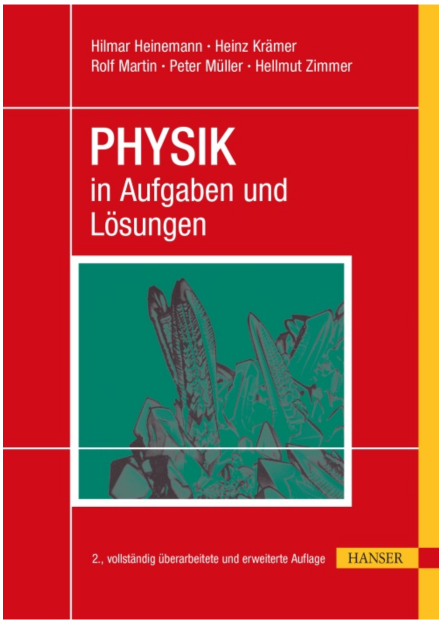
HANSER



Leseprobe

zu

„PHYSIK in Aufgaben und Lösungen“

von Hilmar Heinemann, Heinz Krämer, Rolf Martin,
Peter Müller & Hellmut Zimmer

ISBN (Buch): 978-3-446-46287-8
ISBN (E-Book): 978-3-446-46734-7

Weitere Informationen und Bestellungen unter
https://www.hanser-fachbuch.de/9783446462878
sowie im Buchhandel

Vorwort zur 2. Auflage

Aus langjähriger Lehrerfahrung an einer Hochschule sowie von meinem eigenen Studium her weiß ich, wie sehr sich Studierende ausführliche Musterlösungen zu Problemaufgaben wünschen. Und tatsächlich ist es eine gute Möglichkeit, sich anhand vorgerechneter Aufgaben in die Methodik eines Fachgebiets einzuarbeiten. Aus diesem Grund habe ich gerne zugesagt, als mir vom Verlag angeboten wurde, das beliebte Übungsbuch der Professoren Heinemann, Krämer, Müller und Zimmer neu herauszugeben.

Für die vorliegende Neuauflage wurden alle Aufgaben und deren Lösungen überarbeitet und teilweise durch neue ersetzt; dabei wurde aber die bewährte Struktur beibehalten. Die Teilgebiete entsprechen dem üblichen Fächerkanon, der sich an der Experimentalphysik orientiert. Probleme, wie sie in der theoretischen Physik oder Spezialvorlesungen wie Technische Mechanik, Technische Schwingungslehre etc. behandelt werden, sind nicht Gegenstand dieses Buches.

Um die Einarbeitung in die verschiedenen Teilgebiete der Physik zu erleichtern, wurde jeder Abschnitt mit einem kurzen Vorspann versehen, in dem die relevanten Beziehungen prägnant dargestellt sind. In der Elektrizitätslehre wurde die Wechselstromrechnung mithilfe komplexer Zeiger eingeführt. In der Optik wurden die in der Technischen Optik üblichen Vorzeichenregeln der DIN 1335 konsequent angewandt.

Bei fast allen Aufgaben ließ es sich realisieren, dass die Lösungen bis zur letzten Teilfrage mit allgemeinen Beziehungen durchgerechnet werden, sodass im Endergebnis nur die angegebenen Eingangsdaten zu finden sind. Beim praktischen Rechnen dagegen werden häufig Zahlenwerte der Teile a), b) … verwendet, um weitere Teile zu lösen. Dadurch verliert man aber leicht den Zusammenhang, wie das Endergebnis von den Eingangsgrößen abhängt.

Ich bedanke mich für die gute Betreuung durch Frau Natalia Silakova vom Carl Hanser Verlag. Bei meiner Frau bedanke ich mich für ihre Geduld und den Freiraum, den sie mir während der Arbeit an diesem Werk eingeräumt hat.

Meinen Leserinnen und Lesern wünsche ich Erkenntnisgewinn beim Bearbeiten von Übungsaufgaben und die Befriedigung, die man erhält, wenn man ein schwieriges Problem gelöst hat.

Köngen, im Oktober 2020 Rolf Martin

Inhalt

M Mechanik

M 1 Eindimensionale Kinematik des Punktes

Die Kinematik beschreibt die Bewegung von Körpern, ohne nach der Bewegungsursache (Kräfte, Drehmomente) zu fragen. Häufig spielt die Ausdehnung der Körper keine Rolle, so dass sie vereinfacht als punktförmig behandelt werden können. Bei einem ausgedehnten Körper kann man auch einen speziellen Punkt, z. B. den Schwerpunkt, stellvertretend für den Körper betrachten.

Unter *eindimensional* wird eine Bewegung verstanden, wenn eine einzige Variable ausreicht, um den Ort des Punktes in Abhängigkeit von der Zeit zu beschreiben. Dies ist beispielsweise der Fall bei geradliniger Bewegung, aber auch bei geführter Bewegung auf einer krummlinigen Bahn, wie bei Schienenfahrzeugen oder Autos, die der Straße folgen. Hier wird der Weg $s(t)$ längs der Bahn gemessen. Bei bekannter Abhängigkeit des Weges von der Zeit, folgen die Geschwindigkeit $v(t)$ und die Beschleunigung $a(t)$ durch Ableiten (Tabelle M 1.1). Umgekehrt ergeben sich die Geschwindigkeit und der Ort durch Integration aus der Beschleunigung. Bei der vektoriellen Beschreibung in Abschnitt M 2 sind die Bahngrößen die Tangentialkomponenten der Vektoren $\vec{r}$, $\vec{v}$ und $\vec{a}$.

Tabelle M 1.1 Beziehungen zwischen kinematischen Größen

Bahngrößen		Winkelgrößen	
Weg	s	Winkel	$\varphi = \frac{s}{r}$
Geschwindigkeit	$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$	Winkelgeschwindigkeit	$\omega = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \frac{v}{r}$
Beschleunigung	$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}$	Winkelbeschleunigung	$\alpha = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} = \frac{a}{r}$

Völlig gleichartige Zusammenhänge beschreiben die Bewegung eines Punktes auf einer Kreisbahn mit Radius r. Hier benutzt man sinnvollerweise Winkelgrößen. Sie sind ebenfalls in Tabelle M 1.1 zusammengestellt.

Für den einfachen Fall konstanter Beschleunigung a_0 bzw. Winkelbeschleunigung α_0 sind die Ergebnisse der Integration in Tabelle M 1.2 angegeben.

Tabelle M 1.2 Geschwindigkeit und Weg bei konstanter Beschleunigung

Bahngrößen	Winkelgrößen
$v(t) = v_0 + \int_{t_0}^{t} a(\tau)\,\mathrm{d}\tau = v_0 + a_0(t - t_0)$	$\omega(t) = \omega_0 + \int_{t_0}^{t} \alpha(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \omega_0 + \alpha_0(t - t_0)$
$s(t) = s_0 + \int_{t_0}^{t} v(\tau)\,\mathrm{d}\tau = s_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a_0(t - t_0)^2$	$\varphi(t) = \varphi_0 + \int_{t_0}^{t} \omega(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \varphi_0 + \omega_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\alpha_0(t - t_0)^2$

M 1.1 Massenpunkt auf einer Geraden

Ein punktförmiger Körper bewegt sich mit konstanter Beschleunigung längs der x-Achse. Er befindet sich zur Zeit $t = 0$ am Ort x_0 und hat dort die Geschwindigkeit v_0.

a) Wo befindet sich der Körper zur Zeit t_1?

b) Welche Geschwindigkeit v_1 hat er dort?

c) Zu welcher Zeit und an welchem Ort erfolgt die Umkehr der Bewegungsrichtung?

d) Skizzieren Sie das $x(t)$- und das $v(t)$-Digramm.

$x_0 = 6{,}0$ m $\quad v_0 = -5{,}0$ m/s $\quad a_0 = 2{,}0$ m/s^2 $\quad t_1 = 3{,}0$ s

---

a) $\underline{x_1 = x(t_1) = x_0 + v_0 t_1 + \frac{1}{2}a_0 t_1^2} = \underline{\underline{0}}$

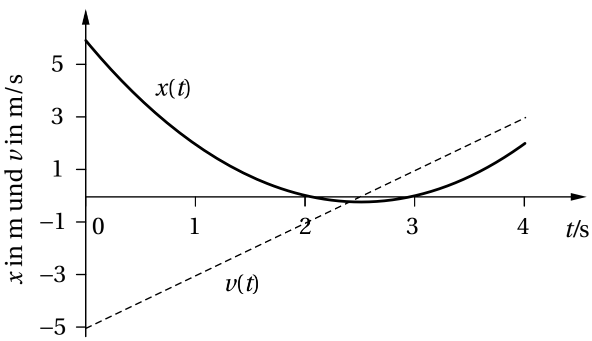
b) $\underline{v_1 = v_0 + a_0 t_1} = \underline{\underline{1{,}0 \text{ m/s}}}$

c) Die Geschwindigkeit muss am Umkehrpunkt null sein: $v_0 + a_0 t_2 = 0$ liefert

$$t_2 = -\frac{v_0}{a_0} = 2{,}5 \text{ s}$$

$$\underline{x_2 = x(t_2) = x_0 + v_0 t_2 + \frac{1}{2}a_0 t_2^2} = \underline{\underline{-0{,}25 \text{ m}}}$$

d)



M 1.2 Schwingung

Ein schwingender Körper hat die Geschwindigkeit $v_x(t) = v_\mathrm{m}\cos(2\pi t/T)$. Er befindet sich zur Zeit $t_0 = T/4$ am Ort x_0.

Geben Sie den Ort x und die Beschleunigung a_x des Körpers als Funktion der Zeit t an!

$$v_x(t) = v_\mathrm{m}\cos\left(2\pi\frac{t}{T}\right)$$

$$x(t) = \int v_x\,\mathrm{d}t$$

$$x(t) = \frac{v_\mathrm{m}T}{2\pi}\sin\left(2\pi\frac{t}{T}\right) + C$$

$$x\left(\frac{T}{4}\right) = x_0 = \frac{v_\mathrm{m}T}{2\pi}\sin\frac{\pi}{2} + C$$

$$C = x_0 - \frac{v_\mathrm{m}T}{2\pi}$$

$$\underline{x(t) = \frac{v_\mathrm{m}T}{2\pi}\left(\sin\left(2\pi\frac{t}{T}\right) - 1\right) + x_0}$$

$$a_x(t) = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}$$

$$\underline{a_x(t) = -2\pi\frac{v_\mathrm{m}}{T}\sin\left(2\pi\frac{t}{T}\right)}$$

M 1.3 Kraftfahrzeug

Ein Kraftfahrzeug nähert sich einer Verkehrsampel mit verminderter Geschwindigkeit. Beim Umschalten der Ampel auf Grün beschleunigt es während der Zeit t_1 gleichmäßig mit a und legt dabei die Strecke s_1 zurück.

Wie groß sind die Geschwindigkeiten v_0 und v_1 am Anfang und am Ende der Beschleunigungsphase?

$a = 0{,}94\ \mathrm{m/s^2} \qquad t_1 = 5{,}3\ \mathrm{s} \qquad s_1 = 60\ \mathrm{m}$

$$s_1 = \frac{a}{2}t_1^2 + v_0 t_1 \qquad (s_0 = 0)$$

$$\Rightarrow \quad \underline{v_0 = \frac{s_1}{t_1} - \frac{at_1}{2}} = \underline{\underline{32\ \mathrm{km/h}}}$$

$$v_1 = at_1 + v_0$$

$$\Rightarrow \quad \underline{v_1 = \frac{s_1}{t_1} + \frac{at_1}{2}} = \underline{\underline{50\ \mathrm{km/h}}}$$

M 1.4 Notbremsen

Beim Notbremsen wird ein mit einer Geschwindigkeit v_{x0} fahrender Zug auf einer Strecke von $x_0 = 0$ bis x_1 zum Stehen gebracht.

a) Wie groß ist die konstante Bremsbeschleunigung a_x und wie lange dauert der Bremsvorgang?

b) Stellen Sie den Verlauf der Bewegung im $x(t)$-, $v_x(t)$- und $a_x(t)$-Diagramm dar!

$x_1 = 260\ \text{m} \qquad v_{x0} = 90\ \text{km/h}$

---

a) $x = \frac{a_x}{2} t^2 + v_{x0} t \qquad (x_0 = 0)$

$$v_x = a_x t + v_{x0}$$

$$x_1 = \frac{a_x}{2} t_1^2 + v_{x0} t_1$$

$$v_{x1} = 0 = a_x t_1 + v_{x0}$$

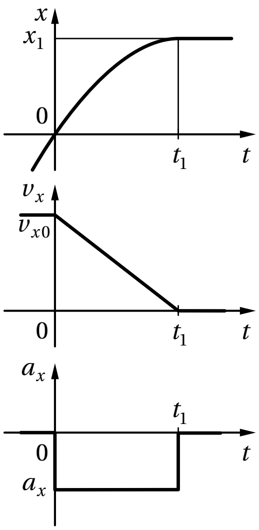
$$\Rightarrow \quad t_1 = -\frac{v_{x0}}{a_x}$$

$$x_1 = \frac{v_{x0}^2}{2a_x} - \frac{v_{x0}^2}{a_x} = -\frac{v_{x0}^2}{2a_x}$$

$$\underline{a_x = -\frac{v_{x0}^2}{2x_1}} = \underline{\underline{-1{,}20\ \text{m/s}^2}}$$

$$\underline{t_1 = -\frac{v_{x0}}{a_x} = \frac{2x_1}{v_{x0}}} = \underline{\underline{21\ \text{s}}}$$

b)



M 1.5 Senkrechter Wurf

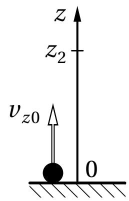
Ein Körper wird von der Erdoberfläche aus ($z_0 = 0$) mit der Anfangsgeschwindigkeit v_{z0} senkrecht nach oben abgeschossen.

a) Welche Geschwindigkeit v_{z1} hat er in der Höhe z_1?

b) Welche Maximalhöhe z_2 erreicht er und wie groß ist die Steigzeit?

c) Skizzieren Sie den Verlauf des Wurfes im $z(t)$- und $v_z(t)$-Diagramm!

$v_{z0} = 20\ \text{m/s} \qquad z_1 = 5{,}0\ \text{m} \qquad g = 9{,}81\ \text{m/s}^2$



a) $z = -\frac{g}{2}t^2 + v_{z0}t \qquad (z_0 = 0)$

$$v_z = -gt + v_{z0} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{v_{z0} - v_z}{g}$$

$$z = -\frac{(v_{z0} - v_z)^2}{2g} + v_{z0}\frac{(v_{z0} - v_z)}{g} = \frac{v_{z0}^2 - v_z^2}{2g}$$

$$v_z^2 = v_{z0}^2 - 2gz$$

$$\underline{v_{z1} = +\sqrt{v_{z0}^2 - 2gz_1}} = \underline{\underline{+17{,}4\ \text{m/s}}}$$

$$\underline{v_{z1}^* = -\sqrt{v_{z0}^2 - 2gz_1}} = \underline{\underline{-17{,}4\ \text{m/s}}}$$

b) Aus a):

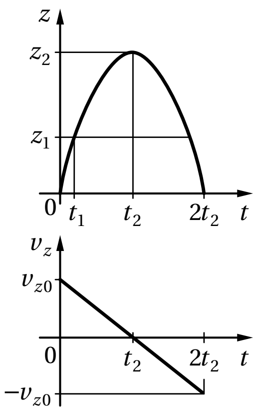
$$z = \frac{v_{z0}^2 - v_z^2}{2g}$$

mit $z = z_2$ und $v_z = v_{z2} = 0$

$$\underline{z_2 = \frac{v_{z0}^2}{2g}} = \underline{\underline{20{,}4\ \text{m}}}$$

Steigzeit: $\underline{t_2 = \frac{v_{zo}}{g}} = \underline{\underline{2\ \text{s}}}$

c)



M 1.6 Testfahrzeuge

Zwei Testfahrzeuge beginnen gleichzeitig eine geradlinige Bewegung mit der Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 0$ am gleichen Ort.

Das Fahrzeug A bewegt sich mit der Beschleunigung $a_A = a_0 = \text{const}$, das Fahrzeug B mit der Beschleunigung $a_B = kt; \quad k = \text{const}$.

Beide Fahrzeuge legen in der Zeit t_1 die Strecke s_1 zurück.

a) Skizzieren Sie den Verlauf beider Bewegungen im $a(t)$-, $v(t)$- und $s(t)$-Diagramm!

b) Berechnen Sie die Zeit t_1 und die Strecke s_1!

c) Welche Geschwindigkeiten v_{A1} und v_{B1} haben die Fahrzeuge am Ende der Strecke s_1 erreicht?

d) Nach welcher Zeit t_2 haben beide Fahrzeuge die gleiche Geschwindigkeit v_2 erreicht?

Gegeben: a_0, k

---

a) $a_A = a_0 = \text{const}$

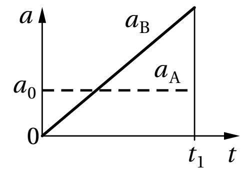
$v_A = a_0 t \qquad (v_{A0} = 0)$

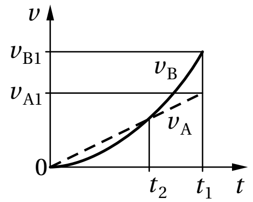
$s_A = \frac{a_0}{2} t^2 \qquad (s_{A0} = 0)$

$a_B = kt$

$v_B = \frac{k}{2} t^2 \qquad (v_{B0} = 0)$

$s_B = \frac{k}{6} t^3 \qquad (s_{B0} = 0)$

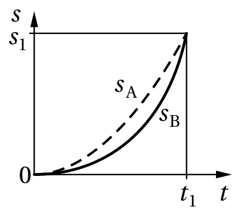




b) $s_1 = s_{A1} = s_{B1}$

$s_1 = \frac{a_0}{2} t_1^2 = \frac{k}{6} t_1^3$

$\underline{t_1 = 3\frac{a_0}{k}}; \quad \underline{s_1 = \frac{9}{2}\frac{a_0^3}{k^2}}$



c) $v_{A1} = a_0 t_1 = \underline{3\frac{a_0^2}{k}}$

$v_{B1} = \frac{k}{2} t_1^2 = \underline{\frac{9}{2}\frac{a_0^2}{k}}$

d) $v_{A2} = v_{B2}$

$a_0 t_2 = \frac{k}{2} t_2^2 \quad \Rightarrow \quad \underline{t_2 = 2\frac{a_0}{k}}$

M 1.7 Güterzug

Ein Güterzug passiert auf einem Nebengleis mit der konstanten Geschwindigkeit v_0' einen Bahnhof. Zur gleichen Zeit $t_0 = 0$ fährt ein Personenzug in derselben Richtung ab. Die Beschleunigung des Personenzuges nimmt von a_0 (zur Zeit $t = 0$) linear mit der Zeit bis auf null (zur Zeit t_1) ab. Dann fährt er mit konstanter Geschwindigkeit v_1 weiter und überholt den Güterzug.

a) Zu welcher Zeit t_2 fährt der Personenzug am Güterzug vorbei?

b) In welcher Entfernung s_2 vom Bahnhof geschieht das?

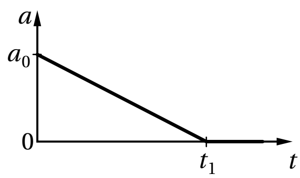
c) Wie groß ist die Relativgeschwindigkeit $\Delta v = v_2 - v_0'$ beim Überholen?

d) Skizzieren Sie das $s(t)$-, das $v(t)$- und das $a(t)$-Diagramm beider Bewegungen!

$v_0' = 54\ \text{km/h} \qquad t_1 = 160\ \text{s} \qquad a_0 = 0{,}25\ \text{m/s}^2$

---

a) *Güterzug:* $s'(t) = v'_0 t$



Personenzug:

Allgemeiner Ansatz für $a(t)$:

$a = bt + a_0$

Bestimmung der Konstanten b ($t = t_1$):

$0 = bt_1 + a_0$

$\Rightarrow \quad b = -\dfrac{a_0}{t_1}$

$$a = a_0\left(1 - \frac{t}{t_1}\right) \qquad (t \leqq t_1)$$

Der Überholvorgang liegt im Bereich $t \geqq t_1$. Ermittlung $s(t)$:

$t \geqq t_1$: $\quad a = 0$

$$v(t) = v_1$$

$$s - s_1 = \int_{t_1}^{t} v_1 \, \mathrm{d}t$$

$$s(t) = v_1(t - t_1) + s_1 \qquad (*)$$

Bestimmung der Anfangsbedingungen s_1 und v_1:

$t \leqq t_1$: $\quad v - v_0 = \displaystyle\int_0^t a_0\left(1 - \frac{t}{t_1}\right) \mathrm{d}t \qquad v_0 = 0$

$$v(t) = a_0\left(t - \frac{t^2}{2t_1}\right)$$

$$\Rightarrow \quad v_1 = a_0\frac{t_1}{2}$$

$$s - s_0 = \int_0^t a_0\left(t - \frac{t^2}{2t_1}\right) \mathrm{d}t \qquad s_0 = 0$$

$$s(t) = a_0\left(\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6t_1}\right)$$

$$\Rightarrow \quad s_1 = a_0\frac{t_1^2}{3}$$

Damit wird (*):

$$s(t) = \frac{a_0 t_1}{2}(t - t_1) + a_0\frac{t_1^2}{3} = \frac{a_0 t_1}{2}\left(t - \frac{t_1}{3}\right)$$

Bedingung für das Einholen:

$$s(t_2) = s'(t_2)$$

$$\frac{a_0 t_1}{2}\left(t_2 - \frac{t_1}{3}\right) = v'_0 t_2$$

$$t_2\left(\frac{a_0 t_1}{2} - v'_0\right) = \frac{a_0 t_1^2}{6}$$

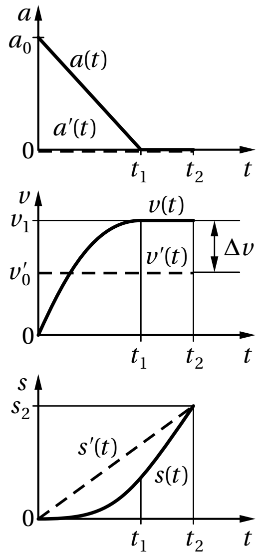
$$\underline{t_2 = \frac{t_1}{3\left(1 - \dfrac{2v'_0}{a_0 t_1}\right)}} = \underline{\underline{213\ \mathrm{s}}}$$

b) $s_2 = s_2' = \underline{v_0' t_2} = \underline{\underline{3{,}2\ \text{km}}}$

c) $\Delta v = v_2 - v_2' = v_1 - v_0'$

$\underline{\Delta v = \frac{a_0 t_1}{2}} - v_0' = \underline{\underline{18\ \text{km/h}}}$

d)



M 1.8 Schienenfahrzeug

Ein Schienenfahrzeug fährt mit konstanter Geschwindigkeit v_0. Nach Abschalten des Triebwerkes zur Zeit $t_0 = 0$ wird das Fahrzeug im Wesentlichen durch den Luftwiderstand gebremst; die Beschleunigung ist geschwindigkeitsabhängig: $a = -Kv^2$.

a) Nach welcher Zeit t_1 ist die Geschwindigkeit auf v_1 abgesunken?

b) Welche Strecke s_1 wurde in der Zeit t_1 zurückgelegt?

$v_0 = 120\ \text{km/h}$ $\quad K = 3{,}75 \cdot 10^{-4}\ \text{m}^{-1}$ $\quad v_1 = 60\ \text{km/h}$

---

a) $a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -Kv^2$

$$\frac{\mathrm{d}v}{v^2} = -K\,\mathrm{d}t$$

$$\int_{v_0}^{v} \frac{\mathrm{d}v}{v^2} = -K \int_0^t \mathrm{d}t$$

$$\left[-\frac{1}{v}\right]_{v_0}^{v} = -Kt$$

$$\frac{1}{v_0} - \frac{1}{v} = -Kt \qquad (*)$$

$$\frac{1}{v_0} - \frac{1}{v_1} = -Kt_1$$

$$\underline{t_1 = \frac{1}{K}\left(\frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_0}\right)} = \underline{\underline{80\ \text{s}}}$$

b) Die Gleichung (∗) liefert:

$$v(t) = \frac{v_0}{1 + v_0 K t}$$

Zurückgelegter Weg durch Integration:

$$s(t) = v_0 \int_0^t \frac{\mathrm{d}\tau}{1 + v_0 K \tau}$$

Substitution: $1 + v_0 K \tau = z$, $\mathrm{d}\tau = \dfrac{\mathrm{d}z}{v_0 K}$

$$s(t) = \frac{1}{K} \int_1^{1+v_0 K t} \frac{\mathrm{d}z}{z} = \frac{1}{K} \ln(1 + v_0 K t)$$

$$s_1 = s(t_1) = \frac{1}{K} \ln(1 + v_0 K t_1) = \underline{\frac{1}{K} \ln \frac{v_0}{v_1}} = \frac{1}{K} \ln 2 = \underline{\underline{1{,}85\ \mathrm{km}}}$$

M 1.9 Rennwagen

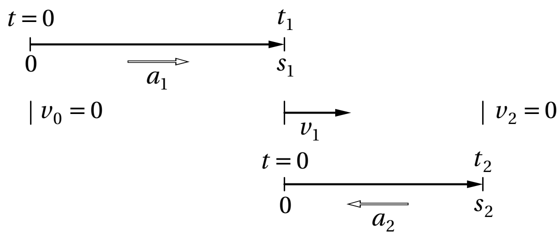
Ein Rennwagen durchfährt zwischen zwei Haarnadelkurven eine Strecke s_0, wobei Anfangs- und Endgeschwindigkeit annähernd gleich null seien. Die als konstant angesehene Beschleunigung ist a_1, die ebenfalls als konstant vorausgesetzte Verzögerung ist a_2.

a) Welche minimale Zeit t_0 benötigt der Wagen für die Strecke s_0?

b) Welche Höchstgeschwindigkeit v_1 erreicht er auf dieser Strecke?

$s_0 = 120$ m $\quad a_1 = 2{,}5$ m/s^2 $\quad a_2 = -5{,}0$ m/s^2

Zur Vereinfachung wird in der Bremsphase die Zeit- und Wegmessung neu bei null begonnen:



Anfahren:

$$s_1 = \frac{a_1}{2} t_1^2 \qquad (1)$$

$$v_1 = a_1 t_1 \qquad (2)$$

Bremsen:

$$s_2 = \frac{a_2}{2} t_2^2 + v_1 t_2 \qquad (3)$$

$$v_2 = 0 = a_2 t_2 + v_1 \qquad (4)$$

Gesamtbewegung:

$$s_0 = s_1 + s_2 \qquad (5)$$

$$t_0 = t_1 + t_2 \qquad (6)$$

(4) mit (2): $a_1 t_1 = -a_2 t_2$

$$\Rightarrow \quad t_2 = -\frac{a_1}{a_2} t_1 \qquad (7)$$

(5) mit (3) und (2):

$$s_0 - s_1 = \frac{a_2}{2} t_2^2 + a_1 t_1 t_2 \qquad (8)$$

(8) mit (7) und (1):

$$s_0 = \frac{a_1}{2} t_1^2 - \frac{a_1^2}{2a_2} t_1^2 = \frac{a_1}{2} t_1^2 \left(1 - \frac{a_1}{a_2}\right)$$

$$t_1 = \sqrt{\frac{2 s_0 a_2}{a_1 (a_2 - a_1)}} \qquad (9)$$

a) (6) mit (7) und (9):

$$t_0 = t_1 - \frac{a_1}{a_2} t_1 = t_1 \frac{a_2 - a_1}{a_2}$$

$$\underline{t_0 = \sqrt{\frac{2 s_0 (a_2 - a_1)}{a_1 a_2}}} = \underline{\underline{12\ \text{s}}}$$

b) (2) mit (9):

$$\underline{v_1 = \sqrt{\frac{2 s_0 a_1 a_2}{a_2 - a_1}}} = \underline{\underline{72\ \text{km/h}}}$$

M 1.10 Rotor

Ein Rotor läuft aus dem Stand hoch, wobei die Winkelbeschleunigung folgender Funktion gehorcht:

$$\alpha(t) = \alpha_0 \left[1 - \sin\left(\frac{\pi}{2t_1} t\right)\right]$$

Nach der Zeit t_1 ist die Enddrehzahl n_1 erreicht und der Rotor läuft mit konstanter Drehzahl weiter.

Wie viele Umdrehungen hat der Rotor während des Anlaufvorgangs ausgeführt?

$t_1 = 5\ \text{s} \qquad n_1 = 1\,800\ \text{min}^{-1}$

Erste Integration zur Bestimmung der Winkelgeschwindigkeit:

$$\omega(t) = \int_0^t \alpha(\tau)\ \mathrm{d}\tau = \alpha_0 \left[t + \frac{2t_1}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{2t_1} t\right) - \frac{2t_1}{\pi}\right]$$

$$\omega_1 = 2\pi n_1 = \omega(t_1) = \alpha_0 t_1 \left(1 - \frac{2}{\pi}\right)$$

liefert

$$\alpha_0 = \frac{2\pi n_1}{t_1 \left(1 - \frac{2}{\pi}\right)} = 103{,}7\ \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

Die zweite Integration ergibt den Drehwinkel

$$\varphi_1 = \varphi(t_1) = \int_0^{t_1} \omega(t)\ \mathrm{d}t = \alpha_0 t_1^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2} - \frac{2}{\pi}\right)$$

Mit dem obigen Ergebnis von α_0 ergibt sich

$$\varphi_1 = \frac{2\pi n_1 t_1}{\pi - 2}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} - 2\right) = 697 \text{ rad}$$

Damit wird die Zahl der Umdrehungen

$$\underline{N = \frac{\varphi_1}{2\pi} = \frac{n_1 t_1}{\pi - 2}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} - 2\right)} = \underline{\underline{111}}$$

M 1.11 Drehmaschine

Eine Drehmaschine rotiert mit der Drehzahl n_0. Sie wird mit konstanter Winkelbeschleunigung (-verzögerung) α_0 abgebremst und kommt nach N Umdrehungen zum Stillstand.

Wie groß ist die Winkelbeschleunigung und wie lange dauert der Bremsvorgang?

$N = 10 \qquad n_0 = 480 \text{ min}^{-1}$

Aus den allgemeinen Formen für die Winkelgeschwindigkeit und den Drehwinkel

$$\omega(t) = \omega_0 + \alpha_0 t \quad \text{und} \quad \varphi(t) = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha_0 t^2$$

wird am Ende des Bremsvorgangs zur Zeit t_1:

$$\omega(t_1) = 0 = \omega_0 + \alpha_0 t_1 \tag{1}$$

$$\varphi(t_1) = N \cdot 2\pi = \omega_0 t_1 + \frac{1}{2}\alpha_0 t_1^2 \tag{2}$$

Setzt man $t_1 = -\frac{\omega_0}{\alpha_0}$ aus (1) in (2) ein, erhält man die zeitunabhängige Beziehung

$$N \cdot 2\pi = -\frac{\omega_0^2}{2\alpha_0}$$

und damit

$$\underline{\alpha_0 = -\frac{\pi n_0^2}{N}} = \underline{\underline{20{,}1 \, \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}}}$$

Zeitdauer:

$$\underline{t_1 = -\frac{\omega_0}{\alpha_0}} = \underline{\underline{\frac{2N}{n_0} = 2{,}5 \text{ s}}}$$

M 2 Zwei- und dreidimensionale Bewegung

M 2.1 Auto auf Parabelflug

Am 26.1.2009 fuhr in Limbach-Oberfrona, Sachsen, ein Auto über einen gefrorenen Erdwall der Höhe y_0 und flog im Abstand x_1 in der Höhe y_1 in das Dach einer Kirche.

Bestimmen Sie den Abflugwinkel β_0 und die Abfluggeschwindigkeit v_0 des Autos unter Vernachlässigung der Luftreibung und unter der Voraussetzung, dass