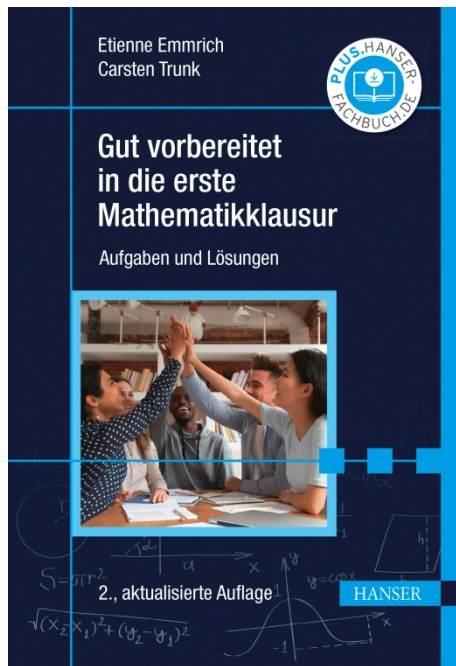


HANSER



Leseprobe

zu

„Gut vorbereitet in die erste Mathematiklausur“

von Etienne Emmrich und Carsten Trunk

Print-ISBN: 978-3-446-46461-2

E-Book-ISBN: 978-3-446-46615-9

Weitere Informationen und Bestellungen unter
<http://www.hanser-fachbuch.de/978-3-446-46461-2>

sowie im Buchhandel

© Carl Hanser Verlag, München

Vorwort zur zweiten Auflage

Für die zweite Auflage haben wir Fehler korrigiert und einige Aktualisierungen vorgenommen. Wir danken den Leserinnen und Lesern, die uns auf Fehler aufmerksam gemacht haben. Ferner gilt unser Dank Herrn Frank Katzenmayer vom Carl Hanser Verlag für die hervorragende Zusammenarbeit bei der Umsetzung dieser Auflage. Über Zuschriften freuen wir uns bereits (emmrich@math.tu-berlin.de oder carsten.trunk@tu-ilmenau.de).

Berlin und Ilmenau, im April 2020 Etienne Emmrich und Carsten Trunk

Vorwort

Viele Studentinnen und Studenten nichtmathematischer Fächer scheitern. Nicht etwa, weil sie Prüfungen ihres Faches nicht bestehen. Sie scheitern an Klausuren und Wiederholungsprüfungen zur Mathematik des ersten Semesters. Durchfallquoten von 60 Prozent und mehr sind bei Ingenieurstudentinnen und -studenten die Regel.

Die Ursachen dafür sind vielfältig: Überlastete Hochschulen und schlechte Studienbedingungen, überholte Lehrformen, die auf Passivität der Studierenden setzen, fehlendes mathematisches Grundverständnis (man vergleiche die PISA- und TIMSS-Studien der letzten Jahre), mangelndes Engagement (von Studierenden und Lehrenden gleichermaßen), Prüfungsstress und -angst, mangelnde Kenntnis über das Wie des Lernens usw.

Diese Ursachen können die Autoren nur unwesentlich beeinflussen. Mit dem vorliegenden Buch aber soll ein Beitrag geleistet werden, wie Sie, liebe Leserin, lieber Leser, sich unter den gegebenen Bedingungen doch behaupten können.

Das Konzept ist einfach: In jedem der nummerierten Abschnitte finden Sie klausurrelevante Aufgaben. Das sind Aufgaben, die so oder so ähnlich

in Klausuren zur Höheren Mathematik I oder Analysis I gestellt wurden. Sie finden dann ausführliche und möglichst einfach formulierte Lösungen, mit denen das entsprechende Thema zugleich wiederholt wird. Zur Einstimmung beginnt (fast) jeder Abschnitt mit einer leichten, vorbereitenden Aufgabe. Mit einer Zusammenfassung der wesentlichen mathematischen Zusammenhänge und Verfahren schließt jeder Abschnitt. Die Zusammenfassungen fließen ein in eine kurze und handliche Übersicht: die Analysis des ersten Semesters auf einem A4-Blatt. An manchen Hochschulen ist es erlaubt, einen solchen „Spickzettel“ mit zur Klausur zu nehmen. Sie finden diesen zum Heraustrennen noch einmal auf den letzten Buchseiten.

Dieses Vorgehen entspricht in natürlicher Weise dem menschlichen Lernen: Ausgehend von einer gestellten Aufgabe wird das für die Lösung Erforderliche zusammengetragen, um es danach zu systematisieren. Mit dem so erarbeiteten Wissen lassen sich dann alle ähnlichen Aufgaben lösen. – Der Weg der Erkenntnis beginnt mit der Problemstellung.

Die Auswahl der Aufgaben wurde dabei so getroffen, dass die relevanten Fragestellungen der Erstsemesterklausuren abgedeckt sind, zugleich aber zeitraubende Wiederholungen durch viele gleichartige Aufgaben vermieden werden. Dadurch konnte der Text in einem angemessenen Umfang gehalten werden, und es lohnt sich ein konzentriertes Durchdringen einer jeden Aufgabe, um sich für die diversen Varianten von Aufgaben zum gleichen Sachverhalt zu wappnen.

Die in diesem Buch enthaltenen Aufgaben lassen sich in zwei Kategorien einteilen, die optisch leicht zu erkennen sind:

Mit einem linken Balken sind einführende und leichtere Aufgaben gekennzeichnet.

Klausurrelevante Aufgaben sind mit zwei linken Balken gekennzeichnet. Das sind Aufgaben, die so oder so ähnlich bereits in Klausuren gestellt worden sind.

Die Autoren haben gelernt, dass es Aufgaben gibt, die die Studierenden eher verwirren oder etwas „tricky“ sind. Deshalb sind einige davon nebst Lösungen extra in einem Abschnitt zusammengefasst. Schließlich finden Sie in den letzten Abschnitten drei Beispielklausuren mit Lösungen.

Den mathematischen Abschnitten sind zwei Abschnitte mit praktischen und psychologisch fundierten Hinweisen zur Prüfungsvorbereitung und zum Umgang mit Prüfungsangst vorangestellt.

Das Buch deckt den Stoff ab, wie er zum Beispiel an der TU Berlin in

der Vorlesung *Analysis I für Ingenieure* gelehrt wird, insbesondere also die Differential- und Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen. Es enthält daneben auch Aufgaben zu den Grundlagen der Linearen Algebra und Analytischen Geometrie, denn andernorts heißt die Veranstaltung womöglich *Höhere Mathematik I* und schließt solche Grundlagen mit ein. Dafür fällt dort vielleicht das eine oder andere analytische Thema weg.

Eines kann das vorliegende Buch nicht: Ihnen die Mühe abnehmen, sich intensiv auf die Prüfung vorzubereiten. Nehmen Sie sich Zeit und versuchen Sie, die Aufgaben selbst zu lösen. Geben Sie nicht gleich auf, wenn es nicht sofort gelingt. Lesen Sie die Lösungsvorschläge, machen Sie sich eigene Notizen. Das Buch ist klein und handlich. Sie können es also überallhin mitnehmen.

Wozu ist das Buch nicht geeignet? Es ist nicht dazu geeignet, Schulstoff zu wiederholen. Hierfür empfehlen wir das sehr einfühlsam und leicht geschriebene, mit zahlreichen Cartoons geschmückte Buch von Küstenmacher et al. [27] und den zugehörigen Analysisband von Partoll und Wagner [37]. Ebenso kann Knorrenschild [25] und die ausführliche Darstellung in Kemnitz [24] empfohlen werden. Das vorliegende Buch ist nicht unbedingt zur erstmaligen Beschäftigung mit den Themen gedacht, also zur Erstvermittlung und zum Aufbau des Verständnisses. Dafür empfehlen wir die Lehrbücher Bärwolff [4], Papula [35], Meyberg und Vachenaer [33] sowie zur Linearen Algebra Scherfner und Senkbeil [41]. Weitere Titel sind im Literaturverzeichnis zu finden.

Beim Schreiben des Buches hatten die Autoren vornehmlich Studentinnen und Studenten der Ingenieurwissenschaften vor Augen. Gleichmaßen aber kann das Buch Studierenden der Wirtschaftswissenschaften, Biologie, Chemie und Informatik von Nutzen sein. Es wendet sich an Studierende von Universitäten, ist aber durchaus auch für Studierende anderer Einrichtungen geeignet.

Den Autoren bleibt nur, Ihnen, liebe Leserin, lieber Leser, viel Erfolg und zumindest gelegentlich auch Freude bei der Beschäftigung mit Mathematik zu wünschen.

Für die Durchsicht des Manuskripts und zahlreiche Anregungen zur Verbesserung des Textes sind die Autoren Herrn Prof. Dr. Rolf D. Grigorieff zu großem Dank verpflichtet. Weiterer Dank geht an Frau Dr. Birgit Hoppe und Herrn Wolf Künne (allesamt Berlin), die den Autoren mit vielen Hinweisen und Vorschlägen bei der Abfassung der Abschnitte zur Prüfungsvorbereitung und zum Umgang mit Prüfungsangst dienten. Schließlich ist

Frau Christine Fritzsch vom Fachbuchverlag Leipzig für die außerordentlich gute Zusammenarbeit bei der Umsetzung dieses Buchprojekts zu danken.

Für etwaige Fehler jedoch zeichnen allein die Autoren verantwortlich und sind für jeden diesbezüglichen Hinweis (emmrich@math.tu-berlin.de oder trunk@math.tu-berlin.de) schon jetzt dankbar.

Berlin, im April 2007

Etienne Emmrich und Carsten Trunk

Inhaltsverzeichnis

Prüfungsvorbereitung und Lernen	11
Prüfungsangst	21
Alles auf einem Blatt	35
1 Grenzwerte	38
2 Reihen und Potenzreihen	53
3 Komplexe Zahlen	65
4 Eigenschaften von Funktionen	78
5 Differentiation und Extremwerte	92
6 Taylorpolynom und Restgliedabschätzung	102
7 Integration, partielle Integration und Substitutionsregel	110
8 Partialbruchzerlegung und Integration rationaler Funktionen	117
9 Uneigentliche Integrale	129
10 Fourierreihen	138
11 Vollständige Induktion	149
12 Lineare Gleichungssysteme, Rang und Determinante	155
13 Lineare Abbildungen, Basen und Eigenwerte	170
14 Analytische Geometrie	182
Achtung! – Fallen und trickreiche Aufgaben	191
Erste Beispielklausur	207
Zweite Beispielklausur	215
Dritte Beispielklausur	225
Literaturverzeichnis	234
Symbolverzeichnis	237
Sachwortverzeichnis	238

Prüfungsvorbereitung und Lernen

Viele Prüferinnen und Prüfer, auch die Autoren, haben oft beobachtet, dass Studierende trotz großer Anstrengungen nur schlechte Ergebnisse erzielen konnten. Ursächlich dafür ist zumeist ein „falsches“ Lernverhalten. Unterschätzen Sie deshalb nicht die Bedeutung des Wissens um adäquate Vorbereitung und adäquates Lernen. Wenngleich sich die Vorbereitung bei jedem anders gestalten mag, so gibt es doch einige allgemein gültige Regeln, die Sie, liebe Leserin, lieber Leser, beherzigen sollten. In diesem Abschnitt werden wir Sie mit diesen vertraut machen und Ihnen Hinweise für eine effektive Vorbereitung auf die Klausur geben.

Verstehen Sie unsere Hinweise gleichwohl als eine Anregung, denn Sie kommen nicht umhin, Ihren eigenen Weg zu finden. Es sollte dabei im Vordergrund stehen, die individuellen Lernstrategien und -konzepte zu erkennen, zu bewerten, gegebenenfalls zu korrigieren und um neue zu erweitern. So können Sie den Prozess der Vorbereitung und des Lernens bewusst und nach Ihren individuellen Bedürfnissen gestalten.

Ergänzend zu diesem Abschnitt empfehlen wir Ihnen die Lektüre des nachfolgenden Abschnitts zum Umgang mit Prüfungsangst. Die dort vorgestellten Entspannungstechniken sowie die Methoden des inneren Dialogs und der positiven Selbstgespräche und Imaginationen können Sie zur Unterstützung des Lernprozesses anwenden, unabhängig davon, ob Sie unter Prüfungsangst leiden oder nicht. Tipps zum Verhalten während der Klausur finden Sie auf Seite 31.

Wer mehr zum Thema Lernen wissen möchte, findet einen Markt zahlreicher populärwissenschaftlicher und Fachbücher. Unter diesen können wir Metzsig und Schuster [31] sowie den Ratgeber [17] empfehlen.

Klausurvorbereitung

Die Vorbereitung auf eine Klausur zeichnet sich insbesondere dadurch aus, dass in einer zumeist recht kurzen Zeit eine große Fülle an Stoff zu bewältigen ist. Oft wird es das Ziel der Vorbereitung sein, die bevorstehende Klausur mit einer angemessenen Note zu bestehen. Im günstigen Fall geht dieses Ziel mit einem authentischen Interesse am Wissensgegenstand einher. – Es

ist wichtig, dass Sie sich Ihrer *Motivation* bewusst sind. Sie werden letztlich nur dann erfolgreich und nachhaltig lernen, wenn Sie ein authentisches, eigenes Interesse daran haben, Ihr Wissen und Können zu mehren.

Prüfungsvorbereitung ist eine anstrengende, schwere Tätigkeit. Sie sollten deshalb alles unternehmen, was Ihnen diese Arbeit so angenehm wie möglich macht. Berücksichtigen Sie dabei Ihre Bedürfnisse und Gewohnheiten. Das fängt bei wohl geplanten *Pausen und Unterbrechungen* an, geht über eine Ihnen angenehme Gestaltung des Arbeitsplatzes bis hin zu gutem Essen und ausreichendem Schlaf. Langschläfer sollten sich nicht plötzlich in Frühaufsteher verwandeln, denn das Missachten der *inneren Uhr* führt nur zu mehr Stress.

Beachten Sie auch, dass es verschiedene Lerntypen gibt: Manch einer etwa braucht absolute Ruhe zum Lernen, ein anderer wiederum lernt am besten im Gehen oder bei Musik. Die Lernforschung zeigt allerdings, dass sich größere Erfolge einstellen, wenn Sie stets am gleichen Ort zur gleichen Zeit lernen.

Für die Zeit der Vorbereitung hat sich ein *schriftlicher Vertrag* mit sich selbst bewährt: Regeln Sie darin genau, welche (realistischen!) Ziele Sie erreichen wollen und wie Sie sich darauf vorbereiten wollen. Machen Sie einen *Zeitplan*. Rufen Sie sich den Vertrag immer wieder in Erinnerung.

Falls Sie Unlust, Trägheit, gar Faulheit an sich bemerken sollten, so versuchen Sie zu ergründen, warum Sie sich der Vorbereitung verweigern wollen. Es nutzt nichts, sich übermäßig zu zwingen; Klärung geht stets vor. Machen Sie lieber eine Erholungspause, vielleicht einen Spaziergang, Sport oder auch einen Besuch bei Bekannten. Dann aber sollten Sie sich an Ihren eigenen Vertrag erinnern und daran, dass Verträge einzuhalten sind.

Ein solcher Vertrag mit *Zeitplan* hat auch den Vorteil, dass das „Großereignis“ Klausur nicht mehr wie ein unüberwindbares Hindernis vor einem schwebt, sondern vielmehr ein Weg geebnet wird, bestehend aus kleinen Schritten mit Teilzielen und Erfolgserlebnissen.

Die Klausurvorbereitung beginnt damit, sich *Klarheit über die Anforderungen und den eigenen Kenntnisstand* zu verschaffen. Besorgen Sie sich dafür zunächst alle Informationen, die Sie bekommen können. Besorgen Sie sich alte Klausuren, fragen Sie nach, welche Themen aus der Vorlesung klausurrelevant sind und welche nicht, fragen Sie nach Schwerpunkten für die Klausur, besorgen Sie sich geeignete Literatur zum Nachschlagen, sprechen Sie mit Kommilitonen, die die Klausur schon geschrieben haben.

Alte Klausuren sind für die Vorbereitung von besonderer Bedeutung. Anhand dieser können Sie am besten erkennen, von welchem Typ und Schwierigkeitsgrad die Klausuraufgaben sein werden und welche Themen relevant sind. Prüferinnen und Prüfer orientieren sich in aller Regel an den Klausuren der Vorjahre. Können Sie diese bearbeiten, so werden Sie auch die bevorstehende Klausur erfolgreich schreiben. Alte Klausuren erhalten Sie bei den Fachschafts- und Studierendenräten und oft über die Webseite des Fachbereichs oder Instituts für Mathematik. Sie können aber auch die Sprechstunde der Prüferin oder des Prüfers oder der Assistentinnen und Assistenten aufsuchen und diese fragen.

Auch die *Analyse bisheriger* positiver und negativer *Erfahrungen* mit Prüfungen und Arbeitstechniken gehört zur Vorbereitung. Überlegen Sie sich dabei, was Sie an alten Erfahrungen und Vorgehensweisen übernehmen wollen und was Sie dieses Mal anders gestalten wollen.

Überprüfen Sie nun Ihren Kenntnisstand, indem Sie etwa eine der alten Klausuren oder eine der Beispielklausuren aus diesem Buch bearbeiten. Es ist nicht weiter schlimm, wenn Ihnen dies noch nicht so gut gelingt, denn Sie stehen ja am Anfang der Vorbereitung. Sie können jetzt entscheiden, welche Stoffgebiete Sie im Rahmen der Vorbereitung zu lernen haben und welche Ziele Sie sich setzen wollen. Bedenken Sie dabei, sich erreichbare Ziele zu setzen. Neigen Sie dazu, Rückschläge und Enttäuschungen nur schwer zu ertragen, so setzen Sie sich eher niedrigere Ziele.

Ausgehend vom Stoffumfang, von Ihrem Kenntnisstand und äußeren Umständen, etwa dem Klausurtermin, müssen Sie sich entscheiden, wie viel Zeit Sie für die Vorbereitung aufwenden. Leserinnen und Lesern, die während des Semesters die Vorlesungen und Übungen besucht sowie Hausaufgaben bearbeitet haben, empfehlen wir, eine Woche für die Vorbereitung einzuplanen. Studierende, für die weite Teile des Stoffes noch unbekannt sind, sollten mindestens eine weitere Woche zur Verfügung haben. Günstig für den Lernerfolg und Ihr eigenes Wohlbefinden ist es, wenn Sie vor der Klausur etwa einen Tag Zeit zum Ausruhen und Erholen haben.

Damit sind wir bei einem wichtigen Teil der Vorbereitung, dem Entwurf eines *Zeitplans*, der Bestandteil Ihres schriftlichen Vertrages sein sollte. In Ihrem individuellen Zeitplan sollten Sie für jeden Tag Ihrer Vorbereitung den genauen Ablauf und die Teilziele festlegen, die Sie erreichen wollen.

Planen Sie vor allem Ruhepausen und Pufferzeiten ein. Berücksichtigen Sie dabei Ihre eigene Leistungsfähigkeit. Sie sollten deshalb ein Gefühl für Zeit entwickeln und Ihr Verhalten beobachten. Machen Sie sich Ablenkungen

bewusst und legen Sie dann lieber eine Pause ein. Übrigens: Die Forschung hat gezeigt, dass viele kleine Pausen sinnvoller sind als ein oder zwei große Pausen. Etwa alle halbe Stunde sollten Sie einige Minuten Pause machen, nach zwei Stunden sollten Sie 15 bis 20 Minuten Pause machen und nach weiteren zwei Stunden sollte eine lange Pause folgen. Am besten, Sie verlassen während der Pause Ihre Lernumgebung und gehen ganz anderen Dingen nach. Näheres finden Sie in [31].

Ferner sollten Sie *Phasen des Zusammentragens und Systematisierens* vorsehen. Diese empfehlen sich, nachdem Sie einen Stoffabschnitt, etwa einen Abschnitt dieses Buches, beendet haben oder zum Abschluss eines jeden Arbeitstages sowie zum Ende der Vorbereitung. Schließlich sollten Sie noch eine Schlussphase einplanen, in der Sie insbesondere Gelegenheit haben, sich selbst zu überprüfen.

Ein derartiger Zeitplan hat nun die Prüfungsvorbereitung in kleine, überschaubare und vor allem überprüfbare Abschnitte zerlegt. Nach all diesen Vorbereitungen können Sie jetzt, Ihrem Zeitplan folgend, zum Beispiel mit dem Durcharbeiten der einzelnen Abschnitte dieses Buches, mit dem Lösen von Aufgaben und dem eigentlichen Lernen beginnen. Näheres hierzu finden Sie weiter unten in den beiden nachfolgenden Teilabschnitten.

Wie bereits erwähnt, sollten Sie zwischendurch und zum Schluss der Vorbereitung Ihr Wissen zusammentragen und systematisieren. Das geschieht am besten durch *Schreiben und Erzählen*. Stellen Sie sich dabei vor, Sie würden einem anderen, der die Vorlesung nicht besucht hat, Materialien zum Lernen und Erarbeiten des Stoffes geben oder diesen präzise erklären wollen. Ihre Aufzeichnungen oder mündlichen Darstellungen sollten also aus sich heraus verständlich und vollständig sein. Sie werden merken, es ist gar nicht so leicht, für andere zu schreiben und etwas zu erklären. Ferner werden Sie feststellen, wie verschiedene Themen ineinander greifen und welche Analogien es gibt.

Systematisierung verlangt, sich von einer konkreten Aufgabe wieder zu lösen. Manch einer fragt sich, wozu dies gut sei, da doch nur Aufgaben zu rechnen sind. Jedoch eröffnet Ihnen erst die Systematisierung, das Erkennen von Zusammenhängen und Analogien die Möglichkeit, sich auch komplexen, unvorhergesehenen oder anderslautenden Aufgabenstellungen erfolgreich zu stellen. Im vorliegenden Buch finden Sie zum Beispiel auf den Seiten 191 ff. Aufgaben, die erfahrungsgemäß größere Schwierigkeiten bereiten. Versuchen Sie sich einmal an diesen!

Des Weiteren ist es wichtig, dass Sie Ihre *Lernfortschritte überprüfen*. Das

können Sie zum Beispiel, indem Sie sich selbst oder gemeinsam in einer Lerngruppe befragen. Nutzen Sie ruhig auch die Sprechstunden der Prüferin oder des Prüfers, der Assistentinnen und Assistenten und der Tutorinnen und Tutoren. Bewährt haben sich Rollenspiele, in denen Sie mal Prüferin oder Prüfer, mal Prüfungskandidatin oder Prüfungskandidat sind. Durch die vertauschten Rollen eröffnen sich oft neue Einsichten und zugleich erlernen Sie in einem Rollenspiel ein der Prüfungssituation angemessenes Verhalten. Die Zeiten, zu denen Sie Ihre Lernfortschritte überprüfen wollen, sollten Sie ruhig in Ihrem Zeitplan festhalten.

Außerdem sollten Sie zum Schluss der Vorbereitung eine oder zwei *Klausuren* unter realistischen Bedingungen *simulieren*. Dafür stehen Ihnen in diesem Buch drei Beispielklausuren zur Verfügung. Halten Sie die an Ihrer Hochschule vorgegebene Zeit ein und verwenden Sie nur zugelassene Hilfsmittel, etwa den „Spickzettel“ auf den Seiten 36 und 37.

Schließlich sollten Sie noch einmal die alten Klausuren, Ihre Vorlesungsmitschrift, das Skript und dieses Buch in die Hand nehmen, um darin zu blättern und zu lesen. Dabei geht es weniger um eine zielgerichtete Aneignung von Stoff, sondern vielmehr um ein Verankern des Wissens und ein Erinnern an die einzelnen Lernschritte.

Den Abschluss der Vorbereitung bildet am besten ein Tag *Erholung*, an dem Sie sich für Ihre Arbeit belohnen können.

Wie verläuft der Lernprozess?

Stellen Sie sich Lernen als eine große Wanderung vor, deren erklärtes Ziel es ist, die Landschaft in einer gewissen Zeit möglichst genau zu erkunden. Der Weg ist nicht fest vorgegeben, jeder wird einen etwas anderen Weg wählen, wengleich doch alle sich an den großen Trampelpfad orientieren werden. Hier und da bleibt man stehen, um sich das eine oder andere etwas genauer anzusehen. Aufmerksames Beobachten und die Einteilung der eigenen Kräfte sind vonnöten. Um sich die Landschaft einzuprägen, wird man die Wanderung wiederholen müssen. Auch nach vielen, unzähligen Wanderungen lässt sich immer noch etwas Neues entdecken.

Bei der ersten Wanderung werden Sie sich sicherlich erst einmal einen Überblick verschaffen und vielleicht etwas staunend an der einen oder anderen Stelle verharren. Bei der zweiten und dritten Wanderung wissen Sie dann schon genauer, was Sie erkunden wollen. Dann wird es eine Zeit geben, in der Sie nur ganz gezielt wandern, sich nur ganz bestimmte Dinge ansehen wollen. Doch hierbei sollten Sie es nicht belassen.

Sie werden bemerken, dass Sie früher oder später zum eher ziellosen Stöbern neigen, um mehr durch Zufall das eine oder andere Neue oder auch schon Bekannte zu entdecken. Das ist der optimale Zeitpunkt, sich einer Prüfung zu stellen.

Was sollen Sie aus diesem Bild mitnehmen? – Versuchen Sie nicht, Stück um Stück zu lernen. Der *Lernprozess verläuft nicht linear und nicht hierarchisch*. Nehmen Sie sich größere Wissensabschnitte vor und akzeptieren Sie, dass Sie nicht sofort alles verstehen. Kehren Sie dann später zurück. Sie werden mit anderen Augen, gewissermaßen von einer höheren Stufe aus, einen anderen Blick auf diesen Wissensabschnitt haben. Erst dieser neue Blick wird es Ihnen ermöglichen, im Lernen fortzufahren.

Zunächst also legen Sie eine grobe Schicht mit großen Löchern, dann eine zweite, schon feinere, und immer so weiter. Wie bei einem Looping kehren Sie dabei zu ein und demselben Gegenstand wieder zurück und durchdringen diesen zunehmend tiefer. Beim Lernen und Verstehen geht es eben nicht um ein „Alles oder Nichts“ und auch nicht um ein „Jetzt oder Nie“.

Diese Vorstellung vom Lernen passt auch zu unserem folgenden Tipp: Haben Sie *Mut zur Lücke*. Wenn Sie sich einen guten Überblick verschafft haben, so können Sie auch entscheiden, was Sie für Ihre Zwecke (zum Beispiel zum Bestehen der Klausur) nicht benötigen oder was Ihnen derzeit zu viel wird. Es ist auch nicht schlimm, etwas zu vergessen. Bedenken Sie dabei aber, dass es Wissen gibt, welches die Grundlage für Weiteres bildet. Hier wäre eine Lücke unangebracht.

Akzeptieren Sie auch Fehlschläge und Fehler. Stellen Sie sich einmal einen Lernprozess ohne Fehler vor; wie langweilig wäre doch dieser. Erst das Scheitern schafft die für die erneute Beschäftigung mit dem zu lernenden Gegenstand nötige Motivation.

Lernen ist ein mühsamer Prozess. Sicher haben auch Sie schon einmal bemerkt, dass Lernen leichter fällt, sind erst einmal die ersten Hürden genommen. Dann heißt es oft: „Ach, das ist ja eigentlich doch ganz einfach.“ Erinnern Sie sich? Bevor Sie diesen Satz gesagt haben, haben Sie vielleicht auch einmal gedacht: „Das ist zu kompliziert, das verstehe ich nie.“ Für einen Lernprozess ist es ganz typisch, dass er am Anfang langsam vorangeht. Verzweifeln Sie also nicht, wenn Sie am Anfang nicht so vorankommen, wie Sie es sich vielleicht wünschen würden.

Vereinfacht gesagt, ist Lernen das Abspeichern von Wissen im Gedächtnis. Dabei kann nach dem gängigen Dreispeichermodell zwischen dem sensorischen, dem Kurzzeit- und dem Langzeitgedächtnis unterschieden werden.

Informationen (Sinneseindrücke) werden zunächst für sehr kurze Zeit in dem recht großen sensorischen Gedächtnis gespeichert. Dann geht die Information für höchstens wenige Minuten in das Kurzzeit- oder auch Arbeitsgedächtnis über, welches von nur geringer Kapazität ist.

Beim Lernen ist es erforderlich, Informationen aus dem Kurzzeit- in das Langzeitgedächtnis, welches von enormer Kapazität ist, zu verlagern. Die Informationen werden dabei unter anderem reduziert oder auch erweitert, es werden Analogien beobachtet, Zusammenhänge entdeckt und verinnerlicht, Verknüpfungen und Assoziationen hergestellt, Lerngegenstände strukturiert und vieles mehr.

Bei dem Übergang der Informationen aus dem Kurzzeit- in das Langzeitgedächtnis kommt es insbesondere darauf an, dass die Informationen später auch wieder auffindbar sind. Günstig hierfür ist der Aufbau einer *multiplen Repräsentation*, bei der das zu Speichernde sowohl verschieden dargestellt (bildhaft, handlungsorientiert, symbolisch oder sprachlich) als auch mit verschiedenen Labels versehen wird, die es später erlauben, nach verschiedenen Kriterien zu suchen.

Deshalb bleibt uns Wissen länger auffindbar im Gedächtnis, wenn es mit verschiedenen Sinnen (Farben, Musik, Gerüche, ...) aufgenommen und mit anderen Dingen verknüpft wird. Dabei ist es nicht wichtig, dass es einen sachlichen oder logischen Zusammenhang zwischen den Dingen gibt. Vielmehr geht es gewissermaßen um „individuelle Erinnerungsmarken“.

Diese *Verknüpfungen* erlauben unter anderem auch das schon beschriebene Auffinden von Informationen nach verschiedenen Ordnungsmerkmalen.

Ein Beispiel: Gehen Sie gedanklich so genau wie möglich Ihren täglichen Weg zur Universität und überlegen Sie, welche Stationen (Bäcker, Haltestelle, Coffee-Shop, ...) Sie dabei zurücklegen und was Sie bei diesen sehen, hören, riechen usf. Jetzt verknüpfen Sie jede dieser Stationen mit einem Sachverhalt, den Sie lernen müssen. Denken Sie sich einfach eine (verrückte) Geschichte aus, etwa so: „Auf dem Weg zur Uni komme ich am Bäcker vorbei, in dem die Regel von l'Hospital in der Auslage liegt. Wenn man nach einem Stück Streuselkuchen fragt, so verlangt die Verkäuferin immer erst nach dem Grenzwert eines Bruches. Der Streuselkuchen ist dann in Ableitungen von Zähler und Nenner eingewickelt. ...“ Indem Sie gedanklich Ihren Weg zur Universität gehen, erinnern Sie zugleich die verknüpften Sachverhalte. Weitere Lerntechniken finden Sie in [31].

Die Funktionsweise des Gedächtnisses legt es nahe, Informationen in ähnlicher Art, Struktur und Situation aufzunehmen, in der sie später auch

abgerufen werden sollen. Sollen in einer Klausur also Aufgaben gelöst werden, so muss das Aufgabenlösen auch den Lernprozess bestimmen.

Es hat sich ferner gezeigt, dass sich *Abwechslung* positiv auf das Lernen auswirkt. Sollen (inhaltlich oder von der Form her) ähnliche Lerngegenstände nacheinander angeeignet werden, so kann die proaktive bzw. reaktive Hemmung dazu führen, dass zuvor bzw. später Gelerntes das zu Lernende aufhebt. Wir empfehlen Ihnen daher, von Zeit zu Zeit Thema und Aufgabentyp zu wechseln. Bearbeiten Sie einmal Aufgaben, die Sie schon recht gut beherrschen, und wechseln Sie dann zu Aufgaben, die noch eine deutliche Herausforderung für Sie bedeuten. Sie verschaffen sich so auch Erfolge, ohne die es beim Lernen nicht geht.

Das Abspeichern im Langzeitgedächtnis wird auch durch Emotionen beeinflusst. So kann es geschehen, dass das mühsam Erlernte wieder verlorengeht, wenn Sie sich nach dem Lernen über etwas zu sehr aufregen.

Für das Lernen wird Wiederholung oft als sehr bedeutsam angesehen. Leider ist es nur sehr bedingt richtig und gelegentlich sogar falsch, dass Wiederholung das Mittel der Wahl zur Festigung von Wissen sei. In der Literatur sind dafür überzeugende Beispiele bekannt: So waren in Experimenten zum assoziativen Lernen Blockierungseffekte festzustellen, wenn ein Stimulus keine neue Information brachte. Bekannt ist auch das Beispiel eines Professors, der ein Morgengebet über 25 Jahre lang öfter als jeden zweiten Tag laut vorlas und es dennoch nicht auswendig aufsagen konnte (vgl. [31]).

Nur wenn Sie bei der Wiederholung (einer Aufgabe, einer Lösung, des Lesens eines Absatzes etc.) einen neuen Aspekt und aktives Tun (zum Beispiel Schreiben in eigenen Worten) einbringen, wird dies den Lernerfolg steigern können. Beachten Sie, dass das wiederholte Bearbeiten gleichartiger Aufgaben lediglich dazu führt, sich in Fertigkeiten wie Termumformungen zu verbessern, Rechnungen schneller erledigen zu können usf.

Zur Festigung von Wissen und zum Ausbilden von Problemlösefähigkeiten ist aber vor allem die *eigene Prüfung* geeignet, sodass wir Ihnen empfehlen, Ihre Lernfortschritte selbst oder gegenseitig zu überprüfen und sich stets neuen Problemen zu stellen.

Das Lösen von Aufgaben

Beim Lösen einer Aufgabe geht es darum, die Kluft zwischen einem durch Voraussetzungen und Annahmen explizite oder stillschweigend beschriebenen Istzustand und einem durch Behauptungen oder offene Fragen beschriebenen Zielzustand zu überwinden. Bloßes Erinnern von Faktenwissen

ist oft nicht ausreichend; vielmehr müssen das Wissen um die richtige Anwendung von Verfahren und Fertigkeiten wie etwa Termumformungen hinzutreten sowie Zusammenhänge und Analogien erkannt werden. Deshalb hilft in der Regel auch das Auswendiglernen eines Lösungsablaufs nicht, denn mathematische Aufgaben sind selten reine Routineaufgaben.

Das Lösen von Aufgaben erfolgt in *vier Phasen*, die jedoch ineinander greifen und gelegentlich einzeln oder allesamt zu wiederholen sind:

- Erfassen der Aufgabenstellung und der Anforderungen;
- Suchen und Anwenden geeigneter Verfahren und Operationen;
- Überprüfen der erzielten Ergebnisse und Abgleich mit der Aufgabe;
- Beschreiben und Darstellen von Lösungsweg und Ergebnissen.

Machen Sie sich diese Phasen bewusst; Sie werden bemerken, es erleichtert Ihnen das strukturierte Bearbeiten von Aufgaben.

Versuchen Sie stets, eine Aufgabe selbst zu lösen und geben Sie nicht vor schnell auf. Erst danach sollten Sie sich die angegebene Lösung durchlesen. Bedenken Sie, dass es zu einer Aufgabe verschiedene Lösungswege geben kann.

Um sich den Stoff anzueignen, reicht es aber nicht, sich die Lösung einfach nur durchzulesen. Eine gute Regel besagt, dass das Lernen mit einer feinmotorischen Bewegung einhergehen soll. Schreiben Sie also die Lösung selbst noch einmal auf, am besten aus dem Gedächtnis, und vergleichen Sie anschließend. Sie können sich so eine eigene Aufgabensammlung anlegen, in der Sie auch Notizen über besondere Schwierigkeiten oder Fehlerquellen festhalten.

Sie sollten die Lösungen dabei gut ausformulieren und nicht nur im Staccato-Stil Stichpunkte setzen. Durch das vollständige Ausformulieren in eigenen Worten gelangen Sie zu einem tieferen Verständnis und zu einer Festigung des zu lernenden Stoffes. Das liegt unter anderem daran, dass das menschliche Denken und Verstehen vornehmlich an Sprache und Begriffsbildung gebunden ist.

Eine typische, oft zu beobachtende Vermeidungsstrategie besteht übrigens darin, etwas Neues zu beginnen, bevor das Alte beendet ist. Bringen Sie eine einmal angefangene Aufgabe zu Ende, ehe Sie zur nächsten übergehen.

Zum Schluss sei darauf hingewiesen, dass gerade auch in der Mathematik *Irrwege* und vermeintlich falsche Lösungen von besonderer Bedeutung für

den Lernprozess sind. Dies mag Sie angesichts der Exaktheit und Strukturiertheit von Mathematik verwundern. Der Arbeitsalltag einer Mathematikerin oder eines Mathematikers besteht aber darin, Ideen für eine Problemlösung zu entwickeln – und wieder zu verwerfen. Konkret bedeutet dies, viel für den Papierkorb zu schreiben.

Wir empfehlen Ihnen, Irrwege und Lösungswege, die nicht zum Ziel führen, nicht etwa mit einem Tintenkiller auszulöschen. Heben Sie diese ruhig für eine Weile auf. Machen Sie sich bewusst, warum Sie diesen Weg eingeschlagen hatten und warum er nicht zum Ziel führte. Auch bei einer „richtigen“ und vollständigen Lösung sollten Sie sich stets fragen, warum der nächste Schritt so und nicht anders aussieht. Das Suchen und gegebenenfalls Verwerfen von Alternativen ist entscheidend für das Erlernen und ein tieferes Verständnis von Mathematik.

Sachwortverzeichnis

In der Regel sind nur jene Fundstellen aufgeführt, an denen der Begriff erstmalig erklärt wird. Sachwörter aus den beiden Abschnitten Prüfungsvorbereitung und Lernen sowie Prüfungsangst wurden nicht aufgenommen.

- Abbildung, lineare 170
- Ableitung 92
- Abstand *siehe* Ebene
- Argument einer komplexen Zahl 69

- Basis 172
 - , natürliche 170
 - , Orthonormal- 179
- Betrag
 - einer komplexen Zahl 65
 - eines Vektors 180
- biquadratische Gleichung 75

- Darstellungsmatrix 170
- Definitionsbereich, maximaler 78
- Determinante 166
- Dimensionsformel 164
- divergent 42
 - , bestimmt 43
- Division
 - von Brüchen 39
 - von Polynomen *siehe* Polynom
- Dreiecksungleichung 105

- Ebene 182
 - , Abstand zur 189
- Eigen-
 - raum 177
 - vektoren 176
 - wert 175
- Ellipse 206
- Entwicklungspunkt
 - einer Potenzreihe *siehe* Potenzreihe
 - eines Taylorpolynoms *siehe* Taylorpolynom
- Eulersche
 - Darstellung 69
 - Formel 71
 - Zahl 44
- Extremum
 - , globales 95
 - , lokales 95

- Fourierkoeffizienten
 - , komplexe 146
 - , reelle 139
- Fourierreihe
 - , komplexe 146
 - , reelle 139
- Funktion
 - , bijektive 80
 - , differenzierbare 92
 - , ganzrationale 123
 - , gebrochenrationale 122
 - –, echt 123
 - , gerade 81
 - , injektive 80
 - , periodische 138
 - , stetige 87
 - , surjektive 80
 - , Umkehr- 98
 - , ungerade 81

- Gaußsche Zahlenebene 65
Gaußscher Algorithmus 158
Gerade 182
Gleichungssystem, lineares 158
–, homogenes 161
–, nichttriviale Lösung 162
–, triviale Lösung 162
–, inhomogenes 162
Grenzwert 38
–, linksseitiger 84
–, rechtsseitiger 84
–, uneigentlicher 43
- Imaginärteil 65
Induktion, vollständige 149
Induktions-
– anfang 149
– schritt 149
Integral
–, bestimmtes 112
–, unbestimmtes 110
–, uneigentliches 129
Integration, partielle 112
Inverse *siehe* Matrix
- Kern 164
Koeffizientenvergleich 117
komplexe Zahl 65
–, konjugiert 67
komplexe Zahlenebene *siehe* Gauß-
sche Zahlenebene
Konvergenz 38
– von Reihen 53
Kreuzprodukt 184
- Länge eines Vektors *siehe* Betrag
l'Hospital *siehe* Regel
Leibnizkriterium 58
linear unabhängig *siehe* Vektoren
Linearkombination 174
- Majorantenkriterium
– für Reihen 63
– für uneigentliche Integrale 135
- Matrix 155
– -multiplikation 156
–, Einheits- 164
– in Diagonalgestalt 178
–, Inverse einer 167
–, invertierbare 167
–, orthogonale 180
–, symmetrische 179, 204
–, transponierte 155
Maximum
–, globales 95
–, lokales 95
Minimum
–, globales 95
–, lokales 95
Minorantenkriterium
– für Reihen 56
– für uneigentliche Integrale 135
- Nullfolge, monoton fallende 58
- orthogonal *siehe* Matrix, Vektoren
Orthonormalbasis *siehe* Basis
- parallel 187
Parameterdarstellung 183
parameterfreie Darstellung 183
Partialbruchzerlegung 117
Partialsomme 53
partielle Integration *siehe* Integra-
tion
Pivotelement 158
Polstelle 222
Polynom
– -division 123
–, charakteristisches 175
–, Taylor- *siehe* Taylorpolynom
–, trigonometrisches 145
Potenzreihe 59
–, Entwicklungspunkt einer 59
–, Konvergenzradius einer 59
- quadratische Form 206
Quotientenkriterium 55

- Rang 164
Realteil 65
Regel
– von l’Hospital 47, 48
– von Sarrus 166
Reihe 53
–, geometrische 54
–, harmonische 56, 131
– –, alternierende 58
–, Potenz- *siehe* Potenzreihe
Reihen-Integral-Kriterium 63, 130

Sarrus *siehe* Regel
Satz von Bolzano-Weierstraß 193
Schnittwinkel zweier Ebenen 187
Skalarprodukt 179
Stammfunktion 110
Substitutionsregel 110

Taylorpolynom 102
–, Approximationsfehler 104
–, Entwicklungspunkt 102
–, Restglied 103

Ungleichungen 195

Vektor 160
–, Eigen- *siehe* Eigenvektor
–, hinführender 182
–, Normalen- 184
–, Normaleneinheits- 189
–, Richtungs- 182
Vektoren
–, linear unabhängige 172
–, orthogonale 179
Vielfachheit
–, algebraische 176
–, geometrische 177
vollständige Induktion *siehe* Induktion
tion

Zeilenstufenform 164
Zwischenwertsatz 90