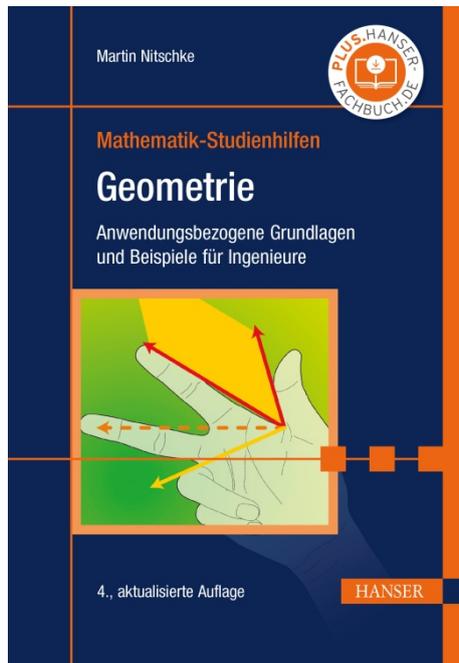


HANSER



Leseprobe

zu

„Geometrie“

von Martin Nitschke

Print-ISBN: 978-3-446-46748-4
E-Book-ISBN: 978-3-446-46778-1

Weitere Informationen und Bestellungen unter
<http://www.hanser-fachbuch.de/978-3-446-46748-4>

sowie im Buchhandel

© Carl Hanser Verlag, München

Vorwort

In so gut wie allen technischen Studiengängen hat die Geometrie ihren Platz; sei es als eigenes Fach, als Teil des Mathematikurses oder versteckt in anderen Lehrveranstaltungen. Daran ändert auch die zunehmende Leistungsfähigkeit und Verfügbarkeit ausgefeilter CAD-Systeme nichts; CAD ist kein Ersatz, sondern häufig ein Werkzeug und manchmal eine Weiterentwicklung der klassischen Geometrie. Ähnlich wie in den Grundschulen weiterhin das Schreiben mit der Hand unterrichtet wird (obwohl es Textverarbeitungsprogramme gibt), ist die Geometrie Bestandteil jeder Ingenieurausbildung. Der souveräne Umgang mit CAD setzt ein umfangreiches geometrisches Grundwissen voraus. Da dieses nur bei wenigen Studienanfängern vorhanden ist, beginnt die vorliegende Studienhilfe mit einer Auffrischung (bzw. Einführung) einiger Zusammenhänge aus der Schulgeometrie. Danach werden als wesentliches Hilfsmittel zur analytischen Beschreibung Vektoren und Matrizen eingeführt. Damit und mit etwas Analysis lassen sich Kurven, Flächen und Körper darstellen sowie Bogenlängen, Flächeninhalte, Volumina, Abstände und Schnitte berechnen. Abschließend werden einige Grundaufgaben und Projektionen der darstellenden Geometrie behandelt.

Das Buch kann in der vorgegebenen Reihenfolge durchgearbeitet werden. In vielen Fällen wird zum Verständnis ein Zurückblättern erforderlich sein; auf die entsprechende Stelle wird dann durch eine Formel-, Satz-, Bild- oder Aufgabennummer verwiesen. Literatur- und Internethinweise auf tiefer gehende und/oder weiterführende Betrachtungen sind in eckige Klammern [] gesetzt und im Literatur- und Internetverzeichnis spezifiziert. Alle zitierten Webseiten wurden mit dem Dienst WebCite® archiviert, so dass diese zeitlich unbegrenzt auch bei nachträglichen Änderungen und Löschungen in der zitierten Fassung abgerufen werden können.

Bei der Erstellung des Buches wurden das Satzsystem \LaTeX ¹ und das mathematische Softwaresystem MATLAB² eingesetzt. Sämtliche Bilder wurden mit MATLAB erstellt; die Quelltexte sind im Internet verfügbar. Für Beispiele mit geographischem Bezug wurde zur Darstellung der Kontinentkonturen das frei verfügbare, weltumspannende digitale Höhenmodell [tbase.bin WWW] benutzt.

Diese Studienhilfe basiert auf meinen Lehrveranstaltungen an der Hochschule Neubrandenburg. Nicht zuletzt durch die konstruktive Kritik der Studierenden konnte so manche Ungereimtheit beseitigt werden; herzlichen Dank

¹Näheres zu \LaTeX unter [DANTE WWW].

²MATLAB® ist eingetragenes Warenzeichen von The MathWorks Inc.

dafür! Weitere Hinweise und Verbesserungsvorschläge aus dem Leserkreis sind selbstverständlich willkommen; meine E-Mail-Adresse und zusätzliche Informationen zum Buch finden Sie auf der Internetseite <https://plus.hanser-fachbuch.de>. Ich danke KATI BLAUDZUN und ANDREAS WEHRENPFENNIG für die mühevollen Arbeit des Korrekturlesens, Frau FRITZSCH, Frau WERNER und Herrn KATZENMAYER für die angenehme und aufmerksame Zusammenarbeit. Ebenso danke ich Herrn ENGELMANN für die Aufnahme in diese Reihe und viele fachliche Hinweise.

Neubrandenburg, im August 2020

Martin Nitschke

Symbole und Schriftarten

- ✎ **An diesen Stellen** ist der Leser eingeladen, zum Stift zu greifen und eine Aufgabe zu lösen. Aufgaben sind grundsätzlich in unmittelbarer Nähe zur Behandlung des jeweiligen Stoffes eingefügt. Dies ermöglicht eine sofortige Verständnisüberprüfung. Am Ende des Buches sind die Lösungen der Aufgaben in Kurzform zusammengestellt; eine ausführlichere Fassung steht auf <https://plus.hanser-fachbuch.de>.
- Französische Anführungszeichen markieren mit MATLAB programmierte Beispiele. MATLAB-Schlüsselwörter wie **function** sind fett gedruckt, die Namen vordefinierter Funktionen, wie zum Beispiel sin, zusätzlich unterstrichen. Funktionen aus der Symbolic Math Toolbox wie syms sind doppelt unterstrichen. Kommentare werden durch ein %-Zeichen eingeleitet und sind hier in Grau gesetzt. Antworten des MATLAB-Systems sind durch Schreibmaschinenschrift hervorgehoben. Die vollständige MATLAB-Dokumentation, also insbesondere die Beschreibung der vordefinierten Funktionen, ist sowohl in das MATLAB-System integriert als auch über [MATLAB helpdesk WWW] zugänglich. Eine gute Einführung in MATLAB und eine Übersicht über frei verfügbare Software zur Linearen Algebra sind auf [GRAMLICH WWW] zu finden. In den Programm-Beispielen dieser Studienhilfe werden MATLAB-Kenntnisse etwa im Umfang der [GRAMLICH WWW]-Einführung vorausgesetzt. Die MATLAB-Beispiele sollen die Umsetzung des Gelernten in Computerprogramme unterstützen; MATLAB- oder andere EDV-Kenntnisse sind jedoch keine Voraussetzung für das Verständnis dieses Buches. Weiteres zu MATLAB und ähnlichen Produkten ist in Abschnitt 2.1 zu finden.
- ✎ Das MATLAB-Logo und eine kleinere Schrift verweisen auf die MATLAB-Datei, die zum jeweiligen Bild oder Programm-Listing gehört. Der unter <https://plus.hanser-fachbuch.de> abrufbare Quelltext ermöglicht Lesern mit MATLAB-Zugang, das Bild bzw. Programm zu reproduzieren und/oder für den jeweiligen Zweck (Konstruktionsvorlage, Vortragsfolie usw.) zu modifizieren.

Inhaltsverzeichnis

0	Einleitung	9
1	Anknüpfung an die Schulgeometrie	10
1.1	Dreiecke, Vierecke, Vielecke	10
1.2	Kongruenz, Ähnlichkeit, Strahlensätze	17
1.3	Umfangs- und Flächeninhaltsberechnungen	24
1.4	Einige Sätze über Dreiecke und Winkel	33
1.5	Körper	40
1.5.1	Quader, Zylinder, Prismen	41
1.5.2	Pyramiden und Kegel	43
1.5.3	Rotations- und Translationsflächen und -körper	44
1.5.4	Allgemeinere Körper	49
1.5.5	Polyeder	52
2	Matrizen, Vektoren, Koordinaten	54
2.1	Grundlagen aus der Linearen Algebra	54
2.2	Länge und Winkel	62
2.3	Orthogonale Zerlegung von Vektoren	66
2.4	Koordinatensysteme und -transformationen	68
2.4.1	Kartesische Koordinaten	68
2.4.2	Krummlinige Koordinaten	73
2.5	Determinante, Kreuzprodukt, Orientierung	84
2.5.1	Determinante (2d)	84
2.5.2	Kreuzprodukt und Determinante (3d)	88
2.6	Lineare Transformationen und homogene Koordinaten	93
2.6.1	Drehungen und allgemeinere lineare Transformationen	93
2.6.2	Homogene Koordinaten	103

3	Kurven, Flächen, Körper	106
3.1	Kurven	106
3.1.1	Parameterdarstellungen und Kurvenlängen	106
3.1.2	Gleichungsdarstellungen ebener Kurven	114
3.1.3	Funktionskurven	118
3.1.4	Kegelschnitte (Kurven zweiter Ordnung)	118
3.2	Flächen und Körper	122
3.2.1	Parameterdarstellungen, Flächeninhalte, Volumina	122
3.2.2	Gleichungsdarstellungen	129
3.2.3	Flächen zweiter Ordnung	129
3.3	Abstände und Schnitte	132
3.3.1	Abstand eines Punktes von einer Kurve oder Fläche	132
3.3.2	Abstände von Kurven und Flächen untereinander	135
3.3.3	Schnitte	139
4	Projektionen und Grundaufgaben der darstellenden Geometrie	146
4.1	Projektionen	146
4.2	Grundaufgaben	150
4.3	Begriffe und Beispiele zu ausgewählten Projektionen	150
4.3.1	Kotierte Projektion	150
4.3.2	Orthogonale Zweitafelprojektion	153
4.3.3	Umkloppung und wahre Gestalt ebener Figuren	155
4.3.4	Axonometrie	157
	Lösungen in Kurzform	162
	Verzeichnisse	171
	Literatur und Internet	171
	Personen	174
	MATLAB-Programme	175
	Index	176

0 Einleitung

Nach [Brockhaus DVD 2004] ist die **Geometrie** (griechisch **Erd-** oder **Landmessung**) das Teilgebiet der Mathematik, das aus der Beschäftigung mit den Eigenschaften und Formen des Raumes, wie der Gestalt ebener und räumlicher Figuren, Berechnung von Längen, Flächen, Inhalten u.a. entstand. Der heute als **klassisch** bezeichnete Teil der Geometrie geht auf EUKLID (um 300 v.Chr.) zurück ([Elemente]). RENÉ DESCARTES (1596–1650) ordnete den Punkten der Ebene und des Raumes (kartesische) Koordinaten zu ([DESCARTES 1637]). Dadurch wurde die Lage eines Punktes vollständig durch Zahlen beschrieben, was wiederum gestattete, geometrische Fragestellungen in algebraische umzuwandeln: Die Grundlagen für die **analytische Geometrie** waren gelegt. Die Behandlung geometrischer Aufgaben mit Methoden der Analysis führte schließlich auf **Differenzial-** und **Integralgeometrie**. Richtungsweisend dafür war der völlig ohne Formeln auskommende, im Beisein von CARL-FRIEDRICH GAUSS (1777–1855) gehaltene Habilitationsvortrag von GEORG FRIEDRICH BERNHARD RIEMANN (1826–1866) ([RIEMANN 1868]). In der **Elementargeometrie** unterscheidet man zwischen **Planimetrie** (ebene Geometrie) und **Stereometrie** (räumliche Geometrie). Ein Großteil der heute benutzten Techniken, insbesondere die **Vektorrechnung**, lässt sich jedoch weitgehend analog zur Behandlung sowohl ebener als auch räumlicher Probleme, sogar in der n -dimensionalen Geometrie, einsetzen. Trotzdem spielen der anschauliche dreidimensionale Raum und die zweidimensionale Ebene eine besondere Rolle. Die grundlegende Verknüpfung zwischen einer (mindestens) dreidimensionalen Realität und ihrem zweidimensionalen Abbild auf einem Zeichenblatt oder einem PC-Monitor bilden die (in ihren Ursprüngen zeichnerischen) Abbildungsverfahren der in ihren Vorstufen auf ALBRECHT DÜRER (1471–1528) zurückgehenden und von GASPARD MONGE (1746–1818) erstmalig formulierten **darstellenden Geometrie** (siehe auch Kapitel 4 dieses Buches für einen ersten Überblick, die umfassenden Darstellungen [KLIX, NICKEL 1991, KLIX 2001, FUCKE et al. 2007] sowie die historischen Werke [DÜRER 1525, MONGE 1795]). Die Erweiterung um analytisch-rechnerische Methoden führt schließlich auf die **konstruktive Geometrie** ([KRUPPA 1957, KLIX 2001]). **Angewandte Geometrie** wird in so verschiedenen Disziplinen wie dem Ingenieurwesen, den Geowissenschaften, der Biologie, Physik, Astronomie, Fotografie, Kunstgeschichte und Musik eingesetzt; vielfältige, weit über das vorliegende Taschenbuch hinausgehende Beispiele und analytische Konzepte dazu findet man bei [GLAESER 2007].

1 Anknüpfung an die Schulgeometrie

Dieses Kapitel will und kann nicht den mehrjährigen Schulunterricht auf wenigen Seiten zusammenfassen oder gar ersetzen. Sein Ziel ist es vielmehr, am Beispiel einiger bekannter (falls nötig auch aufgefrischter) Zusammenhänge in die *Vorgehensweise* der Geometrieausbildung für Ingenieure einzuführen und an ausgewählten Stellen einen Ausblick auf *Inhalte* „jenseits des Schulwissens“ zu geben. Umfassende, aber kompakte Übersichten über die Schulgeometrie enthalten die Geometrieteile von Werken wie [FRANK et al. 1998, GOTTWALD et al. 1995, REINHARDT 2003, SCHARLAU 2001].

1.1 Dreiecke, Vierecke, Vielecke

Seit Generationen werden Schüler im Mathematik-Unterricht mit Dreiecks-konstruktionen und -berechnungen gequält. Warum ist das so?

Zum einen sind Dreiecke in Konstruktionen, die eine hohe Stabilität erfordern, unentbehrlich. Als Beispiel seien hier der Fachwerkbau, die Profile von Bogenbrücken (Bild 1.1) und der durch das Gewicht des Fahrers besonders belastete hintere Teil des Fahrradrahmens (Bild 1.2) genannt. Die Stabilität ist gewährleistet, da die Gestalt eines Dreiecks durch seine Seitenlängen eindeutig bestimmt ist (Kongruenzsatz SSS, Bild 1.16). Eine Verformung ist also nur durch Änderung der Seitenlängen möglich. Diese Eigenschaft ist typisch für Dreiecke; bei Vier- und Vielecken ist eine Verformung ohne Änderung der Seitenlängen möglich. (Bild 1.3).

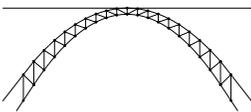


Bild 1.1: Aus Dreiecken zusammengesetztes Brückenprofil

◆ Bogenbruecke.m

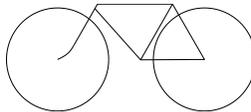


Bild 1.2: Fahrradrahmen

◆ Fahrrad.m

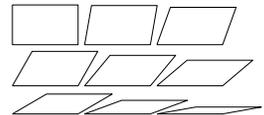


Bild 1.3: Verformung eines Rechtecks

◆ RechteckParall.m

Alle abgebildeten Vierecke haben identische Seitenlängen.

Zum anderen können komplizierte Flächen durch eine Menge von Dreiecken approximiert, d.h. angenähert werden. Bild 1.4 zeigt am Beispiel der gekrümmten Oberfläche einer Glühlampe, wie durch eine steigende Anzahl von (ebenen) Dreiecken eine immer besser werdende Anpassung an eine gegebene

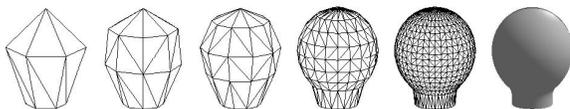


Bild 1.4: Approximation gekrümmter Oberflächen durch Dreiecke

◆ GlueLampe.m

(gekrümmte) Oberfläche erzielt werden kann. Die dadurch eröffnete Möglichkeit, komplexe geometrische Strukturen näherungsweise durch elementare zu ersetzen, ist die Grundlage der **Finite-Elemente-Methode**. Diese ist ein Verfahren zur Lösung mathematisch formulierbarer Probleme zur Ermittlung von Spannungen und Dehnungen an komplizierten, analytisch nicht oder nur aufwändig berechenbaren, belasteten Bauteilen. Das Bauteil wird dabei durch eine Anzahl von Teilstücken (Elementen) endlicher (finiter) Größe idealisiert. Als Elemente werden dabei häufig Dreiecke benutzt. Die Finite-Elemente-Methode sprengt den Rahmen dieser Geometrie-Einführung, eine Grundlage für deren Verständnis ist jedoch das Verstehen der Geometrie von Dreiecken.

✎ **Aufgabe 1.1** *Dreiecke sind also durch ihre Seitenlängen eindeutig bestimmt, bei Vierecken ist das offensichtlich nicht der Fall. Ist die Gestalt eines Vierecks eindeutig, wenn neben den Seitenlängen zusätzlich einer der vier Innenwinkel vorgegeben ist? Falls ja, beschreiben Sie die entsprechende Konstruktion. Begründen Sie Ihre Antwort!*

Bekanntlich können Dreiecke nach ihrem größten Innenwinkel in **spitz-**, **recht-** und **stumpfwinklige** eingeteilt werden. Sind zwei der drei Seiten gleich lang, so spricht man von einem **gleichschenkligen** Dreieck; sind sogar alle drei Seitenlängen identisch, so nennt man das Dreieck **gleichseitig**. Die aus dem Schulunterricht (hoffentlich) ebenfalls bekannten Begriffe **Höhen**, **Mittelsenkrechte**, **Seiten-** und **Winkelhalbierende** und darauf basierende Zusammenhänge sind in Bild 1.5 zusammengefasst. Unter Winkelhalbierenden versteht man dabei die Halbierenden der *Innenwinkel*. Die Halbierenden der *Außenwinkel* führen auf die **Ankreise** (Bild 1.6); die Seitenmittelpunkte, die Höhenfußpunkte und die Mittelpunkte zwischen Höhenschnittpunkt und Seitenecken auf den **Feuerbachkreis** (Bild 1.7). Dieser durch neun Punkte verlaufende Kreis wurde von KARL WILHELM FEUERBACH (1800–1834) zunächst als Sechspunktekreis entdeckt.

Für die wichtigsten speziellen **Vierecke** wird auf Bild 1.8 verwiesen, für **Vielecke** auf Bild 1.9. Der für Vielecke häufig synonym benutzte Begriff **Polygon** wird hier weitgehend vermieden, um Verwechslungen mit **Polygonzügen** auszuschließen: Während ein Vieleck (= Polygon) stets ein ge-

schlossener Streckenzug ist, kann ein Polygonzug offen oder geschlossen sein. Aus der Definition von Sternförmigkeit und Konvexität (Bild 1.9) ergibt sich der Satz 1.1.

Satz 1.1

Jedes konvexe Vieleck ist sternförmig, und jeder Punkt innerhalb eines konvexen Vielecks ist ein Sternpunkt.

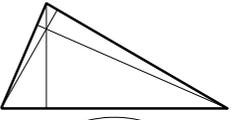
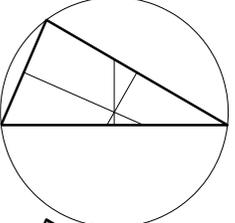
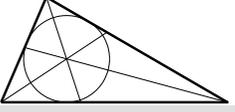
<p>Höhe Lot auf eine Dreiecksseite durch die gegenüberliegende Ecke <i>Die drei Höhen schneiden sich in einem Punkt, dem Höhenschnittpunkt.</i></p>	
<p>Mittelsenkrechte Lot auf eine Dreiecksseite durch ihren Mittelpunkt <i>Die drei Mittelsenkrechten schneiden sich in einem Punkt, dem Umkreismittelpunkt.</i></p>	
<p>Seitenhalbierende Strecke zwischen einem Seitenmittelpunkt und der gegenüberliegenden Ecke <i>Die drei Seitenhalbierenden schneiden sich in einem Punkt, dem Schwerpunkt.</i> Der Schwerpunkt teilt die Seitenhalbierenden im Verhältnis 2:1.</p>	
<p>Winkelhalbierende Von einem Eckpunkt ausgehende Strecke, die den Innenwinkel halbiert <i>Die drei Winkelhalbierenden schneiden sich in einem Punkt, dem Inkreismittelpunkt.</i></p>	

Bild 1.5: Höhen, Mittelsenkrechte, Seiten- und Winkelhalbierende im Dreieck

◆ DreieckHMSW.m

Allgemein bekannt ist, dass die Summe der Innenwinkel eines Dreiecks 180° ist. Hieraus lässt sich eine Formel für die Winkelsumme im sternförmigen n -Eck (Bild 1.9, vierte Figur) herleiten: Die Strecken vom Sternpunkt zu den Ecken zerlegen das n -Eck in n Dreiecke. Deren Winkelsumme ist $180^\circ \cdot n$. Die am Sternpunkt anliegenden Winkel summieren sich offensichtlich zu 360° . Da diese keinen Beitrag zur Winkelsumme des n -Ecks leisten, sind sie zu subtrahieren; und es ergibt sich eine Summe von $180^\circ \cdot n - 360^\circ = 180^\circ \cdot (n - 2)$.

Damit gilt der Satz 1.2.

Satz 1.2

Die Innenwinkelsumme eines sternförmigen n -Ecks beträgt $180^\circ \cdot (n - 2)$.

Da wegen Satz 1.1 ein konvexes Vieleck stets sternförmig ist, gilt der Satz 1.2 insbesondere für konvexe n -Ecke. Man beachte jedoch, dass Satz 1.2 nur für **ebene** n -Ecke gilt. Beispielsweise ist auf der Kugeloberfläche die Winkelsumme im Dreieck stets **größer** als 180° ; es gibt dort sogar Dreiecke mit drei rechten Winkeln (Bild 1.10). Die Differenz zwischen der Winkelsumme

Außenwinkelhalbierende

Durch einen Eckpunkt verlaufende Gerade, die den Außenwinkel halbiert

*Je zwei der drei Außenwinkelhalbierenden schneiden sich in einem der drei **Ankreismittelpunkte**.*

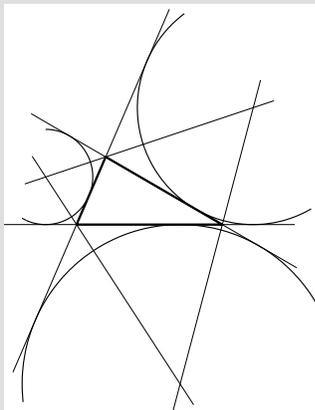


Bild 1.6: Außenwinkelhalbierende im Dreieck und Ankreise

◆ DreieckA.m

Feuerbachkreis

Durch die drei Seitenmittelpunkte ◆, die drei Höhenfußpunkte • und die Mittelpunkte ■ zwischen dem Höhenschnittpunkt ◦ und den drei Seitenecken verlaufender Kreis

Den Mittelpunkt des FEUERBACH-Kreises erhält man als Schnitt der Mittelsenkrechten zu den neun definierenden Punkten.

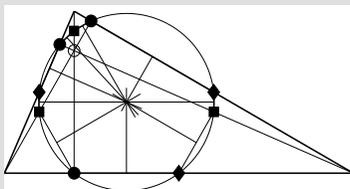


Bild 1.7: FEUERBACH- oder Neunpunktekreis

◆ Feuerbach.m

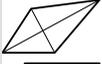
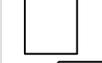
Allgemeines Viereck		
Drachenviereck	Viereck, bei dem jede Seite eine gleich lange benachbarte Seite hat	
Trapez	Viereck mit zwei zueinander parallelen Seiten	
Parallelogramm	Viereck mit zwei Paaren zueinander paralleler Seiten	
Rechteck	Parallelogramm mit einem rechten Winkel	
Raute (Rhombus)	Viereck mit vier gleich langen Seiten	
Quadrat	Raute mit einem rechten Winkel	

Bild 1.8: Vierecke

◆ Vierecke.m

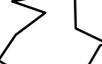
Ein Polygonzug besteht aus aneinander anschließenden Strecken.	
Allgemeines Vieleck = Polygon = Geschlossener Polygonzug	
Ein Vieleck mit Selbstüberschneidung wird auch verschränkt oder überschlagen genannt.	
Ein Vieleck heißt sternförmig , falls es einen Punkt (den so genannten Sternpunkt) gibt, für den die Verbindungsstrecken zu allen Eckpunkten vollständig innerhalb des Vielecks verlaufen.	
Ein Vieleck heißt konvex , falls alle Verbindungsstrecken zwischen den Ecken vollständig innerhalb des Vielecks liegen.	
Ein Vieleck heißt regelmäßig oder regulär , falls alle Seiten und alle Winkel gleich groß sind.	

Bild 1.9: Polygonzüge und Vielecke (Polygone)

◆ nEcke.m

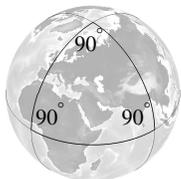


Bild 1.10: Kugeldreieck mit drei rechten Winkeln

 Kugeldreieck3R.m

eines Kugeldreiecks und 180° heißt **sphärischer Exzess**. GAUSS erkannte, dass der sphärische Exzess ein Maß für die Krümmung des von den Dreiecksseiten begrenzten Flächenstücks ist. Einzelheiten dazu findet man in Büchern über **Differenzialgeometrie**, zum Beispiel [WÜNSCH 1997]. GAUSS erkannte ebenso die fundamentale Bedeutung dieses Zusammenhangs für die Geodäsie: Dreieckswinkel lassen sich mit relativ niedrigem Aufwand *auf der Erdoberfläche* messen. Aus der Abweichung ihrer Summe von 180° (dem sphärischen Exzess) erhält man Informationen über die Krümmung und damit über die Gestalt der Erde, ohne dass es nötig ist, von außen auf unseren Planeten zu schauen. Überlegungen dieser Art sind nicht auf zweidimensionale gekrümmte Flächen wie die Kugeloberfläche beschränkt: Aussagen über Eigenschaften des uns umgebenden vierdimensionalen Raum-Zeit-Kontinuums lassen sich durch Messungen innerhalb des Kontinuums gewinnen. Dies ist eine wesentliche Grundlage für die von GEORG FRIEDRICH BERNHARD RIEMANN (1826–1866), ERNST MACH (1838–1916), HENDRIK ANTOON LORENTZ (1853–1928), HERMANN MINKOWSKI (1864–1909), JULES HENRI POINCARÉ (1854–1912) vorbereitete und von ALBERT EINSTEIN (1879–1955) schließlich aufgestellte **Relativitätstheorie**, vgl. zum Beispiel [SEXL, SCHMIDT 2000].

Aufgabe 1.2 Richtig oder falsch?

1. Jedes gleichseitige Dreieck ist gleichschenkelig.
2. Jedes gleichschenklige Dreieck ist gleichseitig.
3. Jedes gleichschenklige Dreieck ist spitzwinklig.
4. Es gibt rechtwinklige gleichschenklige Dreiecke.
5. Es gibt stumpfwinklige gleichschenklige Dreiecke.
6. Jedes gleichseitige Dreieck ist spitzwinklig.
7. Es gibt rechtwinklige gleichseitige Dreiecke.
8. Es gibt stumpfwinklige gleichseitige Dreiecke.

 **Aufgabe 1.3** In Bild 1.5 liegen Höhenschnittpunkt, Umkreismittelpunkt, Schwerpunkt und Inkreismittelpunkt innerhalb des Dreiecks. Dies ist in spitzwinkligen Dreiecken immer der Fall. Wie ist die Situation in recht- bzw. stumpfwinkligen Dreiecken?



Bild 1.11: zu Aufgabe 1.4,1

ParallelDrach.m

Aufgabe 1.4

1. Gegeben sind drei Punkte der Ebene, wie in Bild 1.11 dargestellt. Bestimmen Sie einen vierten Punkt so, dass
 - a) ein Parallelogramm, b) ein Drachenviereck
 entsteht. Überlegen Sie jeweils, ob die Lösung eindeutig ist. Falls es mehrere Lösungen gibt, geben Sie alle an!
2. Richtig oder falsch?
 - a) Jedes Trapez ist ein Parallelogramm.
 - b) Jedes Parallelogramm ist ein Trapez.
 - c) Jedes Parallelogramm ist ein Drachenviereck.
 - d) Jede Raute ist ein Trapez.
 - e) Jede Raute ist ein Drachenviereck.
 - f) Jedes Rechteck ist ein Trapez.
 - g) Jedes Rechteck ist ein Drachenviereck.
 - h) Jedes Quadrat ist ein Trapez.
 - i) Jedes Quadrat ist ein Drachenviereck.

Aufgabe 1.5 Richtig oder falsch?

1. Es gibt verschränkte Dreiecke.
2. Es gibt verschränkte Vierecke.
3. Es gibt verschränkte Trapeze.
4. Es gibt verschränkte Drachenvierecke.
5. Es gibt verschränkte Parallelogramme.
6. Jedes Dreieck ist konvex.
7. Jedes Viereck ist konvex.
8. Jedes Trapez ist konvex.
9. Jedes Trapez ohne Selbstüberschneidung ist konvex.
10. Jedes Drachenviereck ist konvex.
11. Jedes Parallelogramm ist konvex.
12. Jedes konvexe Vieleck ist sternförmig.
13. Jedes sternförmige Vieleck ist konvex.

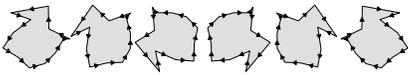


Bild 1.12: Kongruente Vielecke

◆ Kongruenz.m

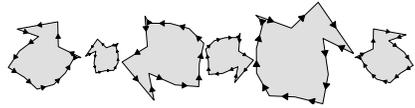


Bild 1.13: Ähnliche Vielecke

◆ Aehnlichkeit.m

1.2 Kongruenz, Ähnlichkeit, Strahlensätze

Zwei oder mehr geometrische Objekte heißen **kongruent**, wenn es eine Kombination aus Bewegungen und Spiegelungen gibt, die sie ineinander überführt. Unter Bewegungen werden hier beliebige Kombinationen aus **Verschiebungen** und **Drehungen** verstanden. Lassen sich Objekte durch Bewegungen, Spiegelungen sowie gleichmäßige Vergrößerungen und Verkleinerungen ineinander überführen, so nennt man sie **ähnlich**. Kongruente Objekte sind stets ähnlich, aber ähnliche Objekte im Allgemeinen nicht kongruent zueinander. Man spricht von **gleichsinniger** Kongruenz bzw. Ähnlichkeit, wenn sich die Objekte nur durch Bewegungen (bei Ähnlichkeit auch durch Vergrößerungen und Verkleinerungen), aber **ohne Spiegelungen** ineinander überführen lassen. Andernfalls spricht man von **gegensinniger** Kongruenz bzw. Ähnlichkeit. Zueinander kongruente/ähnliche Vielecke sind genau dann gleichsinnig kongruent/ähnlich, wenn der Umlaufsinn erhalten bleibt. So sind die ersten drei Vielecke aus Bild 1.12/1.13 zueinander jeweils gleichsinnig kongruent/ähnlich und zu den letzten dreien gegensinnig kongruent/ähnlich. Beispiele für Kongruenz und Ähnlichkeit komplexerer Strukturen sind Bild 1.14

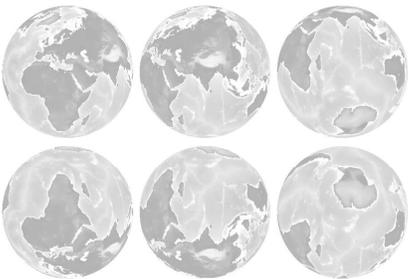


Bild 1.14: Kongruente Welten

◆ KongruenteWelten.m

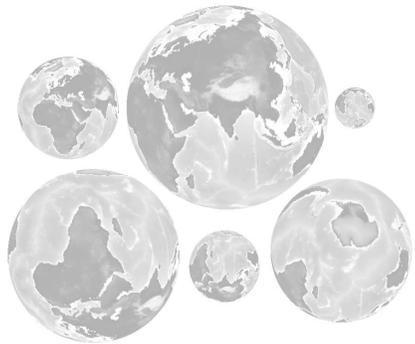


Bild 1.15: Ähnliche Welten

◆ AehnlicheWelten.m

und 1.15: Die oberen drei Welten sind zueinander jeweils gleichsinnig kongruent/ähnlich und zu den unteren dreien gegensinnig kongruent/ähnlich. Kongruente Figuren stimmen in Größe und Gestalt überein; ähnliche Figuren nur in ihrer Gestalt. Bei ähnlichen Figuren stimmen korrespondierende Winkel und Längen*verhältnisse* überein, bei kongruenten Figuren zusätzlich auch die Größen von Längen. Da komplexe geometrische Figuren häufig durch Dreiecke zusammengesetzt oder angenähert werden (Bild 1.4), wird deren Kongruenz/Ähnlichkeit auf die Kongruenz/Ähnlichkeit von Dreiecken zurückgeführt. Die dafür grundlegenden Kongruenzsätze SSS, SWS, SsW, WSW und die entsprechenden Ähnlichkeitssätze sind in Bild 1.16 zusammengefasst. Die hier nicht behandelte Situation sSW wird in Satz 1.9 erörtert.

Dreiecke sind kongruent , wenn sie	
in den drei Seiten (SSS)	
oder in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel (SWS)	
oder in zwei Seiten und dem der größeren Seite gegenüberliegenden Winkel (SsW)	
oder in einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln (WSW)	
übereinstimmen. Analog dazu sind Dreiecke ähnlich , wenn sie	
in zwei Seitenverhältnissen	
oder im Verhältnis zweier Seiten und dem eingeschlossenen Winkel	
oder im Verhältnis zweier Seiten und dem der größeren Seite gegenüberliegenden Winkel	
oder in zwei Winkeln	
übereinstimmen.	

Bild 1.16: Kongruenz- und Ähnlichkeitssätze für Dreiecke

🔗 Aufgabe 1.6 (zum Kongruenzbegriff) Richtig oder falsch?

1. Vierecke sind kongruent, wenn sie in allen vier Seiten übereinstimmen.
2. Quadrate sind kongruent, wenn sie in einer Seite übereinstimmen.
3. Rauten sind kongruent, wenn sie in einer Seite übereinstimmen.
4. Rechtecke sind kongruent, wenn sie in zwei benachbarten Seiten übereinstimmen.
5. Rechtecke sind gleichsinnig kongruent, wenn sie in zwei benachbarten Seiten übereinstimmen.
6. Parallelogramme sind kongruent, wenn sie in zwei benachbarten Seiten übereinstimmen.
7. Parallelogramme sind kongruent, wenn sie in zwei benachbarten Seiten und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen.
8. Parallelogramme sind gleichsinnig kongruent, wenn sie in zwei benachbarten Seiten und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen.
9. Drachenvierecke sind kongruent, wenn sie in allen vier Seiten übereinstimmen.
10. Kreise sind kongruent, wenn sie im Radius übereinstimmen.
11. Kreise sind gleichsinnig kongruent, wenn sie im Radius übereinstimmen.

🔗 Aufgabe 1.7 (zum Ähnlichkeitsbegriff) Richtig oder falsch?

1. Alle Vierecke sind zueinander ähnlich.
2. Alle Quadrate sind zueinander ähnlich.
3. Alle Rauten sind zueinander ähnlich.
4. Alle Rechtecke sind zueinander ähnlich.
5. Alle Parallelogramme sind zueinander ähnlich.
6. Parallelogramme sind ähnlich, wenn sie in allen Winkeln übereinstimmen.
7. Drachenvierecke sind ähnlich, wenn sie in allen Winkeln übereinstimmen.
8. Alle Kreise sind zueinander ähnlich.

🔗 Aufgabe 1.8 (zu Bild 1.16)

1. Gemäß Kongruenzsatz SSS ist die Gestalt eines Dreiecks durch seine drei Seitenlängen eindeutig bestimmt. Wenn umgekehrt die drei Seitenlängen gegeben sind, existiert dann dazu immer ein Dreieck? Falls ja, geben Sie die entsprechende Konstruktion an. Falls nein, geben Sie eine Bedingung für die Seitenlängen an, die die Existenz des Dreiecks garantiert.
2. Gemäß Kongruenzsatz SWS ist die Gestalt eines Dreiecks durch zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel eindeutig bestimmt. Wenn umgekehrt zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gegeben sind, existiert dann dazu immer ein Dreieck?

Index

Abstand

- Ellipse ↔ Ellipse 136, 138
- EUKLIDischer 65, 66
- Fläche ↔ Fläche 136
- geodätischer 65, 66
- Gerade ↔ Gerade 136
- Kurve ↔ Fläche 136
- Kurve ↔ Kurve 136
- parallele Geraden 137
- Punkt ↔ Ebene 130, 135
- Punkt ↔ Ellipse 133
- Punkt ↔ Fläche 135, 136
- Punkt ↔ Gerade 117, 118, 132, 133, 135
- Punkt ↔ Kurve 133
- sphärischer 66, 83
- windschiefe Geraden 136, 137

abwickelbar 130, 131

Addition und Subtraktion von Matrizen 56

Ähnlichkeit 17, 100

Ähnlichkeitssätze 18

allgemeine Lage 107, 116, 121, 129, 151, 152

Altgrad 63, 64

Ankreismittelpunkt 13

Antennenausrichtung 111

\arctan_2 76

Astronavigation 144

Asymptoten 121

atan2 76

Außenwinkel 11

Aufbauverfahren 157

Aufpunkt 106, 122

Aufriss 146

Augenpunkt 146

Axonometrie 147, 157, 160, 161

Azimet 78, 111

Bewegung 17

Böschungswinkel 43, 118

Bogenmaß 63, 64

Breitengrad 78

Breitenkreis 81

Brennpunkt 120

Brennstrahlen 121

Brückenprofil 10

Cart 77

cart2pol 76, 78

cart2sph 79

CAUCHY-SCHWARZsche Ungleichung 63

CAVALIERisches Prinzip 26, 42

für Kegel 42

für Zylinder 42

cross 88

Dach 139

-ausmittlung 153

Parallelprojektionen 147

Axonometrie 160, 161

Dimetrie 160, 161

Isometrie 161

kotierte Projektion

152, 153

Trimetrie 161

Zweifafelprojektion 154

rechnerisch 169

Projektionen 149

Typen 153

wahre Gestalt der

Seitenflächen 156

Zentralprojektionen 148, 149

darstellende Geometrie 9, 146

DEG, degree 64

det 85, 90

Determinanten 85, 90, 92, 98, 100

-Multiplikationssatz 102

diag 59

Diagonalelement 59

Diagonalmatrix 59

Veranschaulichung 100

Differenzialgeometrie 15

Dimetrie 148, 159–161

DIN A... 22, 24

Division einer Matrix

durch einen Skalar 58

DMS 64

Doppelkegel 124, 131

Doppelkreiskegel 124

dot 58

Drachenviereck 14, 16, 19, 68

Drehmatrix 93–95

Drehspiegelung 98, 99

Drehung 17, 93, 95, 99

inverse 96

Dreibein 147

Dreieck 10, 11

Ähnlichkeitssätze 18

Ankreise 13

Außenwinkel 11

-halbierende 13

Flächeninhalt 27, 29

gleichschenkliges 11

gleichseitiges 11

Höhe 12, 27

Höhenschnittpunkt 12,

162

Inkreis 12, 162

Innenwinkel 11

Klassifikation 11

Kongruenzsätze 18, 162

SsW und sSW 35

mit drei rechten Winkeln

13

Mittelsenkrechte 12

rechtwinkliges 11, 162

Schwerpunkt 12, 162

Seitenhalbierende 12

spitzwinkliges 11

stumpfwinkliges 11, 162

Umkreis 12, 162

Winkelhalbierende 12

Dreiecksungleichung 61, 162

e_1, e_2, \dots 69–71, 86, 91, 147

Ebene 123, 130

Einheitsmatrix 60

Einheitsvektor 60

Einschneideverfahren 157

Elevation 78, 111

Ellipse 118, 119

Flächeninhalt 127

Gleichungs-

- darstellung 115, 120
- Parameterdarstellung 106, 107, 121
- Umfang 114
- Ellipsenbogen, Länge 114
- Ellipsenfläche 123
- Ellipsoid 127, 130, 131
 - Volumen 51, 128
- Entwicklungssatz 91
- Erdmessung 9
- erstprojizierend 154
- EUKLID
 - ische Länge 65
 - ische Norm 65
 - ischer Abstand 65, 66
 - ischer Vektorraum 65
- EULERSche Winkel 95, 96
- EULERScher Polyedersatz 52
- Exzentrizität 121
- Exzess 15
- eye** 60
- Fahrradrahmen 10
- FALKSschema 57
- Fass 51
- FEUERBACHkreis 13
- Finite Elemente 11
- Fläche 24, 122
 - Gleichungsdarstellung 129
 - Parameterdarstellung 122
 - Umfang 24
 - zweiter Ordnung 129–132
- Flächeninhalt 24, 25, 40
 - Dreieck 27, 29
 - Ellipse 127
 - Kreis 25, 127
 - Kreissektor 65
 - Paraboloid 128
 - Parallelogramm 26, 84, 88
 - parametrisierte Fläche 126
 - Rechteck 25, 26
 - Rotationsfläche 45
 - Rotationsparaboloid 128
 - Trapez 27
 - Vieleck 29, 30
- Fluchtpunkt 149
- fminsearch** 138
- frei verfügbare Software 6
- freier Vektor 54
- fsolve** 138
- Funktionskurve 118
- Ganghöhe 47
- GAUSS 55
- GAUSSSche Trapez- und Dreiecksformel 30
- gegensinnig 17
- genormte
 - Dimetrie 148, 159–161
 - Isometrie 148, 159, 161
- geodätischer Abstand 65, 66
- geographische Koord. 78, 79
- geometrischer Vektor 54
- Gerade 106, 116, 117
- Geschwindigkeitsvektor 109
- gleichschenkliges Dreieck 11
- gleichseitiges Dreieck 11
- gleichsinnig 17
- Gleichungsdarstellung
 - Ebene 130
 - Ellipse 115, 120
 - Fläche 129
 - zweiter Ordnung 131
 - Funktionskurve 118
 - Gerade 117
 - Hyperbel 120
 - Kreis 114, 115
 - Kugel 129
 - Kurve 114
 - zweiter Ordnung 119
 - Parabel 120
 - Rotationsfläche 129
- Gon und gon 64
- GON**, gon 64
- Grad 63
- Grad und grad 64
- GRAD**, grad 64
- GRASSMANNscher
 - Entwicklungssatz 91
- Großkreis 66, 108, 109
- Großkreisbogen
 - Parameterdarstellung 108, 109
- Grundaufgabe 150
- Grundriss 146, 150, 153
- GULDINSche Regeln 45, 46
- Halbkreissschwerpunkt 49
- Hauptachsen-
 - transformation 122, 129
- Hauptscheitel 120
- Helix 47, 108
- HERONische Formel 29
- HESSISChe Normalform 116, 117, 130
- Hexaeder 53
- HMS** 64
- Höhe
 - Dreieck 12, 27
 - Kegel 44
 - Parallelogramm 26
 - Trapez 27
 - Zylinder 42
- Höhenlinien 152
- Höhenschnittpunkt 12, 162
- Höhenschnittverfahren 152
- homogene Koord. 103, 149
- Horizontalspur 154
- Hund-Herrchen-Problem 113
- Hyperbel 118–121
- Hyperboloid 124, 130, 131
 - Parameterdarstellung 125
 - Volumen 51
- Hyperpotenuse 33
- Icosaeder 53
- Ingenieuraxonomie 148
- Inkreismittelpunkt 12, 162
- Innenwinkel 11
- inverse Drehung 96
- Isometrie 148, 161
- kartesische Koord. 9, 54, 68, 73
- Kathete 33
- Kavalierperspektive 157, 158
- Kegel 43, 124, 131
 - Mantelfläche 46
 - Parameterdarstellung 123, 125
 - Volumen 44, 51
- Kegelschnitt 118, 119, 122
- Kegelstumpf 124
- Kettenlinie 112
- Körper 40, 122
- komplanar 91
- Kongruenz 17, 99
- Kongruenzsätze 18, 162
 - SsW und sSW 35

- Konoid 51
 konvex 12, 14, 52
 Koordinaten
 geographische 78, 79
 homogene 103, 149
 kartesische 9, 54, 68, 73
 krummlinige 73
 parallele 73
 polare 74, 76
 rechtwinklige 73
 schiefwinklige 73
 -einheitsvektor 69–71, 86, 91
 -flächen 81
 -gitter 73
 -linien 74, 81, 106
 -transformation 71
 Kosinussatz 34, 62
 kosmischer Körper 53
 Kote 146, 150, 157
 kotierte Projektion 146, 150
 Kreis 19
 Flächeninhalt 25, 127
 Gleichungsdarstellung 114, 115
 Parameterdarstellung 106, 107
 Umfang 25, 114
 Kreisbogen
 Länge 65, 114
 Parameterdarstellung 106, 107
 Kreisfläche 123
 Kreiskegel 123, 124
 Kreiskegelstumpf 124
 Kreissektor
 Flächeninhalt 65
 Kreiszyylinder 123, 124
 Kreiszyylinderkoordinaten 77
 Kreuzprodukt 88, 90, 91
 Kreuzriss 146, 153
 Krümmung 15
 krummlinige Koord. 73
 Kühlturm 125
 Kugel
 Gleichungsdarstellung 129
 Oberfläche 127
 Parameterdarstellung 123
 Volumen 48, 51
 Kugelkoordinaten 78, 80
 Kurs 109
 Kurve 106
 Gleichungsdarstellung 114
 Parameterdarstellung 106
 zweiter Ordnung 119, 122
 Kurvenlänge 113
 Länge
 Ellipsenbogen 114
 Helix 47
 Kreisbogen 65, 114
 Kurve 113
 Schraublinie 47
 Vektor 58, 62
 EUKLIDISCHE 65
 Rechenregeln 61
 Längengrad 78
 Längenkreis 81
 Landmessung 9
 Leitkurve
 Konoid 51
 Translationsfläche 46
 Translationskörper 46
 Leitlinie 120
 Lineare Algebra 6, 54
 lineare Transformation 99
 Lot auf eine Ebene 150
 Mantelfläche 46, 128
 Mantellinie 43
 MAPLE 55
 MATHCAD 55
 MATHEMATICA 55
 MATLAB 5, 6, 55
 Matrix 54
 orthogonale 71, 98, 99
 Rechenregeln 60
 Veranschaulichung 99–101
 Verknüpfungsregeln 61
 Mehrtafelprojektion 146
 Meridian 81
 Meter und Seemeile 84
 mgon 64
 Militärperspektive 157, 158
 Milligon 64
 Minute 63, 64
 Mittelpunktswinkel 37, 63
 Mittelsenkrechte 12
 Möndchen des HIPPOKRATES 36
 Multiplikation einer Matrix
 mit einem Skalar 55
 mit einer Matrix 57, 58
 FALKSCHEMA 57
 Veranschaulichung 102
 MuPAD 55
 Nebenseitel 121
 Neugrad 64
 Neunpunktkekreis 13
 Norm 65
 norm 59
 Normalenvektor 116, 129
 Normallage 107, 116, 121, 129
 Normalprojektion 148
 Normalschnittebene 151, 154
 normierter Vektor 60
 Nullmatrix 59
 Nullvektor 59
 numerische Exzentrizität 121
 O-Matrix 55
 Oberfläche 24, 40
 Kugel 127
 Rotationsfläche 45
 Torus 45
 Octave 55
 Oktaeder 53
 Ordnern, Ordnungslinie 154
 orientierter Winkel 75, 86
 Orientierung
 einer Transformation 100
 und Richtung 56, 60
 zweier ebener Vektoren 86
 orthogonale
 Axonometrie 148, 157
 Matrix 71, 98, 99
 Parallelprojektion 148
 Zerlegung 66
 Zweitafelprojektion 153
 Orthogonalraum 68
 Ortskreis 38–40, 164
 Ortslinien 120
 Ortsvektor 54, 56
 Ox 55
 Papierformat 22, 24
 Parabel 118–121

- Paraboloid 130, 131
 Flächeninhalt 128
 Parameterdarstellung 128
 Volumen 51
 Parallelkoordinaten 73
 Parallelogramm 14, 16, 19, 61
 Flächeninhalt 26, 84, 88
 Höhe 26
 Parameterdarstellung 123
 Parallelprojektion 146, 147
 Parallelspat 88, 89, 123
 Parameterbereich 106
 Parameterdarstellung
 Ebene 123
 Ellipse 106, 107, 121
 Ellipsenfläche 123
 Ellipsoid 127
 Fläche 122
 zweiter Ordnung 132
 Funktionskurve 118
 Gerade 106
 Großkreisbogen 108, 109
 Helix 109
 Hyperbel 121
 Hyperboloid 125
 Körper 122
 Kegel 123, 125
 Kreis 106, 107
 Kreisbogen 106, 107
 Kreisfläche 123
 Kreiskegel 123
 Kreiszyylinder 123
 Kugel 123, 127
 Kurve 106
 zweiter Ordnung 119
 Parabel 121
 Paraboloid 128
 Parallelogramm 123
 Parallelspat 123
 Radlinie 113
 Rotations-
 fläche 124
 hyperboloid 125
 paraboloid 128
 Schleppkurve 113
 Schraubfläche 126
 Schraublinie 109
 Strahl 106
 Strecke 106
 Torus 124
 Traktrix 113
 Translationsfläche 125
 Viertelebene 123
 Zykloide 113
 Zylinder 123, 125
 Pentagonododekaeder 53
 Peripheriewinkel 37
 planar 108
 platonischer Körper 53
Pol 77
pol2cart 76, 78
 Polarkoordinaten 74, 76
polyarea 31
 Polyeder 40, 52, 53
 Polygon 11, 14
 Polygonzug 11, 14
P→R 76, 78
 Prisma 42
 Volumen 42, 51
 Prismatoid, Prismoid 51
 Profilkurve 44, 46
 Projektion 146
 auf eine Ebene 146, 149
 auf einen Vektor 67
 Projektionsmatrix 68, 149
 projizierend 151, 152
 Pyramide 43
 Volumen 44, 51
 PYTHAGORAS 33
 Erweiterung für ähnliche
 Figuren 36
 Länge n -dimensionaler
 Vektoren 58
 Umkehrung 34
 Verallgemeinerung
 (Kosinussatz) 34, 62
 Quader 41
 Quadrat 14, 19
 Quadrik 122, 129, 131
RAD , rad 64
 Radiant 63, 64
 Radlinie 112
 Raum-Zeit-Kontinuum 15
 Raute 14, 19
Rec 77
 Rechteck 14, 19
 Flächeninhalt 25, 26
 Verformung 10
 rechtwinklige Koord. 73
 rechtwinkliges Dreieck 11,
 162
 regelmäßiges Polyeder 53
 regelmäßiges Vieleck 14
 reguläres Polyeder 53
 reguläres Vieleck 14
 Relativitätstheorie 15
 Rhombus 14
 Richtung und Orientierung
 56, 60
 Richtungs-
 vektor 60, 106, 122
 Richtungskosinus 95
 Rohrkörper 47
 Rotation einer Strecke 124
 Rotations-
 fläche 44, 45, 124, 129
 hyperboloid 124, 125
 körper 44, 45, 48, 128
 paraboloid 128
R→P 76, 78
 S-PLUS 55
 Scheitel 120, 121
 Scheitelgleichung 121
 schiefe
 Axonometrie 148, 157
 Parallelprojektion 148
 schiefwinklige Koord. 73
 Schiff-Hafen-Leuchtturm-
 Kirche-Problem 40, 164
 Schleppkurve 113
 Schnitt
 allgemein 143
 Ebene/Ebene 141, 150
 Ebene/Ebene/Ebene 130
 Ebene/Gerade 142, 150
 Gerade/Ebene 142, 150
 Gerade/Gerade 141
 Gerade/Kugel 144
 Schraubfläche 47, 126
 Schraubkörper 47
 Schraublinie 47, 108
 Schraubung 47
 Schwerpunkt 162
 Dreieck 12
 Halbkreis 49
 Vieleck 31
 SciLab 55

- Sechspunktekreis 11
 Seelenradius 45
 Seemeile und Meter 84
 Sehne 37
 Sehnenviereck 37
 Seitenhalbierende 12
 Sekunde 63, 64
 Semiperimeter 29
 sexagesimale Unterteilung
 63, 64
 Skalarprodukt 58
 sm 84
 Spatprodukt 88
 spezielle Lage 151, 152
sph2cart 79
 sphärischer Abstand 66, 83
 sphärischer Exzess 15
 Spiegelung 17, 99
 spitzwinkliges Dreieck 11
 Spur 150, 152, 154
 SsW und sSW 35
 Standlinie 29
 Stauchung 100
 sternförmig 12, 14, 52
 Sternpunkt 12, 14
 Strahl 106
 Strahlensätze 20–22
 Strecke 106
 Streckung 100
 stumpfwinkliges Dreieck 11,
 162
 Summe der Innenwinkel 13
 Tangentenvektor 109
 tangentielle Komponente
 112
 Tangentialebene 135
 Tetraeder 53
 THALES 37
 Torus 45, 124
 Traktrix 113
 Transformation, lineare 39
 Translationsfläche 46, 125
 Translationskörper 46
 Transponieren 55
 Trapez 14
 Flächeninhalt 27
 Höhe 27
 Trapez- und
 Dreiecksverfahren 29
 Trimetrie 148, 159, 161
 überschlagen 14
 Umfang
 Ellipse 114
 Fläche 24
 Kreis 25, 114
 Vieleck 24
 Umfangswinkel 37
 Umklappung 151, 155
 Umkreismittelpunkt 12, 162
 Umlaufsinn 17
 Vektor 54
 freier 54
 geometrischer 54
 Länge 58, 62
 EUKLIDISCHE 65
 Rechenregeln 61
 normierter 60
 Rechenregeln 60
 Verknüpfungsregeln 61
 -produkt 88, 90, 91
 -raum 61
 EUKLIDISCHER 65
 Veranschaulichung
 Diagonalmatrix 100
 Matrix 100
 Matrizenmultiplikation
 102
 orthogonale Matrix 99
 Verschiebung 17
 verschränkt 14
 Vieleck 11, 14
 Flächeninhalt 29, 30
 konvex 12, 14
 mit Selbstüberschneidung
 14
 regelmäßiges 14
 reguläres 14
 Schwerpunkt 31
 sternförmig 12, 14
 Umfang 24
 Vielflächner 52
 Viereck 10, 14, 19, 37
 zu vier Seitenlängen und
 einem Innenwinkel
 11
 Viertelebene 123
 Vogelperspektive 157, 158
 Volumen 40
 Berechnung mittels
 Schnittflächen 49, 50
 Ellipsoid 51, 128
 Fass 51
 Hyperboloid 51
 Kegel 44, 51
 Kugel 48, 51
 Paraboloid 51
 Parallelspat 89
 parametrisierter Körper
 126
 Polyeder 52
 Prisma 42, 51
 Prismatoid, Prismoid 51
 Pyramide 44, 51
 Quader 41
 Rohrkörper 47
 Rotationskörper 45, 48
 Torus 45
 Translationskörper 46
 Zylinder 42, 46, 51
 wahre Gestalt 155
 wahre Länge 150, 155
 wahrer Winkel 150, 155
 windschief 124, 136, 137
 Winkel, Orientierung 75, 86
 Winkel zwischen Vektoren
 62, 63, 86, 88
 Winkeleinheiten 63
 Winkelhalbierende 12, 13
 Winkelsumme 13
 Würfel als platonischer
 Körper 53
 Wulstradius 45
 Zeichenebene 150
 Zenit 112
 Zenitdistanz 80, 144
 Zentralprojektion 146, 148,
 149
 Zentriwinkel 37
zeros 60
 Zweitafelprojektion 146,
 153
 zweitprojizierend 154
 Zykloide 112
 Zylinder 41, 124, 131
 Parameterdarstellung
 123, 125
 Volumen 42, 46, 51
 Zylinderkoordinaten 78