	Die Lindblad-Master-Gleichung .....	217
9.5	Dirac-Gleichung und Dirac-Matrizen .....	222
9.5.1	Die Dirac-Gleichung .....	222
9.5.2	Die Clifford-Dirac-Algebra .....	224
9.5.3	Der Dirac-Spin-Operator .....	226
9.6	Lösungen der Aufgaben .....	228
<b>10</b>	<b>Das Zweiniveausystem der Quantenmechanik .....</b>	<b>231</b>
10.1	Vermiedene Kreuzungen .....	231
10.2	Zufallsmatrizen und Eigenwert-Statistik .....	233
10.3	Zeitabhängige Hamilton-Operatoren.....	237
10.4	Zeitperiodische Systeme.....	242
10.4.1	Floquet-Theorie .....	242
10.4.2	Periodisch getriebene Zweiniveausysteme .....	244
10.4.3	Der angetriebene Rotor .....	246
10.5	Kontrolle von Quantenprozessen .....	248
10.6	Lie-algebraische Zeitevolution .....	250
10.7	PT-Symmetrie .....	256
10.7.1	... und $2 \times 2$ -Matrizen.....	258
10.7.2	... und elektronische Schwingkreise .....	261
10.8	Lösungen der Aufgaben .....	263

<b>11</b>	<b>Phänomene bei Fast-Entartungen</b> .....	<b>267</b>
11.1	Landau-Zener-Übergänge .....	267
11.2	Diabolische Punkte und Berry-Phasen .....	269
11.3	Exzeptionelle Punkte .....	275
11.4	Landau-Zener-Übergänge mit Zerfall .....	281
11.5	Nichtlineare Zweiniveausysteme .....	283
11.6	Lösungen der Aufgaben .....	288
<b>12</b>	<b>Bipartite Quantensysteme und Quantencomputing</b> .....	<b>291</b>
12.1	Bipartite Systeme und Verschränkung .....	293
12.2	Qubits und Quantengatter .....	295
12.3	Quanten-Teleportation .....	300
12.4	Quanten-Fouriertransformation .....	301
12.5	Lösungen der Aufgaben .....	304
	<b>Index</b> .....	<b>307</b>

# 1

## Lineare Dynamik

*„Es ist unmöglich, die Schönheiten der Naturgesetze angemessen zu vermitteln, wenn jemand die Mathematik nicht versteht. Ich bedaure das, aber es ist wohl so.“  
— Richard Feynman*

Physik ohne Differentialgleichungen wäre fast undenkbar. Also beginnen wir mit einer Untersuchung ihrer einfachsten nichttrivialen Vertreter, den linearen Differentialgleichungen erster Ordnung mit zwei Variablen. Eine Kenntnis ihrer Eigenschaften ist wichtig für ein Verständnis des Verhaltens komplexer nichtlinearer Systeme in der Umgebung ihrer stationären Punkte. Wir werden diese Fixpunkte klassifizieren und dabei den Begriff des Index eines Fixpunktes kennenlernen.

### ■ 1.1 Phasenportraits linearer Flüsse

Das Zeitverhalten eines Systems, beispielsweise eines mechanischen Pendels, eines elektrischen Schwingkreises oder eines biologischen Ökosystems, wird oft durch gekoppelte gewöhnliche Differentialgleichungen beschrieben. Solche Differentialgleichungen lassen sich in ein System erster Ordnung für die Variablen  $x_1, \dots, x_n$  transformieren. Im einfachsten Fall sind sie explizite Gleichungen für die Änderung  $\dot{x}_j = dx_j/dt$  der Größen  $x_j$  mit der Zeit  $t$ ,

$$\dot{x}_j = v_j(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad j = 1, \dots, n. \quad (1.1)$$

(Genauer gesagt handelt es sich hier um ein **autonomes** System. Im allgemeineren Fall können die Funktionen  $v_j$  zeitabhängig sein.) Man sucht eine Lösung für die Anfangsbedingungen  $x_j(t_0)$ . Wir werden hier annehmen, dass die Variablen und die Funktionen reell sind. Zur Abkürzung schreibt man das Differentialgleichungssystem auch als

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x}). \quad (1.2)$$

Dabei steht  $\mathbf{x}$  für ein  $n$ -Tupel der Variablen und es soll dadurch nicht unterstellt werden, dass es sich dabei um das mathematische Objekt eines Vektors handeln muss. Man bezeichnet den von den Variablen  $\mathbf{x}$  aufgespannten Raum als den **Phasenraum** und eine Lösung der Differentialgleichungen als **Phasenbahn** oder auch kurz als Bahn oder **Trajektorie**. Solch ein Phasenraum ist in der Regel eine **Mannigfaltigkeit**, also lokal ein  $n$ -dimensionaler Vektorraum. In jedem Punkt  $\mathbf{x}$  des Phasenraumes ist der Tangentialvektor einer Phasenbahn durch  $\mathbf{v}$  gegeben, die Vektoren  $\mathbf{v}(\mathbf{x})$  bilden ein **Vektorfeld** auf der Mannigfaltigkeit, ihre Richtungen ein **Richtungsfeld**.

Die Geschwindigkeiten  $v_j(x_1, \dots, x_n)$  sind im Allgemeinen **nichtlineare** Funktionen, was in aller Regel zu einem sehr reichhaltigen dynamischen Verhalten führt. Man findet dabei die unterschiedlichsten Strukturen wie beispielsweise Fixpunkte, Grenzzyklen, chaotische Bahnen

und seltsame Attraktoren. Eine Übersicht über die Bahnen eines Systems bezeichnet man als ein **Phasenportrait**.

Von großer Bedeutung sind die Punkte  $\mathbf{x}_s$  des Phasenraums mit  $\mathbf{v}(\mathbf{x}_s) = 0$ , die sich also zeitlich nicht ändern. Sie haben viele Namen, wie beispielsweise **singuläre Punkte**, **stationäre Punkte**, **Gleichgewichtspunkte** oder **Fixpunkte**. Wir werden das Verhalten in der Umgebung dieser stationären Punkte genauer analysieren.

Eine Grundvoraussetzung für eine Untersuchung solcher dynamischer Systeme ist eine gute Kenntnis der einfachsten Modellsysteme dieser Art, nämlich **linearer Systeme**

$$\dot{x}_j = \sum_{k=1}^n a_{jk} x_k, \quad j = 1, \dots, n. \quad (1.3)$$

Hier ist  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$  ein Vektor und wir können die Gleichungen in Matrixform  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$  zusammenfassen mit der Matrix  $\mathbf{A} = (a_{jk})$ . Solche Gleichungen erhält man beispielsweise dann, wenn man das nichtlineare System (1.1) in der Nähe eines stationären Punktes  $\mathbf{x}_s$  mit  $v_j(\mathbf{x}_s) = 0$  betrachtet. Entwickelt man die  $v_j(\mathbf{x})$  um diesen stationären Punkt und verschiebt ihn in den Koordinatennullpunkt, so erhält man die Gleichungen (1.1) mit  $a_{jk} = \partial v_j / \partial x_k |_{\mathbf{x}_s}$ .

Im einfachsten Fall einer einzigen Variablen kann die nichtlineare Differentialgleichung

$$\dot{x} = f(x) \quad (1.4)$$

durch  $t - t_0 = \int_{x_0}^x f^{-1}(x') dx'$  gelöst werden. In der Umgebung eines stationären Punktes  $x_s$  mit  $\dot{x} = f(x_s) = 0$  ist das Verhalten der linearisierten Gleichung  $\dot{x} = a(x - x_s)$  mit  $a = f'(x_s)$  sehr übersichtlich: Die Lösung  $x(t) = x_s + x_0 e^{a(t-t_0)}$  nähert sich für  $a < 0$  dem stationären Punkt  $x_s$ , für  $a > 0$  entfernt sie sich davon. Der stationäre Punkt ist dann **stabil** oder **instabil**.

Schon für zwei Variablen ist das Verhalten der linearen Differentialgleichungen

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

mit den Anfangsbedingungen  $(x(0), y(0))^T = (x_0, y_0)^T$  zur Zeit  $t_0 = 0$  merklich interessanter. Es sei daran erinnert, dass wir hier reelle Matrixelemente und Anfangsbedingungen annehmen wollen, und damit auch reelle Lösungen  $x(t)$  und  $y(t)$ . Außerdem wollen wir hier den einfachen Fall zeitunabhängiger Matrixelemente betrachten. Mehr zu dem zeitabhängigen Fall findet man in Abschnitt 2.2.

Wir können eine Lösung der Differentialgleichungen (1.5) finden, indem wir die erste Differentialgleichung ein zweites Mal nach der Zeit differenzieren und dann die Variable  $y(t)$  mithilfe der zweiten Gleichung eliminieren. Das führt dann zu einer Differentialgleichung zweiter Ordnung wie bei dem gedämpften harmonischen Oszillator in Abschnitt 1.3. Hier wollen wir aber bei der Matrixdarstellung

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (1.6)$$

bleiben. Einfache Lösungen dieser Differentialgleichung findet man mithilfe des Separationsansatzes

$$\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t} \mathbf{u} \quad (1.7)$$

mit einem zeitlich konstanten Vektor  $\mathbf{u}$ . Die Zeitableitung ergibt  $\dot{\mathbf{x}} = \lambda \mathbf{x}$  und Einsetzen in (1.6) führt auf

$$\lambda e^{\lambda t} \mathbf{u} = e^{\lambda t} \mathbf{A}\mathbf{u} \quad \text{oder} \quad \mathbf{A}\mathbf{u} = \lambda \mathbf{u}. \quad (1.8)$$

Der Vektor  $\mathbf{u}$  ist also **Eigenvektor** der Matrix  $\mathbf{A}$  mit dem **Eigenwert**  $\lambda$ . Man erhält einen solchen Eigenwert durch die Lösung der **charakteristischen Gleichung**

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0 \quad (1.9)$$

(vgl. M2, Gleichung (1.53)). Die Eigenwerte  $\lambda_j$  der Matrix  $\mathbf{A}$  und die zugehörigen Eigenvektoren  $\mathbf{u}_j$ , also vom Nullvektor verschiedene Vektoren mit  $\mathbf{A}\mathbf{u}_j = \lambda_j\mathbf{u}_j$ , sind sehr wichtig für ein Verständnis der Dynamik des Systems. Man sieht sofort, dass jedes Vielfache eines Eigenvektors auch diese Bedingung erfüllt, es gibt also einen **Eigenraum** zu jedem Eigenwert. Mit der Zeit variiert ein Eigenvektor wie

$$\mathbf{u}_j(t) = e^{\lambda_j t} \mathbf{u}_j, \quad (1.10)$$

was man sofort durch Einsetzen in die Differentialgleichung (1.6) sieht. Der Vektor bleibt also immer in diesem Eigenraum.

Für unsere  $2 \times 2$ -Matrix gibt es entweder zwei verschiedene Eigenvektoren, nennen wir sie  $\mathbf{u}_\pm$  mit den Eigenwerten  $\lambda_\pm$ , oder nur einen einzigen Eigenvektor  $\mathbf{u}$  mit dem Eigenwert  $\lambda$ . Im ersten Fall ist der Rang der Matrix  $\mathbf{A}$  gleich zwei und die Eigenvektoren bilden eine Basis. Die Matrix ist dann diagonalisierbar. Im zweiten Fall ist der Rang der Matrix gleich eins und die Matrix ist nicht diagonalisierbar.

Ein allgemeinerer Lösungsansatz der Dynamik des Systems (1.6) formuliert die Bewegungsgleichung in der Matrixform

$$\frac{d\mathbf{U}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{U}, \quad (1.11)$$

für die **Zeitentwicklungsmatrix**  $\mathbf{U}(t)$ , die zur Anfangszeit  $t_0 = 0$  gleich der Einheitsmatrix ist:  $\mathbf{U}(0) = \mathbf{I}$ . Damit erhält man durch

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{U}(t)\mathbf{x}_0 \quad (1.12)$$

die Lösung für jede Anfangsbedingung  $\mathbf{x}_0$ . Die Lösung des linearen Gleichungssystems (1.11) ist die Exponentialfunktion

$$\mathbf{U}(t) = e^{\mathbf{A}t} \quad (1.13)$$

deren explizite Form als  $2 \times 2$ -Matrix wir hier nicht angeben wollen. Man findet sie für den harmonischen Oszillator in Abschnitt 1.3, oder allgemeiner in M2, Abschnitt 2.2.

## ■ 1.2 Fixpunkte und Phasenportraits

Das lineare System  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$  aus Gleichung (1.6) besitzt als stationären Punkt, also als Fixpunkt, den Nullpunkt  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ . Das ist der einzige Fixpunkt, wenn  $\mathbf{A}$  invertierbar ist, also für  $\det \mathbf{A} \neq 0$ . Andernfalls kann es mehr Lösungen geben, nämlich alle Vektoren mit  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ , die Vektoren aus dem **Kern** von  $\mathbf{A}$ . Wenn  $\mathbf{A}$  die Nullmatrix ist, wäre das der gesamte Raum, andernfalls ein eindimensionaler Teilraum, der Eigenraum zum Eigenwert  $\lambda = 0$ . Derartige Fixpunkte nennt man **nicht-isoliert**, denn in jeder Umgebung eines solchen Punktes liegt ein weiterer Fixpunkt. Im Folgenden werden wir für alle Typen von Fixpunkten die zugehörigen Phasenportraits genauer beschreiben.

Das dynamische Verhalten der Lösungen hängt sicherlich nicht von dem verwendeten Koordinatensystem ab, sondern von Größen, die bei Transformationen des Koordinatensystems,

also Ähnlichkeitstransformationen, invariant bleiben (vgl. M2, Kapitel 4). Das ist der Spur der Matrix  $\mathbf{A}$ , also die Summe der Eigenwerte, und die Determinante, also das Produkt der Eigenwerte:

$$\begin{aligned}\tau &= \text{spur}\mathbf{A} = a + d = \lambda_+ + \lambda_-, \\ \Delta &= \det\mathbf{A} = ab - cd = \lambda_+ \lambda_-\end{aligned}\quad (1.14)$$

und natürlich die Eigenwerte

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2}(\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4\Delta}) \quad (1.15)$$

selbst. Da  $\mathbf{A}$  reell ist, sind Spur und Determinante reell und die Eigenwerte sind entweder beide reell oder bilden ein komplex konjugiertes Paar.

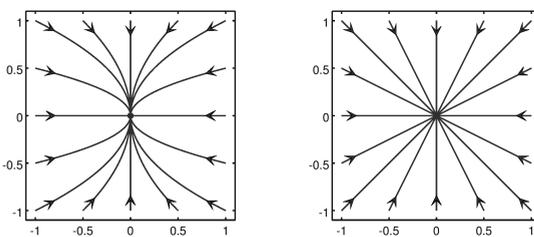
Um die Dynamik des Systems zu verstehen, muss man zunächst alle möglichen unterschiedlichen Typen von Eigenwerten klassifizieren.

### Fall I: $\mathbf{A}$ ist diagonalisierbar.

Bringt man die Matrix durch eine Ähnlichkeitstransformation auf Diagonalform  $\begin{pmatrix} \lambda_- & 0 \\ 0 & \lambda_+ \end{pmatrix}$ , dann liegen die beiden Eigenvektoren in den Koordinatenrichtungen. Es gibt vier Möglichkeiten:

#### Fall Ia: Eigenwerte reell und $\det\mathbf{A} > 0$ .

Dann haben die Eigenwerte gleiche Vorzeichen und wir finden ein Verhalten wie in Bild 1.1 für  $\lambda_- = -2$ ,  $\lambda_+ = -1$  illustriert, ein sogenannter **stabiler Knoten**. Die Bahnen nähern sich im Langzeitlimit dem Fixpunkt in der Eigenrichtung des Eigenwertes mit dem kleinsten Betrag des Eigenwertes, also der langsamsten Richtung. In dem dargestellten Fall verläuft die Bewegung in der  $y$ -Richtung schneller als die in der  $x$ -Richtung, da  $|\lambda_-| > |\lambda_+|$ . Wenn beide Eigenwerte negativ und gleich sind, so bewegt sich jeder Punkt radial zum Zentrum, ein **stabiler Stern**, wie im rechten Bild. Sind beide Eigenwerte positiv, dann kehrt sich das Zeitverhalten um, und die Bahnen entfernen sich vom Fixpunkt. Wir haben einen **instabilen Knoten** bzw. einen **instabilen Stern**.



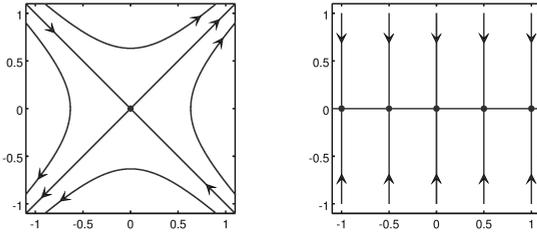
**Bild 1.1** Stabiler Knoten (links) und stabiler Stern (rechts).

#### Fall Ib: Eigenwerte reell und $\det\mathbf{A} < 0$ .

Die Eigenwerte haben unterschiedliches Vorzeichen. In einer Eigenrichtung finden wir dann eine Bewegung zum Fixpunkt hin, in der anderen von ihm weg. Wir haben einen **Sattelpunkt**, wie links in Bild 1.2 für  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  mit den Eigenwerten  $\lambda_{\pm} = \pm 1$  und den Eigenvektoren  $\mathbf{u}_{\pm} = (1, \pm 1)^T$ .

#### Fall Ic: Eigenwerte reell und $\det\mathbf{A} = 0$ .

Dann ist einer der beiden Eigenwerte gleich null und damit der Kern von  $\mathbf{A}$  nicht nur der Nullvektor. Das rechte Bild 1.2 zeigt ein Phasenportrait für  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ . Hier besteht



**Bild 1.2** Sattelpunkt (links) und nicht-isolierte Fixpunkte auf der  $x$ -Achse (rechts).

die gesamte  $x$ -Achse aus (nicht-isolierten) Fixpunkten und alle Punkte nähern sich im Langzeitlimit dieser Achse.

**Fall I d: Eigenwerte konjugiert komplex.**

Dieser Fall mit

$$\lambda_{\pm} = \gamma \pm i\omega \quad , \quad \gamma, \omega \in \mathbb{R} \quad (1.16)$$

tritt ein für  $\tau^2 - 4\Delta < 0$ . Dann ist die allgemeine Lösung

$$\mathbf{x}(t) = c_+ e^{\lambda_+ t} \mathbf{u}_+ + c_- e^{\lambda_- t} \mathbf{u}_- \quad (1.17)$$

ein komplexer Vektor. Wir suchen aber eine reelle Lösung. Da unsere Differentialgleichung  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$  linear ist, ist mit  $\mathbf{x}(t)$  auch  $\mathbf{x}^*(t)$  eine Lösung und wir können reelle Linearkombinationen konstruieren. Das lässt sich in übersichtlicher Weise formulieren, indem man die Diagonalfom  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \lambda_- & 0 \\ 0 & \lambda_+ \end{pmatrix}$  mithilfe der Ähnlichkeitstransformation  $\mathbf{S} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$  auf eine reelle Form transformiert:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}' &= \mathbf{S}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{S} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_- & 0 \\ 0 & \lambda_+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_- & i\lambda_- \\ i\lambda_+ & \lambda_+ \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \lambda_- + \lambda_+ & i\lambda_- - i\lambda_+ \\ -i\lambda_- + i\lambda_+ & \lambda_- + \lambda_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \omega \\ -\omega & \gamma \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Dann lauten die Bewegungsgleichungen in den Koordinaten  $\mathbf{x}' = \mathbf{S}^{-1} \mathbf{x}$

$$\begin{aligned} \dot{x}' &= \gamma x' + \omega y' , \\ \dot{y}' &= -\omega x' + \gamma y' , \end{aligned} \quad (1.19)$$

die man in Polarkoordinaten

$$x' = r \cos \varphi , \quad y' = r \sin \varphi \quad (1.20)$$

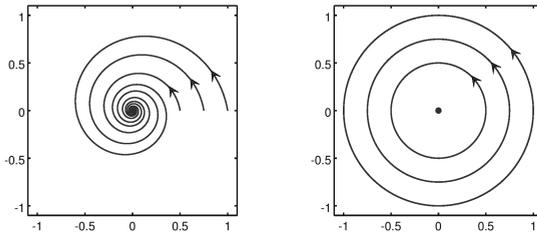
entkoppeln kann als

$$\dot{r} = \gamma r , \quad \dot{\varphi} = -\omega \quad (1.21)$$

mit den Lösungen

$$r(t) = r_0 e^{\gamma t} , \quad \varphi(t) = \varphi_0 - \omega t. \quad (1.22)$$

Das ist eine Rotation mit Winkelgeschwindigkeit  $\omega$ , deren Entfernung vom Koordinatennullpunkt exponentiell abnimmt (für  $\gamma < 0$ ), zunimmt (für  $\gamma > 0$ ) oder konstant bleibt (für  $\gamma = 0$ ). Im ersten Fall ist das ein **stabiler Fokus**, eine **Senke** des Vektorfeldes, wie in links in Bild 1.3 dargestellt, im zweiten Fall ein **instabiler Fokus**, eine **Quelle** des Vektorfeldes, und im letzten Fall ein **Zentrum** wie im rechten Bild.



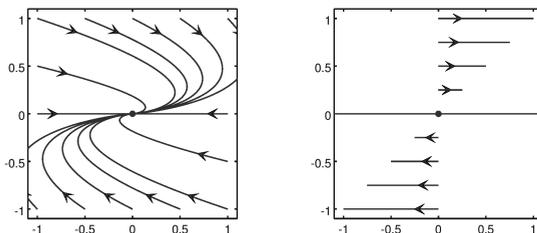
**Bild 1.3** Stabiler Fokus (links) und Zentrum (rechts).

**Fall II: A ist nicht diagonalisierbar.**

Dann lässt sich die Matrix durch eine Ähnlichkeitstransformation auf die Jordan-Form

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \tag{1.23}$$

bringen (vgl. M2, Abschnitt 2.1.3). Dabei ist  $\lambda$  der einzige Eigenwert mit dem einzigen Eigenvektor  $u = (1, 0)^T$ . Bild 1.4 zeigt den Fluss für  $\lambda = -0.5$ . Dies ist ein stabiler **degenerierter Knoten**. Alle Bahnen nähern sich dem Koordinatennullpunkt tangential zur Richtung des Eigenvektors, hier die  $x$ -Achse. Für  $\lambda = 0$  besteht die gesamte  $x$ -Achse aus (nicht-isolierten) Fixpunkten, ähnlich zu dem Fall in Bild 1.2 für eine diagonalisierbare Matrix mit einem Eigenwert  $\lambda = 0$ . Das Verhalten ist hier jedoch anders: Es gibt keine Bahnen, die gegen die Fixpunkte konvergieren. Alle Trajektorien verlaufen parallel zur  $x$ -Achse mit einer Geschwindigkeit, die proportional zur  $y$ -Komponente anwächst. Alle Bahnen der Abbildung wurden mit  $x_0 = 0$  gestartet und jeweils um das gleiche Zeitintervall propagiert.

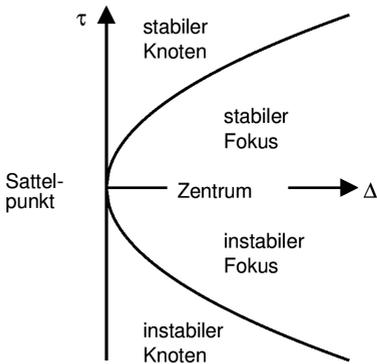


**Bild 1.4** Degenerierter stabiler Knoten (links) und nicht-isolierte Fixpunkte (rechts).

Zur Übung der Fixpunktklassifikation die folgende Aufgabe:

**Aufgabe 1.1 (Lös. Seite 27):** Von welchem Typ sind die Fixpunkte der Matrizen  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$  und  $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ?

Zusammenfassend ist die Klassifikation der Fixpunkte in Bild 1.5 in der  $(\Delta, \tau)$ -Ebene dargestellt. Innerhalb der nach rechts geöffneten Parabel  $\tau^2 - 4\Delta = 0$  sind die stationären Punkte Fokus-Punkte, stabil für  $\tau < 0$ , instabil für  $\tau > 0$ , und Zentren für  $\tau = 0$ . Unterhalb und oberhalb der Parabel ergeben sich stabile und instabile Knoten, und in der Halbebene  $\Delta < 0$  finden wir Sattelpunkte. Die verschiedenen Fixpunkttypen gehen auf den kritischen Kurven ineinander über. Hier haben wir drei solche Kurven:



**Bild 1.5** Klassifikation stationärer Punkte in Abhängigkeit von Spur  $\tau$  und Determinante  $\Delta$  der Matrix  $\mathbf{A}$ . Auf der Parabel  $\tau^2 - 4\Delta = 0$  findet man degenerierte Knoten und auf der Geraden  $\Delta = 0$  nicht-isolierte stationäre Punkte.

- (a) Wenn man bei einer Parametervariation die ( $\Delta=0$ )-Achse von der linken Seite her kreuzt, dann gehen zwei reelle Fixpunkte verschiedenen Vorzeichens in zwei reelle gleichen Vorzeichens über. Auf der kritischen Geraden ist also einer der Fixpunkte gleich null. Dort finden wir nicht-isolierte Fixpunkte wie rechts in Bild 1.2 dargestellt.
- (b) Kreuzt man die kritische Parabel  $\tau^2 - 4\Delta = 0$  von außen nach innen, dann nähern sich zwei reelle Eigenwerte, treffen sich und gehen in ein konjugiert komplexes Paar über. Auf der Parabel selbst ist die Matrix nicht diagonalisierbar und hat nur einen einzigen Eigenwert. Bei diesem Übergang verwandelt sich ein Knoten über einen degenerierten Knoten (vgl. Bild 1.4) in einen Fokus-Punkt.
- (c) Auf der Achse  $\tau = 0$  mit  $\Delta > 0$  finden wir zwei rein imaginäre Eigenwerte und wir haben ein Zentrum (vgl. das rechte Bild in Bild 1.3). Bei einer Parametervariation, die diese Achse kreuzt, geht ein stabiler Fokus in einen instabilen über.

Von den drei beschriebenen kritischen Fällen trifft man am häufigsten auf den Fall (c), also auf Zentren. Sie treten beispielsweise in reibungsfreien mechanischen Systemen auf.

## ■ 1.3 Der harmonische Oszillator

Der angetriebene gedämpfte harmonische Oszillator ist eines der elementaren Modellsysteme der klassischen Physik. Die Bewegungsgleichung lautet

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t) \quad (1.24)$$

mit der Dämpfungskonstanten  $\gamma$  und der Frequenz  $\omega_0$  der ungedämpften Schwingung. Der zeitabhängige Antrieb  $f(t)$  ist im einfachsten Fall eine monofrequente periodische Funktion  $f(t) = f_0 \cos \Omega t$ .

Gleichung (1.24) ist eine Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Sie lässt sich in zwei gekoppelte Differentialgleichungen erster Ordnung umschreiben, indem man die Geschwindigkeit  $v = \dot{x}$  als zweite Veränderliche neben  $x$  einführt. Dann erhält man

$$\dot{x} = v \quad , \quad \dot{v} = -\omega_0^2 x - 2\gamma v + f(t). \quad (1.25)$$

In vektorieller Form lautet das

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -2\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}, \quad (1.26)$$

oder einfacher

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{f}(t) \quad (1.27)$$

mit  $\mathbf{x} = (x, v)^T$ ,  $\mathbf{f}(t) = (0, f(t))^T$  und der Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -2\gamma \end{pmatrix}. \quad (1.28)$$

Im einfachsten Fall haben wir keinen äußeren Antrieb,  $f(t) = 0$ , und die Bewegungsgleichung vereinfacht sich zu der homogenen Differentialgleichung  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$  aus Gleichung (1.6), die wir oben untersucht haben (vgl. Seite 12 und folgende). Den angetriebenen Fall werden wir in Abschnitt 2.2 betrachten.

Die Eigenwerte der Matrix  $\mathbf{A}$  sind gleich

$$\lambda_{\pm} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}. \quad (1.29)$$

Es lassen sich drei Fälle unterscheiden:

- (a) Für schwache Dämpfung ( $\gamma < \omega_0$ ), im **Schwingfall**, ist der Term unter der Wurzel negativ und wir schreiben zweckmäßigerweise

$$\lambda_{\pm} = -\gamma \pm i\omega, \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}. \quad (1.30)$$

Die Eigenfunktionen fallen also zeitlich ab wie  $e^{-\gamma t}$  und oszillieren mit der Frequenz  $\omega$ .

- (b) Für starke Dämpfung ( $\gamma > \omega_0$ ) sind die Eigenwerte reell und beide Lösungen fallen exponentiell ab, am langsamsten die zum Eigenwert  $\lambda_+$ .
- (c) Für die kritische Dämpfung ( $\gamma = \omega_0$ ) entarten die Eigenwerte,  $\lambda_+ = \lambda_-$ , und auch die beiden zugehörigen Eigenvektoren stimmen überein.

Die reelle Matrix  $\mathbf{A}$  aus Gleichung (1.28) ist nicht-symmetrisch. Wenn dann  $\lambda_n$  ihr Eigenwert ist, dann ist  $\lambda_n^*$  ein Eigenwert der hermitesch konjugierten Matrix  $\mathbf{A}^\dagger$ , ihre Eigenvektoren sind aber verschieden. Man unterscheidet dann zwischen **rechten Eigenvektoren**  $\mathbf{x}_n$  (denen von  $\mathbf{A}$ ) und **linken Eigenvektoren**  $\mathbf{y}_n$  (denen von  $\mathbf{A}^T$ ). Es lässt sich leicht zeigen, dass die rechten und linken Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten orthogonal sind. (Mehr dazu in M2, Abschnitt 1.3.2.) Eine solche biorthogonale Basis ist zweckmäßig bei konkreten Berechnungen. Man normiert dann die Basisvektoren wie

$$\mathbf{y}_n^\dagger \mathbf{x}_m = \delta_{nm}. \quad (1.31)$$

**Aufgabe 1.2 (Lös. Seite 28):** Berechnen Sie die rechten und linken Eigenvektoren  $\mathbf{x}_{\pm}$  bzw.  $\mathbf{y}_{\pm}$  der Matrix  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -2\gamma \end{pmatrix}$  aus Gleichung (1.28) zu den Eigenwerten  $\lambda_{\pm}$ . Verifizieren Sie, dass sie orthogonal sind,  $\mathbf{y}_-^\dagger \mathbf{x}_+ = \mathbf{y}_+ \cdot \mathbf{x}_- = 0$ , und normieren Sie sie wie  $\mathbf{y}_-^\dagger \mathbf{x}_- = \mathbf{y}_+^\dagger \mathbf{x}_+ = 1$ .

Eine **allgemeine Lösung**, also eine Lösung  $\mathbf{x}(t)$  für jede Anfangsbedingung  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ , lässt sich mit der Zeitentwicklungsmatrix  $\mathbf{U}(t)$  aus (1.11) bequem als

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{U}(t) \mathbf{x}_0 \quad (1.32)$$

schreiben. Wir werden weiter unten sehen, wie man eine solche Matrixlösung in exponentieller Form  $\mathbf{U}(t) = e^{\mathbf{A}t}$  (vgl. Gleichung (1.13)) konstruieren kann. Im Moment wollen wir einmal akzeptieren, dass

$$\mathbf{U}(t) = \frac{e^{-\gamma t}}{\omega} \begin{pmatrix} \omega_0 \sin(\omega t + \varphi) & \sin \omega t \\ -\omega_0^2 \sin \omega t & -\omega_0 \sin(\omega t - \varphi) \end{pmatrix} \quad (1.33)$$

mit  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$  und  $\sin \varphi = \omega / \omega_0$  eine solche Lösung darstellt.

**Aufgabe 1.3 (Lös. Seite 28):** Man kann die Lösung (1.33) natürlich durch Differenzieren überprüfen, beispielsweise für das Matrixelement  $U_{11}$ .

Hier haben wir zunächst den schwach gedämpften Fall  $\gamma < \omega_0$  angenommen, den Schwingfall. Die Modifikationen für starke Dämpfung  $\gamma > \omega_0$  ist

$$\mathbf{U}(t) = \frac{e^{-\gamma t}}{\tilde{\omega}} \begin{pmatrix} \omega_0 \sinh(\tilde{\omega} t + \tilde{\varphi}) & \sinh \tilde{\omega} t \\ -\omega_0^2 \sinh \tilde{\omega} t & -\omega_0 \sinh(\tilde{\omega} t - \tilde{\varphi}) \end{pmatrix} \quad (1.34)$$

mit  $\tilde{\omega} = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$  und  $\sinh \tilde{\varphi} = \tilde{\omega} / \omega_0$ . Im Grenzfall kritischer Dämpfung,  $\gamma = \omega_0$ , liefern beide Gleichungen

$$\mathbf{U}(t) = e^{-\gamma t} \begin{pmatrix} 1 + \gamma t & t \\ -t & 1 - \gamma t \end{pmatrix}. \quad (1.35)$$

Im Folgenden wollen wir zeigen, wie man eine Matrixlösung wie (1.33) bestimmen kann. Wir leisten uns dabei den Luxus einer Verallgemeinerung und untersuchen die Differentialgleichung

$$\frac{d\mathbf{U}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{U} \quad \text{mit} \quad \mathbf{U}(0) = \mathbf{I} \quad (1.36)$$

für die allgemeine  $2 \times 2$ -Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (1.37)$$

mit konstanten Koeffizienten. Die schon oben erwähnte Lösung ist  $\mathbf{U}(t) = e^{\mathbf{A}t}$  mit der Matrixfunktion  $e^{\mathbf{A}t}$ , die man beispielsweise durch die Reihendarstellung der Exponentialfunktion

$$e^{\mathbf{A}t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \mathbf{A}^n \quad (1.38)$$

definieren kann, was natürlich wieder eine  $2 \times 2$ -Matrix ergibt, nämlich

$$e^{\mathbf{A}t} = e^{\lambda_0 t} \left\{ \cosh \gamma_0 t \mathbf{I} + \frac{1}{\gamma_0} \sinh \gamma_0 t (\mathbf{A} - \lambda_0 \mathbf{I}) \right\}. \quad (1.39)$$

mit  $\lambda_0 = (a + d)/2$  und  $\gamma_0 = \sqrt{(a - d)^2/4 + bc}$ . (Mehr darüber findet sich in M2, Kapitel 2.2; siehe insbesondere Gleichung (2.88).)

Die Zeitentwicklungsmatrix  $\mathbf{U}(t)$  beschreibt den Fluss im Phasenraum, der durch das Vektorfeld  $\mathbf{A}\mathbf{x}$  erzeugt wird. Für die Matrix  $\mathbf{A}$  aus (1.28) erhält man  $\lambda_0 = -\gamma$  und  $\gamma_0 = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$ , also die oben angegebenen Lösungen (1.33) und (1.34).

**Aufgabe 1.4 (Lös. Seite 28):** Berechnen Sie explizit Determinante und Spur der Matrix  $\mathbf{U}(t)$  aus (1.33). Wie lassen sich diese Ergebnisse direkt aus der Matrix  $A$  aus (1.28) ermitteln?

Die Zeitentwicklungsmatrizen  $\mathbf{U}(t)$  zu einer Matrix  $A$  bilden eine kommutative Gruppe bezüglich der Matrixmultiplikation. Das erkennt man auf einfache Weise mithilfe der Darstellung  $\mathbf{U}(t) = e^{At}$ . Zunächst gehört wegen  $\mathbf{I} = e^{A \cdot 0} = \mathbf{U}(0)$  die Einheitsmatrix zu dieser Menge und die Gleichungen

$$\mathbf{U}(t_2)\mathbf{U}(t_1) = e^{At_2}e^{At_1} = e^{A(t_2+t_1)} = \mathbf{U}(t_2+t_1) = \mathbf{U}(t_1)\mathbf{U}(t_2), \quad (1.40)$$

$$\mathbf{U}^{-1}(t) = e^{-At} = \mathbf{U}(-t) \quad (1.41)$$

zeigen, dass auch die Produkte und die Inversen dazugehören. Außerdem belegt die Formel für das Produkt die Kommutativität.

## ■ 1.4 Ein Ausflug in die Nichtlinearität

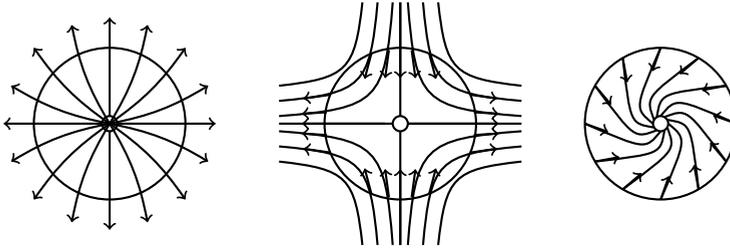
Eine wesentliche Eigenschaft der oben betrachteten Systeme ist ihre **Linearität**. Das erlaubt eine Analyse mit den Techniken der Linearen Algebra, schränkt aber andererseits ihre Anwendbarkeit zur Beschreibung interessanter physikalischer Systeme viel zu sehr ein. Im Rahmen dieses Buches können wir leider nur einen kurzen Ausflug in die Welt nichtlinearer Systeme unternehmen und beschränken uns dabei auf zweidimensionale autonome Systeme, die durch die Differentialgleichungen

$$\dot{x} = f(x, y) \quad , \quad \dot{y} = g(x, y) \quad (1.42)$$

beschrieben werden, die also nicht explizit von der Zeit abhängen. Mit  $\mathbf{x} = (x, y)^T$  für den Punkt in der Phasenebene und der Geschwindigkeit  $\mathbf{v} = (f, g)^T$ , die wir als glatt, also beliebig oft differenzierbar, voraussetzen, schreiben wir dies wieder als  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x})$ . Solche zweidimensionalen Systeme sind vergleichsweise einfach zu verstehen, denn man kann zeigen, dass hier *keine* chaotische Dynamik auftreten kann.

Einen Überblick über das dynamische Verhalten liefert das Phasenportrait. Es wird wesentlich organisiert durch **Invarianten** der Dynamik, also Punktmenge, deren Punkte bei der Zeitentwicklung für alle Zeiten in dieser Menge verbleiben. Das sind hier Fixpunkte und geschlossene Bahnen, also **invariante Kurven**.

Zum besseren Verständnis ihrer Organisation im Phasenraum benötigen wir noch ein weiteres Charakteristikum, ihren **Index**. Wir betrachten dazu das Richtungsfeld auf einer einfach geschlossenen Kurve  $C$  im Phasenraum, also auf einer Kurve, die sich nicht selbst schneidet. Außerdem soll auf der Kurve kein Fixpunkt liegen. Wir betrachten in einem Punkt der Kurve einen Zeiger in Richtung des Richtungsfeldes und verfolgen diesen Zeiger bei einem vollständigen Umlauf des Punktes längs der Kurve entgegen dem Uhrzeigersinn. Der **Index**  $I_C$  der Kurve ist definiert als die Anzahl der Zeigerdrehungen, die **Windungszahl**, wieder gemessen entgegen dem Uhrzeigersinn. Unter dem **Index eines Fixpunktes** versteht man den Index ei-



**Bild 1.6** Index stationärer Punkte. Knoten (links) und Fokus (rechts) haben den Index +1, ein Sattelpunkt (Mitte) hat den Index -1.

ner geschlossenen Kurve, die ihn einschließt und keinen weiteren Fixpunkt. Hier einige der wichtigsten **Eigenschaften des Index**<sup>1</sup>:

- (a) Nach einer kurzen Überlegung mit einem Blick auf Bild 1.6 erkennt man, dass der Index eines Fokus-Punktes und eines Knotens gleich +1 ist, der eines Sattelpunktes gleich -1.
- (b) Bei einer stetigen Deformation der Kurve  $C$  ohne Kreuzung eines Fixpunktes ändert sich der Index nicht, denn als ganzzahlige Größe kann sich der Index nicht stetig ändern.
- (c) Wenn die Kurve  $C$  keinen Fixpunkt umschließt, ist ihr Index gleich null, denn man kann nach (b) die Kurve stetig auf einen winzigen Punkt zusammenziehen. Dort ist das Feld konstant und die Windungszahl folglich null.
- (d) Umschließt die Kurve  $C$  eine endliche Anzahl isolierter Fixpunkte, ist ihr Index gleich der Summe der Indizes dieser Fixpunkte. Das lässt sich zeigen, indem man die Kurve stetig zusammenzieht, sodass sie nur noch die Fixpunkte umschließt sowie Hin- und Rückwege längs ihrer Verbindungslinien. Dann kompensieren sich die Beiträge dieser Verbindungslinien.
- (e) Wenn die geschlossene Kurve eine Bahnkurve ist, dann sind alle Geschwindigkeitsvektoren tangential zur Bahn gerichtet. Folglich dreht sich der Vektor genau wie der Bahnpunkt genau einmal und der Index ist gleich +1.

Wenn diese Betrachtungen der Indexfunktion zu anschaulich, also zu wenig „mathematisch“ erscheinen, dann könnte die folgende Aufgabe das ausgleichen:

**Aufgabe 1.5 (Lös. Seite 29):** Für das Vektorfeld der Differentialgleichungen (1.42) ist der Index einer einfachen Kurve  $C$ , die keinen Fixpunkt enthält, gleich

$$I_C = \frac{1}{2\pi} \oint_C \frac{f dg - g df}{f^2 + g^2}.$$

Beweisen Sie diese Integralformel und berechnen Sie für das Feld  $f(x, y) = x \cos \alpha - y \sin \alpha$ ,  $g(x, y) = x \sin \alpha - y \cos \alpha$  mithilfe der Integralformel den Index für einen Kreis, der den Nullpunkt umschließt.

<sup>1</sup> Sehr viel mehr zu diesem Thema findet man in dem Buch Arnold, V. I.: *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, Springer-Verlag 2001.

# Index

- Abbildung
  - affine, 75
  - flächentreue, 27, 64
  - Katzen-, 27
  - lineare, 27
  - Poincaré, 27, 52
  - stroboskopische, 26
  - symplektische, 27
- ABCD-Gesetz, 137, 139, 144
- adiabatisch, 173, 232, 237, 268, 269
- adjungiert, 160, 162
- affine Abbildung, 75
- ähnlich, 42
- Ähnlichkeitstransformation, 14, 42, 215, 244, 251, 257
- akustischer Zweig, 36
- Alice und Bob, 300
- allgemeine Lösung, 32
- AND-Gatter, 295
- angetriebene Schwingung, 36
- Anosov-System, 72
- antihermites, 40
- Antikommutator, 160, 211, 223, 224, 271
- antilinear, 257
- Antiteilchen, 227
- aperiodischer Grenzfall, 281
- Arnold, Vladimir I., 68
- Astroid-Kurve, 285, 286
- Attraktor, 12, 77
- Automorphismus, 69
- autonomes System, 11, 20, 52
- axiale Vergrößerung, 132
  
- Baker-Campbell-Hausdorff-Relation, 255
- Bandlücke, 36, 97
- Basisdarstellung, 162, 212
- Bell-Zustand, 294, 295, 299, 300
- Berry, Michael V., 269
- Berry-Phase, 269, 272, 273
  
- Bildweite, 134
- Bilinearform, 64
- Billard-Abbildung, 52, 53
- Billard-System, 51, 144
- biorthogonal, 18, 165, 276
- bipartite Quantensysteme, 291
- Blindwiderstand, 84, 94, 95
- Bloch
  - -Band, 176, 202
  - -Bedingung, 207
  - -Funktion, 176
  - -Gleichung, 217–219, 221
  - -Kugel, 215, 219, 285, 296
  - -Theorem, 175
  - -Vektor, 214–216, 219, 297
  - -Welle, 176, 203
- Bloch, Felix, 175, 215
- Blockmatrix, 223–226, 236
- Bogenlänge, 51, 105, 109
- Bohigas-Giannoni-Schmit-Vermutung, 246
- Bonnet, Pierre Ossian, 109
- Bose-Hubbard-Dimer, 254, 291
- Brechungsgesetz, 129
- Brechungsmatrix, 129, 136
- Brennpunkt, 132–137, 143, 259
- Brennweite, 133, 135, 136
- Brewster-Platte, 147
- Brillouin, Léon Nicolas, 244
- Brillouin-Zone, 35, 176, 244, 246
  
- C-System, 72
- Cantor-Menge, 244
- chaotisch, 50, 61, 65, 66, 144, 233, 247
- chaotische Bahn, 53
- charakteristische Gleichung, 13, 32, 47, 57, 240, 242
- charakteristischer Exponent, 42, 243
- Christoffel, Elwin Bruno, 103
- Christoffel-Symbol, 103, 106, 109, 121, 125

- Clifford-Algebra, 224  
 CNOT-Gatter, 298  
 Collins-Integral, 139  
 Concurrence, 294
- d'Alembert-Operator, 225  
 Dämpfungsmaß, 93–95  
 de Sitter, W., 122  
 de-Sitter-Metrik, 123  
 degenerierter Knoten, 16  
 Delta  
 – -Funktion, 42, 176, 194  
 – -Kamm, 176, 200, 202, 203  
 – -Potential, 194, 195, 199–202, 206, 207, 259  
 Determinante & Spur, 39, 64  
 Detuning, 240, 249  
 Deutsch, David, 291  
 diabatisch, 173, 232, 268, 269, 281  
 diabolisch, 270, 272, 277, 278  
 Dichtematrix, 212–214, 218, 220, 229  
 Dichteoperator, 161, 212, 216  
 Differentialgleichung, 11, 12, 20  
 – hillsche, 36, 42, 176, 242  
 – inhomogene, 36  
 Dipol, 237, 246  
 Dirac  
 – -Algebra, 224  
 – -Gleichung, 222, 223, 225  
 – -Kamm, 202  
 – -Matrix, 224  
 – -Operator, 223, 225, 226  
 Dirac, Paul, 222  
 diskrete Abbildung, 67, 72, 80  
 diskrete nichtlineare Schröd.-Gl., 283  
 Diskriminante, 24, 28, 285  
 Dispersionsrelation, 35, 36, 97, 176, 202, 207  
 Divergenz, 62  
 DNLS, 283  
 Doppel-Delta-Potential, 199  
 Doppelmuldenpotential, 167, 180, 259, 260  
 Drehimpuls, 51, 122, 172, 222, 226, 238, 257  
 Drehwellen-Näherung, 240  
 Drei-Teilchen-System, 44, 50  
 Dreieckschaltung, 90, 91  
 Drosselkette, 97  
 Dualraum, 159
- Duffing-Oszillator, 22, 25  
 dynamische Phase, 250, 270
- Eigen  
 – -frequenz, 33, 84, 85, 262  
 – -funktion, 18, 165, 169, 274, 275  
 – -raum, 13, 224, 278  
 – -spinor, 224  
 – -vektor, 13, 25, 32, 47, 57, 138, 141, 151, 161, 169, 184, 219, 227, 229  
 – -wert, 138, 151  
 – -zustand, 160, 161, 166, 169, 199, 226, 232, 247, 271  
 Eigenwert-Statistik, 233  
 Eingangsimpedanz, 92  
 Einheitsoperator, 161, 166  
 Einstein, Albert, 120  
 Einstein-Podolsky-Rosen-Paradoxon, 295  
 einsteinsche Feldgleichungen, 120, 122  
 einsteinsche Summenkonvention, 118  
 Einzugsbereich, 23, 25  
 elastischer Stoß, 44  
 Ellipse, 27, 63, 147, 259  
 elliptischer Fixpunkt, 27, 54, 65  
 Energie-Impuls-Tensor, 120  
 Energieerhaltung, 23, 45, 64, 293  
 Energiespektrum, 167, 174, 233  
 Entartung, 220, 234, 235, 270, 271, 274, 278  
 Entropie, 72, 161, 213, 247  
 EPR-Paradoxon, 295  
 EPR-Zustand, 295, 300  
 Ereignis, 116, 119  
 ergodisch, 72, 74  
 Erhaltungsgröße, 23, 45, 51, 63, 122, 161, 190, 227  
 Erwartungswert, 160, 186, 212  
 Erzeugungsoperator, 166, 254  
 euklidischer Raum, 122  
 Euler-Charakteristik, 109, 112, 286  
 Exponentialdarstellung, 119, 213  
 – der Spinmatrizen, 212  
 Exponentialfunktion  
 – Matrix-, 38  
 Exponentialverteilung, 234, 248  
 exzeptioneller Punkt, 96, 220, 258, 262, 275–280, 287

- exzeptionelles Zeitverhalten, 280, 281
- Faktorisierung, 301, 304
- Faraday-Rotator, 149–151
- Fehlerfunktion, 185
- Fermi, Enrico, 55
- Fermi-Beschleunigung, 55
- Feshbach, Herman, 172
- Feshbach-Resonanz, 172, 182, 183
- Feynman, Richard, 225
- Fixpunkt, 11–14, 16, 20, 22–25, 30, 65, 66, 68, 80, 143, 288
  - elliptischer, 27, 54, 65
  - hyperbolischer, 27, 54, 65, 70, 72
- Flächenerhaltung, 62
- Flächenbedingung, 250
- flächentreu, 27, 52, 64, 68, 69, 79
- Floquet
  - -Matrix, 42, 43
  - -Operator, 243, 247
  - -Theorie, 242
  - -Zustand, 243, 249
- Floquet, Achille Marie Gaston, 242
- Fokus, 15, 16, 23, 26, 30
- fokussierend, 132, 133, 135
- Fouriertransformation, 301, 304
- Fraktal, 75, 77
- Fraktaldimension, 75, 77
- Fresnel-Näherung, 139
- Fundamentalmatrix, 38
- Fundamentalsystem, 174, 203
- g-Parameter, 142
- Galilei
  - -Gruppe, 114, 116
  - -Transformation, 114, 116
- Galilei, Galileo, 114
- Gatter, 295
  - $\pi/8$ -, 296
  - AND-, 295
  - CNOT-, 298
  - Hadamard-, 296, 297, 299, 300, 303
  - NAND-, 295
  - NOT-, 295, 296
  - OR-, 295
  - Pauli-, 296
    - Phasen-, 296
    - reversibles, 295
    - SWAP-, 298
    - universelles, 295, 304
    - XOR-, 295
- Gauß
  - -Funktion, 139, 166
  - -Klammer, 48
  - -Mode, 144, 145
  - -Strahl, 138, 140
- Gauß, Carl Friedrich, 109
- Gauß-Bonnet
  - Satz von, 109
- gaußsche Krümmung, 107, 112, 125
- gaußsches
  - orthogonales Ensemble, 234
  - symplektisches Ensemble, 236
  - unitäres Ensemble, 236
- Gegenstandsweite, 134
- gekicktes System, 42, 67, 68
- gemischter Zustand, 161, 214
- Generator, 251
- Geodäte, 102–105, 112, 120
- geometrische Phase, 269, 270
- geschlossene Kurve, 20, 23, 25
- glatt, 20, 38, 101, 109
- GOE, 234, 235, 248
- Gradienten-Matrix, 272
- Gravitation, 120, 121
- Grenzyklus, 11, 26, 37
- Gross-Pitaevskii-Gleichung, 283
- Grundmode, 144
- Gruppe, 20, 119
  - Galilei-, 114, 116
  - Lorentz-, 116
  - pseudounitäre, 191
- Gruppengeschwindigkeit, 35
- GSE, 235
- GUE, 235
- Hadamard-Gatter, 296, 297, 299, 300, 303
- Hamilton
  - -Dynamik, 51, 52
  - -Funktion, 62, 63, 67, 120, 160, 284
  - -Matrix, 40, 217, 218, 232, 239, 257, 270, 274, 279, 284

- -Operator, 160, 174, 216, 222, 227, 231–233, 235–246, 249–256, 269, 276, 291, 292
- Hamilton, William Rowan, 61
- hamiltonsche Bewegungsgleichung, 61, 62
- hamiltonsche Mechanik, 61
- harmonischer Oszillator, 17, 36, 165
- Hauptebene, 133, 136, 137
- Hausdorff, Felix, 75
- Hausdorff-Dimension, 75
- Heisenberg, Werner K., 161
- Helizität, 226, 227
- Hénon-Heiles-System, 65, 79
- Hermite-Funktion, 146
- Hermite-Polynom, 166
- hermitesch, 118, 160–162, 164, 172, 209, 218, 223, 232, 235, 243, 254–258, 260, 272, 284, 296
- Hesse-Matrix, 31, 286
- heterokliner Punkt, 72
- Hilbert, David, 159
- Hilbert-Raum, 159–163, 168, 214, 292, 298
- hillsche Differentialgleichung, 36, 42, 176, 242
- Hochpass, 95
- Hohlraumresonator, 141, 143, 155, 246
- Holonomie, 110, 114
- homöomorph, 109
- homokliner Punkt, 71
- Hong-Ou-Mandel-Effekt, 293
- Hopf, Eberhard F. E., 26
- Hopf-Bifurkation, 26
- Hyperbel, 27, 63, 65, 108, 117
- hyperbolischer Fixpunkt, 27, 54, 65, 70, 72
- Hyperboloid, 108, 122
- Hyperfläche, 122
- Hyperradius, 123
  
- Impedanz, 84, 85, 92
- Impulsoperator, 161
- indefinite Metrik, 122
- Index, 20, 23, 25
- inelastischer Stoß, 44, 49
- Inertialsystem, 114, 117, 120
- inhomogene Differentialgleichung, 36
- instabil, 12, 14–17, 23, 25–28, 54, 65, 66, 68, 71, 72, 172
- instantan, 44
- instantaner Eigenzustand, 270, 271
- integrables System, 248
- Invariante, 20
- invariante Kurve, 20, 53, 66
- Involution, 257
- Isometrie, 118
  
- Jacobi-Determinante, 235, 264
- Jacobi-Matrix, 24, 53
- Jones-Matrix, 147, 150, 151, 157
- Jones-Vektor, 146
  
- K-System, 72
- Kanal, 173, 190, 293
- Karte, 101
- Kastenpotential, 166, 196, 197, 205
- Katzen-Abbildung, 27, 68
  - diskrete, 72, 80
- Kegelschnitt, 63
- Kern, 13
- Kettenmatrix, 89, 92, 96, 99, 198
- Kirchhoff, Gustav Robert, 83
- Kirchhoff-Integral, 139
- kirchhoffsche Regeln, 83
- Klein-Gordon-Gleichung, 222, 225
- Knoten, 21, 25, 83, 91
  - degenerierter, 17
- Knotenregel, 83
- Koch, Helge von, 78
- Koch-Kurve, 78
- Kodimension, 234, 236
- kohärenter Zustand, 255
- kollineare Stöße, 44
- Kolmogorov-Entropie, 72
- Kommutator, 160, 166, 211, 216, 221, 226, 252, 257, 265
  - Spinmatrizen, 211
- komplexe Fortsetzung, 167, 173, 197
- komplexe Rotation, 173
- Kompositionsregel, 39, 41
- Kontinuumszustand, 173
- kontravariant, 101, 115, 118, 222, 225
- Kontroll-Qubit, 298, 305
- kosmologische Konstante, 120, 122
- kovariant, 101, 115, 118, 222

- kovariante Ableitung, 103–105, 110  
 Krümmung, 121  
 Krümmungsradius, 53  
 Kreuzung, 246  
 Kreuzungspunkt, 187  
 Kriechfall, 281  
 Kronecker-Produkt, 220  
 Krümmung  
 – gaußsche, 107, 109  
 – geodätische, 105, 109, 111  
 Krümmungsradius, 107, 140  
 Krümmungsskalar, 120  
 Kugeldreieck, 110  
 Kugelwelle, 137, 140  
 Kurvenkreuzung, 173, 182
- Lagrange  
 – -Funktion, 119  
 – -Gleichung, 102  
 – -Multiplikator, 213  
 – -Parameter, 284  
 Laguerre-Funktion, 146  
 Landau, Lew D., 269  
 Landau-Zener-Übergang, 269, 281  
 langsame Achse, 148  
 längssymmetrisch, 92  
 Laplace-Operator, 225  
 Laserfeld, 248  
 Lastimpedanz, 93  
 laterale Vergrößerung, 132  
 Laufzeitglied, 95  
 LC-Kette, 97  
 LC-Schwingkreis, 85  
 Lebensdauer, 181, 276  
 Leistungsanpassung, 92  
 Leiteroperator, 166  
 Leitwert, 84, 94  
 Leitwertmatrix, 88  
 lichtartig, 117  
 Lichtgeschwindigkeit, 114–116, 121  
 Lie, M. S., 251  
 Lie-Algebra, 251, 253, 255  
 Lie-Klammer, 63  
 Lindblad-Gleichung, 218, 220  
 Lindblad-Operator, 218  
 lineare Abbildung, 75  
 lineare Kette, 34  
 lineare Polarisation, 146, 153  
 linearer Raum, 32, 159  
 linearisierte Abbildung, 12, 24, 27, 30, 53, 56, 65  
 linker Eigenvektor, 18, 28, 165, 184, 276, 278  
 Linsengleichung, 127, 134  
 Linsensystem, 127, 137  
 Logarithmus, Matrix-, 41  
 logistische Gleichung, 24  
 Lokalisierung, 247  
 Lorentz  
 – -Gruppe, 116, 119  
 – -Invarianz, 117, 118  
 – -Matrix, 119  
 – -Transformation, 114–117, 119  
 Lorentz, Hendrik Antoon, 114  
 Lotka-Volterra-Modell, 23, 27  
 LRC-Schwingkreis, 85, 86, 261  
 Lyapunov-Exponent, 72
- Magnetfeld, 238, 246, 274  
 Magnus-Entwicklung, 251  
 Mandelbrot, Benoît, 75  
 Mannigfaltigkeit, 11, 23, 25, 51, 71, 102, 104, 109, 110, 120, 286  
 Maschenregel, 83  
 Master-Gleichung, 217  
 Mathieu-Gleichung, 42, 67, 243  
 Matrix-Exponentiation, 63, 212  
 Matrix-Logarithmus, 41  
 Maxwell-Gleichung, 114, 261  
 Mean-Field-Näherung, 284  
 Membranschwingung, 274  
 Meridionalstrahl, 127  
 Messung, 93, 160, 294, 295, 300  
 metastabiler Zustand, 172, 173  
 Metrik, 102, 103, 105, 108, 109, 224  
 – de-Sitter-, 123  
 – indefinite, 118, 122  
 – Minkowski-, 118, 122  
 – Schwarzschild-, 121, 123  
 metrischer Tensor, 102, 105, 120  
 MgH, 173, 174, 183  
 Minkowski  
 – -Abstand, 117

- -Geometrie, 225
- -Metrik, 118, 122, 224
- -Raum, 107, 115, 118, 122, 222
- Minkowski, Hermann, 115
- mischend, 72
- Möbius-Band, 102
- Moiseyev, N., 172
- Multikommutator, 251
  
- Nächste-Nachbar-Abstände, 233, 236, 248
- NAND-Gatter, 295
- newtonsche Bewegungsgleichungen, 31
- nicht-hermitesch, 253–256, 261, 275, 281, 288
- nichtlineare Differentialgleichungen, 51, 253
- nichtlineare Quantendynamik, 283
- nichtlineare Schrödinger-Gleichung, 283
- nichtlinearer Oszillator, 22
- nichtlineares System, 12, 20, 22, 26
- nilpotent, 43
- Niveaufkreuzung, 270, 277
- Norm, 159, 260, 293, 296
- Norm-Operator, 255
- Normalenvektor, 101–106
- Normalkoordinaten, 32, 33, 57
- NOT-Gatter, 295, 296
  
- Oberflächenintegral, 271
- Objekt-Bild-Beziehung, 132
- Observable, 159, 161, 218
- Operator, 159
- optische
  - Abbildung, 128
  - Achse, 127
  - Diode, 150
- optischer
  - Isolator, 150
  - Resonator, 141
  - Zweig, 36
- OR-Gatter, 295
- orientierbar, 102, 109
- orthogonale Transformation, 234
- orthonormal, 161, 166, 214, 292, 295, 301
- Ortsdarstellung, 162, 169
- Ortsoperator, 161
- Oszillator
  - Duffing-, 22, 25
  - harmonischer, 12, 17, 36–38, 85, 167, 169, 178, 240, 254, 259, 281, 282
  - nichtlinearer, 22
  - Swanson-, 254
  
- Parabel, 17, 63
- Parallelschaltung, 84, 88, 94
- Paralleltransport, 104, 106, 110, 113, 125, 273
- paraxial, 127, 128, 143
- Paritätsoperator, 257
- passiver Resonator, 141
- Pauli, Wolfgang, 210
- Pauli-Gatter, 296
- Pauli-Matrix, 210, 212, 224, 226, 296, 297
- periodische Bahn, 26, 53, 56, 60, 65, 66, 143, 155, 247
- periodisches Potential, 174, 203
- Phasen
  - -bahn, 11, 23, 25
  - -portrait, 12, 13, 20, 25, 26
  - -raum, 11, 19, 25, 247
  - bahn, 37, 62, 63
  - Gatter, 296
  - integral, 183
  - maß, 93, 97
  - raum, 51, 56, 61, 63, 64, 66
  - raumvolumen, 62, 178
  - sprung, 177, 183, 293
- Phasen-
  - portrait, 24
- Pi
  - -Achtel Gatter, 296
  - -Puls, 249
  - -Schaltung, 90, 91, 94
- plancksches Wirkungsquantum, 178
- Planspiegel, 130, 141
- Poincaré, Jules Henri, 64
- Poincaré-Abbildung, 27, 52, 64, 66
- Poincaré-Schnitt, 51, 52, 64, 66, 247
- Poisson-Klammer, 63
- Poisson-Verteilung, 234, 237, 248
- Polarisation, 146, 148, 149, 151, 153, 213, 214, 216
- Polarisationsvektor, 217
- Polarisator, 147
- Polarkoordinaten, 15, 79, 108, 121, 124, 286

- Populationsdynamik, 23, 25  
 positiv definit, 31  
 positiver Operator, 161  
 Positron, 227  
 Potential  
 – -barriere, 167, 178, 189  
 – -fläche, 173, 182, 187  
 – -kette, 198  
 – -mulde, 177, 181  
 – -stufe, 195  
 – periodisches, 174  
 – rotations-symmetrisches, 172  
 – Zentrifugal-, 172  
 Prädissoziation, 173, 183  
 Produktformel, 39, 215  
 Produktzustand, 293, 294, 304  
 Projektor, 161  
 pseudoorthogonal, 119  
 Pseudosphäre, 107  
 pseudounitär, 191, 192  
 PT-Dimer, 261  
 PT-Symmetrie, 254, 256, 262, 281
- Quabla, 225  
 quadratische Form, 63, 147  
 Quanten  
 – -Faktorisierung, 304  
 – -Fouriertransformation, 301–304, 306  
 – -Teleportation, 300  
 – -chaos, 233  
 – -computing, 291, 295, 301, 304  
 – -gatter, 296, 300, 304  
 Quantisierungsbedingung, 178, 181, 183, 206, 250  
 Quantisierungsformel, 182  
 Quasienergie, 243, 249  
 Quasiimpuls, 176  
 Quaternion, 225  
 Qubit, 295, 297, 304, 305  
 Quelle, 288
- Rabi-Frequenz, 241, 245, 249, 250  
 Raleighlänge, 140  
 Rang, 13  
 Rapidität, 119  
 Ratengleichung, 217
- Räuber-Beute-Modell, 23  
 raumartig, 117  
 Raumzeit, 114, 115, 120  
 ray-tracing, 128  
 rechter Eigenvektor, 18, 28, 184, 276, 278  
 Referenzebene, 128, 132, 135, 139, 142  
 Reflexionsmatrix, 130, 141  
 Reflexionswahrscheinlichkeit, 180, 192  
 Reihenschaltung, 88  
 reiner Zustand, 161, 214  
 Rekursion, 59, 166, 201  
 Relativgeschwindigkeit, 45, 49  
 Relativitätstheorie, 119, 120, 222, 226  
 Residuum, 142  
 Resonanz, 42, 238, 246  
 – -bedingung, 182  
 – -breite, 182  
 – -energie, 167, 198  
 – -frequenz, 85, 240  
 – -zustand, 163, 167, 172, 173, 178, 181, 182, 193  
 – Feshbach-, 172, 182, 183  
 – Shape-, 172, 183  
 reversibel, 295, 297, 300  
 Ricci-Curbastro, Gregorio, 120  
 Ricci-Skalar, 120  
 Ricci-Tensor, 120  
 Richtungsfeld, 11, 20  
 riemannsche Fläche, 173, 278  
 riemannsche Mannigfaltigkeit, 109  
 riemannscher Raum, 122  
 Rotating-Wave-Approximation, 240, 244  
 RWA, 240, 244, 250
- Sägezahn-Schwingung, 56  
 Sattelfläche, 107, 112  
 Sattelpunkt, 14, 16, 21, 23, 25, 27, 30, 65, 79, 286, 287  
 Satz von  
 – Stokes, 271  
 – Cayley-Hamilton, 258  
 – Floquet, 176  
 – Gauß-Bonnet, 109  
 Satz von Cayley-Hamilton, 266  
 Scheinwiderstand, 84  
 schief-symmetrisch, 64

- schnelle Achse, 148
- Schrödinger, Erwin, 160
- Schrödinger-Gleichung, 160–163, 167, 170, 173, 177, 189, 202, 204, 242, 257, 261, 289
- Schwarzschild
  - -Metrik, 121, 123
  - -Radius, 121
- Schwarzschild, Karl, 121
- Schwingfall, 18, 19, 281
- Schwingkreis, 83–85, 261
- Schwingungsgleichung, 31, 33, 85, 86, 106, 274, 281
- selbstähnlich, 75, 77
- Selbsterregung, 26
- seltsamer Attraktor, 12
- semiklassische Näherung, 174, 176–179, 191, 207
- Senke, 15, 30, 288
- Separationsansatz, 12, 146
- Separatrix, 287
- Shape-Resonanz, 172, 183
- Sierpinski-Dreieck, 77
- singuläre Matrix, 38, 41, 194
- singulärer Punkt, 12
- Singularität, 107, 123
- Skalarprodukt, 28, 32, 159, 165, 210, 230
- SN-Zerlegung, 280
- Spektrum, 161, 237, 243, 246
- Spiegelmatrix, 130
- Spin, 209, 214, 222, 226, 238, 257, 274, 291, 294
- Spin-Operator, 214, 226
- Spinmatrix, 209, 212, 228, 272, 296
- Spinor, 224
- stabil, 12, 27
- stabiler Knoten, 14, 16, 30
- stabiler Stern, 14
- Stabilitäts
  - -bedingung, 54, 56, 65, 142, 146
  - -bereich, 43, 143, 243
  - -exponent, 70
  - -index, 65
  - -insel, 247
  - -matrix, 60, 79, 142
  - -winkel, 143
- Standard-Abbildung, 68
- Stark-Effekt, 246
- stationärer Punkt, 12, 17, 21, 284
- Stern-Dreieck-Transformation, 91, 94
- Sternschaltung, 90, 91
- Stoßdauer, 49
- Strahlbreite, 140
- Strahlparameter, 139, 144, 157
- Strahlradius, 140, 145, 156
- Streumatrix, 189, 192, 205
- stroboskopische Abbildung, 26, 67, 247
- Strogatz, S. H., 24
- Stromdichte, 190, 204
- strukturstabil, 72
- su(1,1), 252, 266
- su(2), 212, 252, 266
- Summenkonvention, 102, 115, 222
- Superpositionsprinzip, 160, 283
- Swanson-Oszillator, 254
- SWAP-Gatter, 298
- Sylvester-Matrix, 285
- Symmetrie, 32, 86, 146, 169, 193, 205, 234, 246
- symplektisch, 27, 60, 62, 63, 65, 131, 143, 155, 192, 236
- Systemmatrix, 128, 131, 136, 137, 141
- T-Schaltung, 90, 94, 97
- Tangentialebene, 101, 104
- Tangentialraum, 102, 104, 124
- Teilchenzahloperator, 166, 291
- Teleportation, 300
- Teleskop, 132, 136, 138
- TEM-Mode, 146
- Tensor, 103, 120
  - metrischer, 102, 105, 120
  - Ricci-, 120
  - total antisymmetrischer, 211
- Tesla, N., 101
- Tessar-Objektiv, 136
- Thomas-Präzession, 119
- Tiefpass, 94
- Torus, 66, 69, 71, 102, 109, 111
- Trajektorie, 11, 16, 287
- Transfermatrix, 179, 180, 189, 199, 200, 207
  - verallgemeinerte, 191
- Translation, 193
- Translationsmatrix, 130, 136

- Transmissions  
 – -matrix, 190  
 – -resonanz, 197, 199, 201  
 – -wahrscheinlichkeit, 153, 180, 192, 199, 201  
 Transparenz, 193, 197, 199, 201  
 transversale Mode, 145, 146  
 Tschebyscheff  
 – -Identität, 158  
 – -Polynom, 48, 49, 59, 201  
 Tschebyscheff, Pafnuti Lwowitsch, 48  
 Tunnel  
 – -effekt, 168, 170, 261  
 – -frequenz, 171, 260  
 – -integral, 180, 181  
 Tunneleffekt, 172  
  
 Überlappungsintegral, 168, 186  
 Überlappungsmatrix, 163, 168  
 Übertragungsmaß, 93, 94  
 Übertragungsmatrix, 129, 130, 137  
 übertragungssymmetrisch, 87  
 Umkehrpunkt, 177, 207  
 unitär, 40, 158, 160, 192, 236, 255, 293, 296,  
 299  
 universell, 295, 304  
 Unschärferelation, 160  
 Untermannigfaltigkeit, 51, 122  
  
 Variation, 102, 213, 250, 270, 274  
 Vektorfeld, 11, 62, 104, 110  
 Vektorisierung, 220  
 Vektoroperator, 211  
 Vergrößerung, 134, 138  
 – axiale, 132  
 – laterale, 132  
 – Winkel-, 132  
 Verknüpfungsmatrix, 179, 190  
 Verlustfaktor, 151  
 vermiedene Kreuzung, 231, 268, 277, 282  
 Vernichtungsoperator, 166, 254, 291  
 Verschiebungsrelation, 193, 199, 200  
 Verschränkung, 294, 300  
 Verstimmung, 240  
 Verzögerungsplatte, 148, 151, 157  
 Vielteilchen-Quantensystem, 283, 284  
 Vierervektor, 115, 119, 120, 222, 224  
 Vierpol, 83, 87, 92, 198  
  
 Vierpolkette, 96  
  
 Welle, 36, 96, 139, 146, 167, 172, 180, 189  
 Wellen  
 – -Operator, 225  
 – -leiter, 261  
 – -optik, 138  
 – -paket, 35, 168  
 – -widerstand, 93, 99  
 – -zahl, 35, 97, 139, 145, 167, 189, 194  
 Weltlinie, 120  
 Wertebereich, 259  
 Weyl, Hermann, 178  
 weylsche Regel, 178, 247  
 Widerstand, 84, 85, 90  
 Widerstandsmatrix, 87, 92  
 widerstandssymmetrisch, 87, 92  
 Wigner-Dyson-Verteilung, 237  
 Windungszahl, 20  
 Winkelvergrößerung, 132  
 Wirkdämpfungsglied, 94  
 Wirkung, 119, 160, 177, 179, 181, 207  
 Wirkwiderstand, 84  
 WKB-Näherung, 177, 182  
 Wronski-Determinante, 175, 191, 195, 204  
  
 XOR-Gatter, 295  
  
 Zeit  
 – -ordnungsoperator, 238  
 – -spiegelung, 257  
 – -symmetrie, 242  
 – -umkehr, 242, 257, 262  
 zeitartig, 117  
 Zeitentwicklungsmatrix, 13, 18, 20, 38, 39, 42,  
 239  
 Zeitentwicklungsoperator, 160, 238, 250, 293  
 zeitperiodisches System, 31, 68, 176, 239, 246  
 Zener, Clarence M., 269  
 Zentrum, 15, 16, 23  
 Zerfallsrate, 172, 276  
 zirkulare Polarisation, 146, 153  
 Zufallsmatrix, 233, 237, 246  
 Zweiniveausystem, 171, 231  
 Zweitor, 87  
 Zylinderfunktion, 282