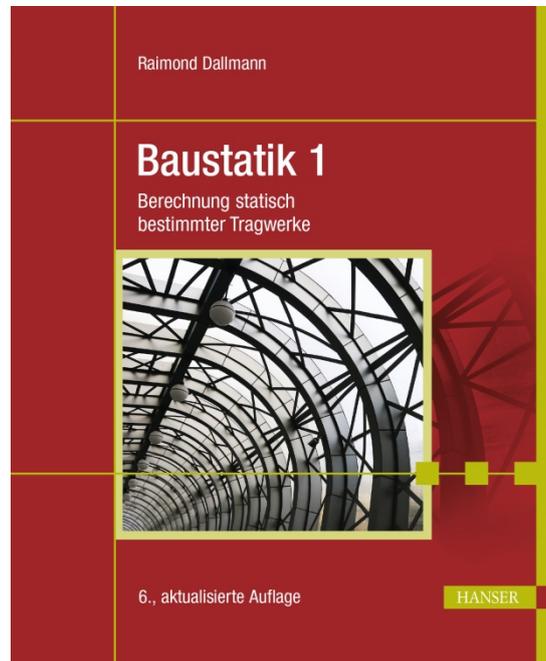


HANSER



Leseprobe

zu

„Baustatik 1“

von Raimond Dallmann

Print-ISBN: 978-3-446-46318-9

E-Book-ISBN: 978-3-446-46354-7

Weitere Informationen und Bestellungen unter
<http://www.hanser-fachbuch.de/978-3-446-46318-9>

sowie im Buchhandel

© Carl Hanser Verlag, München

Vorwort

Dieses Lehrbuch hat das Ziel, die Grundlagen der Baustatik zu vermitteln. Es ist aus den von mir seit 1994 an der Fachhochschule in Wismar gehaltenen Lehrveranstaltungen entstanden und richtet sich an *Studienanfänger* des Bauingenieurwesens.

Die Statik ist die Grundlage für alle konstruktiven Lehrgebiete des Bauingenieurwesens. Ein fundiertes Grundlagenwissen auf diesem Gebiet ist daher unerlässlich, zumal die während des Studiums erworbenen theoretischen Kenntnisse die Basis für das gesamte weitere Berufsleben bilden.

Das Lehrgebiet der Baustatik gliedert sich in die Berechnung statisch bestimmter und statisch unbestimmter Tragwerke. Der vorliegende Band 1 behandelt statisch bestimmte Tragwerke. Die Berechnung statisch unbestimmter Tragwerke sowie die Ermittlung von Verformungen sind Inhalt von Band 2.

In diesem Buch werden zunächst die für die Baustatik benötigten Grundlagen der Mechanik ausführlich behandelt. Die Darstellung der für die Berechnung statisch bestimmter Tragkonstruktionen erforderlichen Zusammenhänge erfolgt methodisch, wobei auf die spezifischen Eigenschaften spezieller Tragwerke eingegangen wird. Zum besseren Verständnis des Lehrstoffes schließen sich in jedem Kapitel an die theoretischen Grundlagen viele vollständig durchgerechnete Beispiele an. Die Anwendung der zuvor dargestellten Zusammenhänge wird anhand dieser Beispiele auf anschauliche Art ausführlich erläutert.

Die der *Baustatik* zugrunde liegende Methodik ist von der Art des Tragwerks unabhängig. Die Berechnung statisch bestimmter Systeme erfolgt durch Anwendung von Gleichgewichtsbedingungen. Es gibt keine spezielle Theorie des Dreigelenkrahmens oder des Gerberträgers, vielmehr ist die grundsätzliche Vorgehensweise für alle Tragwerksformen gleich. Das Verständnis der grundlegenden Methodik ist darum von so großer Bedeutung, weil sonst jedes statische System, das etwas anders

aussieht als das vorherige, eine völlig neue, unlösbare Aufgabe darstellt.

Obwohl der Computer aus der Praxis des Bauingenieurs nicht mehr wegzudenken ist, hat das Erlernen der klassischen Methoden nicht an Bedeutung verloren. Es ist sogar noch wichtiger geworden, da durch die Anwendung von Computerprogrammen kaum noch Handrechnungen durchgeführt werden und daher das Gefühl für das Tragverhalten eines statischen Systems in der Berufspraxis nicht mehr ausgebildet werden kann. Die Unübersichtlichkeit von Computerberechnungen macht es jedoch unbedingt erforderlich, mit einfachen Methoden der Handrechnung die Ergebnisse komplizierter Berechnungsmodelle überprüfen zu können.

Statik lernt man nicht durch Bücher oder Lehrvorträge allein, sondern vor allem, *indem man selbst rechnet*. Das eigenständige intensive Üben des Lehrstoffes in Anwendung auf konkrete Aufgabenstellungen vermittelt oft auch erst im Nachhinein ein tieferes Verständnis der zugrunde liegenden Zusammenhänge. Zu diesem Lernprozess gehört selbstverständlich auch, dass man sich zunächst ungeschickt anstellt, unnötig hohen Aufwand betreibt oder auch Fehler macht. Auch ein falsch gewählter Berechnungsansatz oder eine schlecht gewählte Schnittführung stellen Erfahrungen dar, die dem Verständnis förderlich sein können.

Es kann gar nicht ausdrücklich genug betont werden, dass das Erlernen der Statik nur dann wirklich Erfolg haben kann, wenn es nicht auf die schematische Anwendung rezeptartiger Lösungsmuster auf ähnlich aussehende Aufgabenstellungen ausgerichtet ist, sondern vielmehr auf das Verständnis der grundlegenden Zusammenhänge.

Die Ausbildung im Fach Statik hat nicht nur das Ziel, praktische Fertigkeiten der Berechnung zu vermitteln. Sie schult auch eine gewisse Denkweise, fördert sowohl Anschauung als auch Abstraktionsvermögen und vermittelt ein „statisches Gefühl“ für das Tragverhalten von Konstruktionen.

Um die eigenständige Übung zu ermöglichen, enthält das vorliegende Buch eine Vielzahl von Übungsaufgaben, deren Lösungen am Ende des Buches angegeben sind. Die vollständigen Lösungswege sind im Internet unter <http://www.dallmann.bau.hs-wismar.de> oder unter <http://www.hanser-fachbuch.de/9783446463189> zu finden.

Es würde mich freuen, wenn dieses Buch nicht nur hilft, die Prüfung im Fachgebiet Statik zu bestehen, sondern sogar zum wirklichen Verständnis beiträgt.

Die vorliegende vierte Auflage dieses Buches ist inhaltlich unverändert, es wurden jedoch bekannt gewordene Fehler korrigiert. Ich danke für die zahlreichen Hinweise sowie für die überwiegend sehr positive Beurteilung des Buches.

Tressow, im Herbst 2012

Weitere Vorschläge, Hinweise, Erfahrungen und Anregungen zur Verbesserung des Inhalts aus dem Leserkreis sind stets willkommen.

Dem Carl Hanser Verlag danke ich für die ansprechende Ausstattung des Buches und insbesondere der Lektorin Frau Christine Fritzsich für die sehr angenehme Zusammenarbeit.

Frau Bianca Hennings und Herrn Thomas Bittermann bin ich für die Kontrolle der Beispiele und Aufgaben zu großem Dank verpflichtet.

Mein ganz besonderer Dank gilt meiner Frau Nanette, die nicht nur viel Geduld und Verständnis beim Entstehen dieses Buches aufgebracht hat, sondern auch beim Korrekturlesen eine große Hilfe war.

Raimond Dallmann

Vorwort zur sechsten Auflage

Auch die vierte Auflage ist von den Lesern sehr positiv aufgenommen worden. In der fünften Auflage wurden immer noch vorhandene Fehler korrigiert und punktuell Verbesserungen vorgenommen.

Mein großer Dank gilt in diesem Zusammenhang Herrn Mike Nematik, der durch sehr viele Hinweise und Anregungen zur weiteren Verbesserung des Buches beitrug.

Tressow, im Frühjahr 2020

Die vorliegende sechste Auflage dieses Buches unterscheidet sich von der letzten Auflage nur durch geringfügige Korrekturen. Sollten noch weitere Fehler auffallen, bitte ich um entsprechende Hinweise.

Ich danke dem Lektorat des Carl Hanser Verlages für die langjährige, gute und angenehme Zusammenarbeit.

Raimond Dallmann

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	11
1.1	Einordnung der Statik	11
1.2	Kräfte	11
1.2.1	Der Kraftbegriff	11
1.2.2	Darstellung der Kraft	12
1.2.3	Einteilung der Kräfte	12
1.2.4	Kräftesysteme	13
1.3	Der starre Körper	13
1.4	Axiome der Mechanik	13
1.5	Das Schnittprinzip	14
1.6	Gleichgewicht	14
2	Das zentrale Kräftesystem	15
2.1	Grafische Behandlung	15
2.1.1	Resultierende eines zentralen Kräftesystems	15
2.1.2	Zerlegung einer Kraft in zwei vorgegebene Richtungen	15
2.2	Rechnerische Behandlung	16
2.2.1	Resultierende des Kräftesystems	16
2.2.2	Kräftezerlegung	18
2.3	Gleichgewicht am Punkt	19
	Aufgaben 2.1 bis 2.3	23
3	Das allgemeine ebene Kräftesystem	24
3.1	Grafische Behandlung	24
3.1.1	Reduktion des Kräftesystems durch sukzessives Zusammensetzen	24
3.1.2	Reduktion des Kräftesystems mit Polplan und Seileck	25
3.2	Rechnerische Behandlung	27
3.2.1	Moment und Kräftepaar	27
3.2.2	Moment einer Einzelkraft bezüglich eines Punktes	28
3.2.3	Resultierendes Moment	28
3.2.4	Das Moment als Vektor	28
3.2.5	Der Momentensatz	29
3.2.6	Rechnerische Reduktion des Kräftesystems	29
3.3	Die Gleichgewichtsbedingungen der ebenen Statik	32

3.4	Koordinatensystem und Vorzeichen	33
3.5	Auflager der ebenen Statik	34
3.5.1	Einwertige Lager	34
3.5.2	Zweiwertige Lager	34
3.5.3	Dreiwertige Lager	35
3.6	Reduktion verteilter Kräfte	38
3.7	Darstellung von Streckenlasten	39
	Aufgaben 3.1 und 3.2	40
4	Schnittgrößen statisch bestimmter ebener Systeme	41
4.1	Allgemeines	41
4.1.1	Statische Modellbildung	41
4.1.2	Statische Bestimmtheit	41
4.1.3	Schnittprinzip und Schnittgrößen	41
4.1.4	Vorzeichen der Schnittgrößen	43
4.1.5	Ermittlung von Zustandslinien	45
4.1.6	Darstellung von Zustandslinien	46
4.1.7	Der Zusammenhang zwischen Schnittgrößen und Belastung	46
4.2	Einteilige Tragwerke	47
4.2.1	Balken auf zwei Stützen (Einfeldbalken)	47
4.2.1.1	Einfeldbalken mit konstanter Streckenlast	47
4.2.1.2	Einfeldbalken mit Einzelkraft	49
4.2.1.3	Einfeldbalken mit Einzelmoment	51
4.2.1.4	Einfeldbalken mit Dreieckslast	52
4.2.2	Superposition von Lastfällen	53
4.2.3	Ermittlung der Querkraft aus bekannter Momentenlinie	54
4.2.4	Ermittlung des maximalen Momentes bei konstanter Streckenlast	55
4.2.5	Kragträger	59
4.2.5.1	Kragträger mit Einzelkraft	60
4.2.5.2	Kragträger mit konstanter Streckenlast	60
4.2.6	Einfeldbalken mit Kragarm	62
4.2.7	Verzweigte Systeme	64
4.2.8	Systeme mit gekrümmter Stabachse	70
4.3	Mehrteilige Tragwerke	72
4.3.1	Einführung	72
4.3.2	Schnittprinzip	72

4.3.3	Der Gerberträger	73
4.3.4	Dreigelenktragwerke	77
4.3.4.1	Dreigelenkrahmen	78
4.3.4.2	Dreigelenkbögen	84
4.3.5	Anschlüsse von Tragwerksteilen	88
4.4	Stützlinsen	89
4.4.1	Stützlinsen für Einzelkräfte	89
4.4.2	Stützlinsen für verteilte Kräfte	91
4.5	Fachwerke	93
4.5.1	Definition des Fachwerks	93
4.5.2	Fachwerkaufbau	93
4.5.3	Berechnung der Stabkräfte	94
4.5.3.1	Ritterschnitt	94
4.5.3.2	Rundschnittverfahren	98
4.5.3.3	Cremonaplan	100
4.6	Gemischte Systeme	106
	Aufgaben 4.1 bis 4.79	112
5	Systemaufbau	122
5.1	Abzählkriterium	122
5.1.1	Biegesteife Tragwerke	122
5.1.2	Fachwerke	123
5.2	Abbauprinzip	124
5.3	Aufbauprinzip	125
5.4	Verschiebliche Systeme	128
	Aufgaben 5.1 bis 5.4	129
6	Kinematik starrer Scheiben	130
6.1	Kinematik der Einzelscheibe	130
6.1.1	Translation	130
6.1.2	Rotation	130
6.1.3	Allgemeine Bewegung	130
6.2	Die zwangläufige kinematische Kette	131
6.3	Polpläne	133
6.4	Untersuchung der kinematischen Unverschieblichkeit	136
	Aufgaben 6.1 bis 6.3	139

7	Prinzip der virtuellen Verschiebungen	140
7.1	Mechanische Arbeit	140
7.2	Begriff der virtuellen Verschiebung	142
7.3	Prinzip der Lagrangeschen Befreiung	142
	Aufgaben 7.1 bis 7.6	149
8	Räumliche Tragwerke	150
8.1	Einführung	150
8.2	Beispiele	151
	Aufgaben 8.1 und 8.2	160
9	Einflusslinien für Schnittgrößen statisch bestimmter Systeme	161
9.1	Einführung	161
9.2	Kinematische Ermittlung der Einflusslinien	162
9.2.1	Einflusslinien für Schnittgrößen biegesteifer Systeme	163
9.2.2	Auswertung von Einflusslinien	164
9.2.3	Mittelbare Lasteinleitung	166
9.2.4	Einflusslinien bei verzweigten Systemen	166
9.2.5	Einflusslinien für Stabkräfte von Fachwerken	172
	Aufgaben 9.1 bis 9.5	179
	Lösungen	180
	Literaturverzeichnis	206
	Sachwortverzeichnis	207

1 Einführung

1.1 Einordnung der Statik

Die Mechanik und damit auch die Statik ist ein Teilgebiet der Physik. Sie ist die Lehre von den Kräften und Bewegungen. Der Teil der Mechanik, der insbesondere für technische Anwendungen relevant ist, wird auch als *Technische Mechanik* bezeichnet. Die Aufteilung der Mechanik zeigt das folgende Diagramm.

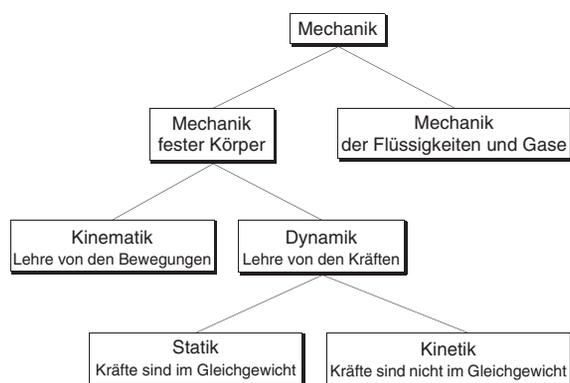


Bild 1.1 Einordnung der Statik

Die Statik ist die Lehre von den Kräften, die sich im Gleichgewicht befinden. Sie ist also ein Teilgebiet der *Dynamik*. Häufig wird der Begriff *Dynamik* irreführend als Gegensatz zur Statik verwandt. Eigentlich ist damit die *Kinetik* gemeint, also mechanische Vorgänge, die mit beschleunigten Bewegungen einhergehen.

Die Statik der Baukonstruktionen, also die Berechnungsverfahren, die speziell auf die Erfordernisse der Baukonstruktionen zugeschnitten sind, wird als *Baustatik* bezeichnet.

Die Methoden der Statik bzw. der Mechanik basieren auf Abstraktionen und Idealisierungen der Wirklichkeit. Die tatsächliche Konstruktion eines Bauwerks wird auf ein gedankliches Modell reduziert. Diese Abstraktion bereitet dem Studienanfänger häufig Schwierigkeiten, da nicht immer ersichtlich ist, welche Bedeutung manche Begriffsbildungen in der Realität besitzen.

Die Reduktion des wirklichen Bauwerks auf das mechanische Modell eines Tragsystems ist eine Aufgabe, die das Können erfahrener Ingenieure voraussetzt. Es kommt dabei darauf an, die wesentlichen Einflüsse zu berücksichtigen, aber alles zu vernachlässigen, was von untergeordneter Bedeutung ist.

Erst durch die Vereinfachung der äußerst komplizierten Wirklichkeit wird eine Berechnung überhaupt erst möglich. Die Baustatik betrachtet das idealisierte Tragwerk, das *Statische System*. Der Prozess der Modellbildung wird in diesem Buch nicht behandelt, er wird als bereits durchgeführt vorausgesetzt.

1.2 Kräfte

1.2.1 Der Kraftbegriff

Die Kraft ist eine physikalische Größe, die wir aus unserer Erfahrung kennen. Kräfte sind nicht sichtbar, ihre Existenz kann nur durch ihre Wirkung erkannt werden. Wenn wir Gegenstände heben oder tragen, spüren wir eine Wirkung in unseren Muskeln, die wir als Kraft bezeichnen.

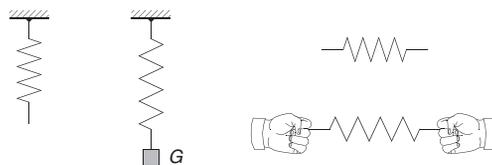


Bild 1.2 Kräfte als Ursache von Verformungen

Eine weitere alltägliche Erfahrung einer Kraftwirkung entsteht beim Verformen von Gegenständen. Um eine Schraubenfeder oder ein Gummiband zu dehnen, müssen Muskel- oder andere Kräfte wirken. Die dargestellte Schraubenfeder in *Bild 1.2* verlängert sich, wenn ein Gewicht angehängt wird oder wenn an beiden Enden gezogen wird.

Wir haben also eine Vorstellung davon, was eine Kraft ist. Diese Vorstellung ist eine Abstraktion, die wir als Ursache einer bestimmten Wirkung zuordnen.

Eine strenge Definition des Kraftbegriffs ist nicht möglich. Kräfte sind die Ursache von Form- und Bewegungsänderungen. Sie sind durch ihre *Größe*, ihre *Richtung* sowie durch ihren *Richtungssinn* gekennzeichnet, d. h., sie haben *vektoriellen Charakter*. Ein weitere wichtige Bestimmungsgröße ist der Angriffspunkt der Kraft.

Dass die Wirkung einer Kraft nicht nur von ihrer Größe abhängt, ist auch aus der Erfahrung geläufig. Die in *Bild 1.3* dargestellten Kräfte haben auf den rechteckigen Gegenstand, auf den sie einwirken, unterschiedliche Wirkungen, auch wenn sie dieselbe Größe haben. Aus diesem Grunde ist der Kraftvektor kein freier, sondern ein gebundener Vektor.

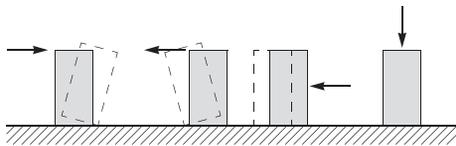


Bild 1.3 Unterschiedliche Wirkungen einer Kraft

Die neben der Muskelkraft ursprünglichste Vorstellung einer Kraftwirkung ist die der *Gewichtskraft*. Sie ist eine Folge der Gravitation, also der Eigenschaft zweier Körper (Massen), sich gegenseitig anzuziehen. Die irdische Gewichtskraft stellt die Kraft dar, mit der ein Körper an der Erdoberfläche durch die Masse der Erde angezogen wird. Sie ergibt sich als Sonderfall des Gravitationsgesetzes:

$$\mathbf{G} = m \cdot \mathbf{g}$$

wobei m die Masse des Körpers und g die mittlere Erdbeschleunigung darstellt. Diese Kraft wirkt in Richtung des Erdmittelpunktes und kann in guter Näherung als senkrecht angesehen werden. Die mittlere Erdbeschleunigung beträgt:

$$g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

1.2.2 Darstellung der Kraft

Kräfte werden als gerichtete Strecke, als Pfeil veranschaulicht. Die Länge des Pfeils kennzeichnet die Größe der Kraft (mathematisch: der Betrag des Vektors), die Neigung des Kraftpfeils die Richtung und die Pfeilspitze

den Richtungssinn. Vektoren werden durch Fettdruck gekennzeichnet.

Da aus der zeichnerischen Darstellung des Kraftvektors Richtung und Richtungssinn unmittelbar zu entnehmen ist, schreibt man in der Regel nur den Betrag der Kraft hinzu.

Die Einheit der Kraft ist das Newton [N], eine aus den Basiseinheiten des internationalen Einheitensystems SI (Système International d'Unité) abgeleitete Größe.

Die Kraft 1 N erteilt der Masse 1 kg die Beschleunigung $1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, es gilt: $1 \text{ N} = 1 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2}$.

1.2.3 Einteilung der Kräfte

Kräfte lassen sich nach unterschiedlichen Gesichtspunkten einteilen.

Ein Unterteilungsgesichtspunkt ist die *Verteilung* der Kraft. Der bisher betrachtete Begriff der in einem Punkt angreifenden sogenannten Einzelkraft stellt eine Idealisierung dar. Diese Idealisierung ist annähernd nur dann gegeben, wenn z. B. mit einer Nadelspitze auf einen Körper gedrückt wird (*Bild 1.4a*).

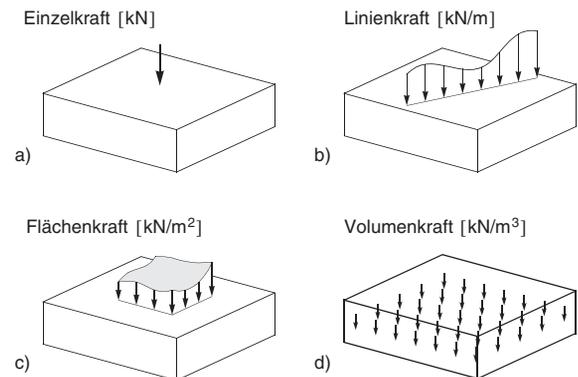


Bild 1.4 Unterschiedlich verteilte Kräfte

Auch eine linienförmig verteilte Kraft, auch *Linienkraft* oder *Streckenlast* genannt, stellt eine Abstraktion dar, die sich annähernd realisieren lässt, wenn man z. B. mit einer Messerschneide gegen einen Körper drückt (*Bild 1.4b*).

In der Wirklichkeit treten Kräfte nur in verteilter Form als *Volumen-* oder *Flächenkräfte* auf. Der in *Bild 1.4d* dargestellte Quader hat eine in seinem Volumen gleichmäßig verteilte Masse, wenn das Material, aus dem er besteht, homogen, also überall gleich ist. Aus diesem Grund ist natürlich auch seine Schwerkraft gleichmäßig innerhalb des Volumens verteilt. *Schwerkkräfte* sind daher immer *Volumenkräfte*.

Flächenkräfte treten in der Berührungsfläche zweier Körper auf, siehe *Bild 1.4c*. Beispiele hierfür sind der Wasserdruck oder das Gewicht von Estrich und Fußbodenbelag auf einer Deckenplatte, das auf dieser verteilt wirkt.

Eine weitere Art der Einteilung ergibt sich aus der Unterscheidung von eingepprägten oder einwirkenden Kräften einerseits und Reaktionskräften andererseits. *Eingepprägte Kräfte* ergeben sich durch physikalische Gesetze und sind vorgegeben, man spricht auch von Lasten. Beispiele sind die Gewichtskräfte, Wasserdruck oder auch Reibung. *Reaktionskräfte* stellen Zwangskräfte dar, die sich aus den Bindungen eines Körpers ergeben, sie sind zunächst unbekannt.

Es werden noch *äußere* und *innere Kräfte* unterschieden. Während äußere Kräfte von außen auf einen Körper einwirken, werden innere Kräfte durch gedankliches Zerschneiden eines Körpers sichtbar gemacht. Sie werden an einem der Teile des durch den Schnitt getrennten Körpers zu äußeren Kräften.

1.2.4 Kräftesysteme

Ein Kräftesystem ist eine *Gruppe von Kräften*, die unter einem bestimmten Gesichtspunkt zusammengefasst werden können. So bilden alle auf einen Körper einwirkenden Kräfte ein Kräftesystem. Wirken alle Kräfte in einer Ebene, so spricht man von einem *ebenen* Kräftesystem, ist dies nicht der Fall, liegt ein *räumliches* Kräftesystem vor. Ein Kräftesystem, bei dem sich die Wirkungslinien aller Kräfte in einem Punkt schneiden, ist eine *zentrales Kräftesystem*.

Ziel der folgenden Betrachtungen ist es, die Wirkung von Kräftesystemen auf einen starren Körper zu beurteilen.

1.3 Der starre Körper

Unter dem bereits verwendeten Begriff des Körpers versteht man ein mit Materie gefülltes Volumen. Ein starrer Körper ist ein Körper, der sich unter der Wirkung von Kräften nicht verformt. Da jeder reale Körper deformierbar ist, stellt die Annahme der Starrheit eine Idealisierung dar. Durch die Modellvorstellung des starren Körpers wird seine Bewegung in der Ebene auf drei Freiheitsgrade eingeschränkt. Unter einem *Freiheitsgrad* versteht man eine unabhängige Bewegungsmöglichkeit. Obwohl sich jeder Körper verformt, sind diese Verformungen in der Regel jedoch so klein, dass sie gegenüber den Abmessungen des Körpers vernachlässigbar sind und daher die Modellvorstellung der Starrheit annähernd zutrifft. Einen festen Körper, dessen Verformungen infolge von Kräften nur sehr klein sind, bezeichnet man als steif.

1.4 Axiome der Mechanik

Die Mechanik baut auf Axiomen auf. Axiome sind Grundgesetze, die unbeweisbar sind und auf der Erfahrung basieren. Die nachfolgend angegebenen Axiome sind die Grundlage aller weiteren Betrachtungen.

Trägheitsaxiom (1. Newtonsches Gesetz)¹

Jeder Körper verharrt in seinem Zustand der Ruhe oder der gleichförmigen geradlinigen Bewegung, solange er nicht durch einwirkende Kräfte gezwungen wird, diesen Zustand zu ändern.

Newtons Grundgesetz der Mechanik (2. Newtonsches Gesetz)

Die Bewegungsänderung ist der bewegendenden Kraft proportional und erfolgt in Richtung der bewegendenden Kraft, d. h., Kraft und Beschleunigungsvektor sind proportional.

$$\mathbf{F} = \sum \mathbf{F}_i = m\ddot{\mathbf{x}}$$

¹ Isaac Newton, engl. Physiker, Mathematiker u. Astronom, 1643 - 1727. In seiner Schrift „Philosophiae naturalis principia mathematica“ (1687) veröffentlichte er u. a. die Newtonschen Axiome.

Reaktionsaxiom (3. Newtonsches Gesetz)

Die wechselseitige Wirkung zweier Körper aufeinander ist gleich groß und von entgegengesetzter Richtung (Aktion gleich Reaktion).

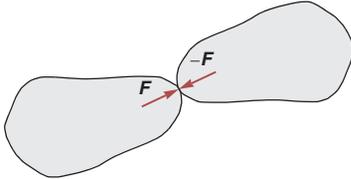


Bild 1.5 Reaktionsaxiom

Verschiebungsaxiom

Kräfte können am starren Körper beliebig auf ihrer Wirkungslinie verschoben werden, sind also *linienflüchtige Vektoren*.

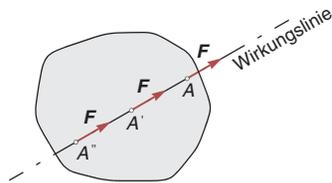


Bild 1.6 Verschiebungsaxiom

Parallelogrammaxiom

Die Wirkung zweier Kräfte mit gleichem Angriffspunkt ist ihrer vektoriellen Summe äquivalent. Zwei Kräfte F_1 und F_2 können also durch eine einzige Kraft R wirkungsgleich ersetzt werden, wenn die Kraft R aus der Parallelogrammkonstruktion in Bild 1.7 gebildet wird.

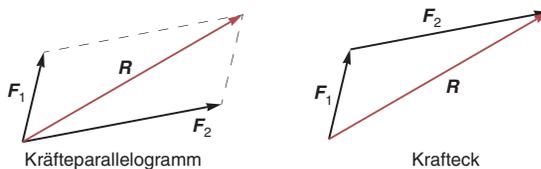


Bild 1.7 Parallelogrammaxiom

1.5 Das Schnittprinzip

Das Schnittprinzip stellt eines der wichtigsten Prinzipien der Mechanik dar. Erst durch seine Anwendung gelingt es, innere Beanspruchungen sichtbar zu machen. Der Körper wird gedanklich zerschnitten, um Aussagen über

die inneren Kräfte machen zu können, die die getrennten Teile des Körpers aufeinander ausüben.

Wird die Schraubenfeder aus Bild 1.2 in Bild 1.8 durch einen Schnitt durchtrennt, so müssen die beiden dargestellten Kräfte wirksam sein, damit die wechselseitige Wirkung beider Teile aufeinander nicht verloren geht.

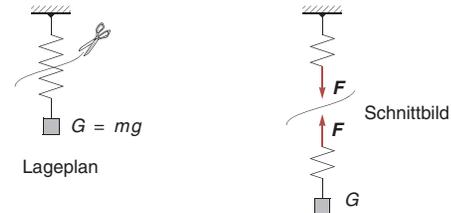


Bild 1.8 Beispiel zum Schnittprinzip

Aus dem *Reaktionsaxiom* folgt, dass die freigeschnittenen Kräfte immer entgegengerichtete Doppelgrößen sind. Der obere Teil der Feder zieht mit einer genau so großen Kraft am unteren Teil, wie der untere am oberen Teil. Das Schnittprinzip besteht in der folgenden axiomatischen Aussage:

Ist ein Körper im Gleichgewicht, so ist auch jeder Teil des Körpers im Gleichgewicht, der durch gedachte Schnitte herausgetrennt wurde.

1.6 Gleichgewicht

Die Statik ist die Lehre von den Kräften, die sich im Gleichgewicht befinden. Wann sind Kräfte im Gleichgewicht? Diese Frage beantwortet das Trägheitsaxiom sowie das Newtonsche Grundgesetz.

Ein ruhender Körper bleibt im Zustand der Ruhe, wenn er unter der Wirkung eines Kräftesystems F_i keine Beschleunigung erfährt. Dieser Ruhezustand wird als *Gleichgewichtszustand* bezeichnet. Ein Kräftesystem, das auf einen Körper wirkt, befindet sich im Gleichgewicht, wenn es den Körper nicht beschleunigt.

Die gleichförmige geradlinige Bewegung ist ebenfalls ein Gleichgewichtszustand, aber in der Baustatik ohne Bedeutung.

Die Gleichgewichtsbedingung ergibt sich daher als Sonderfall des Newtonschen Grundgesetzes:

$$\sum F_i = 0$$

2 Das zentrale Kräftesystem

Ein zentrales Kräftesystem ist dadurch gekennzeichnet, dass sich die Wirkungslinien aller Kräfte in einem Punkt schneiden. *Bild 2.1* zeigt ein aus vier Kräften bestehendes Kräftesystem. Die Darstellungen a) und b) sind völlig gleichwertig, da nach dem Verschiebungsaxiom alle Kräfte auf ihrer Wirkungslinie verschoben werden können.

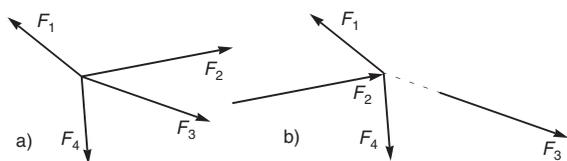


Bild 2.1 Zentrales Kräftesystem

2.1 Grafische Behandlung

Obwohl zeichnerische Verfahren keine praktische Bedeutung mehr haben, sind sie aufgrund ihrer Anschaulichkeit weiterhin wichtig, da sie den Einblick in die Zusammenhänge im Umgang mit Kräften erleichtern.

Für die zeichnerische Darstellung von Kräften ist es erforderlich, einen Kräftemaßstab zu wählen. Mithilfe dieses Maßstabs werden die Kräfte im *Kräfteplan* entsprechend ihrer Größe und Richtung dargestellt. Der *Lageplan* definiert den Angriffspunkt und die Richtung der Kräfte. In der Regel werden die Kräfte im Lageplan durch unmaßstäbliche Pfeile dargestellt und ihr Betrag durch eine Zahlenangabe festgelegt. Es ist allerdings auch möglich, die Größe der Kraft mithilfe eines Kräftemaßstabs durch die Länge des Pfeils anzugeben.

2.1.1 Resultierende eines zentralen Kräftesystems

Ziel ist die Reduktion des zentralen Kräftesystems, d. h., es soll durch eine einzige Kraft wirkungsgleich ersetzt werden. Diese Kraft ist die Resultierende des Kräftesystems.

Für die zeichnerische Ermittlung der Resultierenden werden nacheinander jeweils zwei Kräfte mithilfe der

Parallelogrammkonstruktion bzw. des Kräftecks zusammengefasst. Die Zwischenresultierende lässt man dabei fort. Die dabei entstehende Konstruktion ist das Kräfteck, siehe *Bild 2.2*.

Damit lässt sich die Resultierende nach folgender Vorschrift bilden:

Die Resultierende eines Kräftesystems ergibt sich, indem man alle Kraftpfeile hintereinander zeichnet. Die Verbindung des Anfangs der ersten Kraft mit der Spitze der letzten Kraft ist die Resultierende des Kräftesystems.

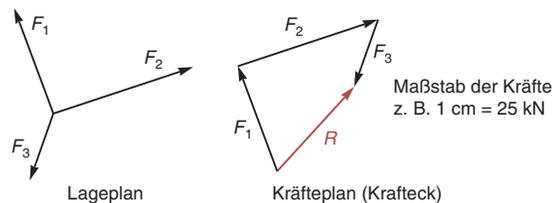


Bild 2.2 Resultierende eines zentralen Kräftesystems

2.1.2 Zerlegung einer Kraft in zwei vorgegebene Richtungen

Die Zerlegung einer Kraft ist die Umkehrung der vorherigen Aufgabenstellung der Reduktion des Kräftesystems. Gegeben ist nunmehr eine Kraft, die durch zwei andere Kräfte, deren Richtung vorgegeben ist, wirkungsgleich ersetzt werden soll.

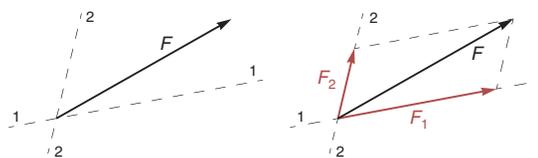


Bild 2.3 Zerlegung einer Kraft

Die zeichnerische Lösung dieser Aufgabe ergibt sich unmittelbar aus der Parallelogrammkonstruktion in *Bild 2.3*. Es werden Parallelen zu den vorgegebenen Richtungen durch die Spitze der Kraft gezeichnet. Die

Schnittpunkte der Linien ergeben die Spitze der gesuchten Kraft.

Die Zerlegung einer Kraft in mehr als zwei Richtungen ist nicht eindeutig möglich.

2.2 Rechnerische Behandlung

Zur rechnerischen Behandlung werden die Kräfte in einem *kartesischen Koordinatensystem* als Vektoren dargestellt. Dies entspricht der Zerlegung der Kraft in Richtung der Koordinatenachsen. Für den Fall des ebenen Kräftesystems ist dies in *Bild 2.4* dargestellt. Im Folgenden werden Vektoren durch Fettdruck gekennzeichnet.

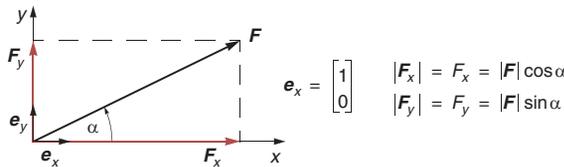


Bild 2.4 Vektorielle Darstellung einer Kraft

Jeder Kraftvektor kann durch seinen Betrag und einen Einheitsvektor, der die Richtung der Kraft beschreibt, dargestellt werden. Ein Einheitsvektor ist ein Vektor, dessen Betrag gleich eins ist. Beschreibt dieser Einheitsvektor die Richtung der Koordinatenachsen, so wird er als Basisvektor bezeichnet. Formal ergibt sich damit die Parallelogrammkonstruktion als Vektorsumme. Die Darstellung erfolgt für ein räumliches Kräftesystem, im ebenen Fall entfallen alle Größen mit dem Index z.

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_x + \mathbf{F}_y + \mathbf{F}_z = F_x \mathbf{e}_x + F_y \mathbf{e}_y + F_z \mathbf{e}_z$$

$\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ sind die Basisvektoren, F_x, F_y, F_z die Komponenten von \mathbf{F} bezüglich der Basis.

F_x, F_y, F_z sind die Projektionen der Kraft \mathbf{F} auf die Basisvektoren $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$.

Es ist üblich, die Beträge der Komponenten in einer Klammer übereinander zu schreiben:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix}$$

Wird nur mit einer Basis gearbeitet, so unterscheidet man häufig nicht zwischen Komponenten und Projektionen. Die Projektionen F_x, F_y, F_z werden dann auch als die Komponenten der Kraft \mathbf{F} bezeichnet. Wir werden von dieser Bezeichnungsweise auch Gebrauch machen, da wir nur in kartesischen Koordinaten arbeiten werden.

2.2.1 Resultierende des Kräftesystems

Die rechnerische Ermittlung der Resultierenden erfolgt für zwei Kräfte durch Bildung der Vektorsumme:

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 \\ &= (\mathbf{e}_x F_{x1} + \mathbf{e}_y F_{y1} + \mathbf{e}_z F_{z1}) + (\mathbf{e}_x F_{x2} + \mathbf{e}_y F_{y2} + \mathbf{e}_z F_{z2}) \\ &= \mathbf{e}_x (F_{x1} + F_{x2}) + \mathbf{e}_y (F_{y1} + F_{y2}) + \mathbf{e}_z (F_{z1} + F_{z2}) \\ &= \mathbf{e}_x R_x + \mathbf{e}_y R_y + \mathbf{e}_z R_z \end{aligned}$$

Die Erweiterung auf mehr als zwei Kräfte ist offensichtlich.

Für n Kräfte \mathbf{F}_i gilt:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} R_x \\ R_y \\ R_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n F_{xi} \\ \sum_{i=1}^n F_{yi} \\ \sum_{i=1}^n F_{zi} \end{bmatrix}$$

Beispiel 2.1

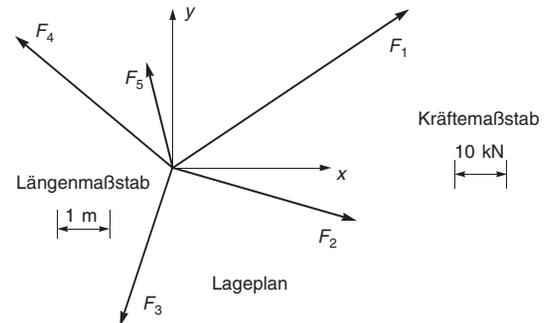


Bild 2.5 Zentrales Kräftesystem

Gegeben ist das zentrale Kräftesystem im Lageplan in *Bild 2.5*. Die Größe der Kräfte (Betrag) ist dabei nicht

Sachwortverzeichnis

- A**
 Abbauprinzip 124
 Absolutpol 131
 Abzählkriterium 122
 Aktionskräfte 36
 Aufbauprinzip 125
 Auflager 34
 Auflagerkräfte 35
 Auflagersymbole 34
 Äußere Kräfte 13
 Axiome 13
- B**
 Balken 35
 Bewegungsmöglichkeiten 34
 Bezugslinie 43
 Bezugspunkt 35
 Biegemoment 44
- C**
 Cremonaplan 100, 104
- D**
 Determinante 128
 Differenzialgleichung 47
 Doppelgröße 43
 Drehmoment 27
 Drehrichtung 27
 Drehsinn 27
 Drehwinkel 131
 Dreigelenkbogen 77, 84
 Dreigelenkrahmen 78
 Dreigelenktragwerke 77
 Dreiwertiges Lager 35
 Dynamik 28, 30, 32
 Dynamik der Streckenlast 38
 Dynamik 11
- E**
 Ebenes Kräftesystem 13
 Eingeprägte Kräfte 13
 Einspannung 35
 Einwertige Lager 34
 Einzelkraft 12
 Ersatzbalken 105
- F**
 Firstgelenk 77
 Flächenkraft 12, 13
 Flächentragwerke 41
 Freiheitsgrad 130, 132
 Freiheitsgrade 34
- Fußgelenk 77
- G**
 Geknickter Träger 67
 Gekrümmte Stabachse 70
 Gelenkdreieck 72
 Gelenkkette 26
 Gelenkkräfte 72, 78
 Gelenkträger 73
 Gemischte Systeme 106
 Gerberträger 73
 Gestrichelte Linie 43
 Gewichtskraft 12
 Gleichgewicht 32
 Gleichgewichtsbedingungen 32
 Gravitation 12
- H**
 Hauptpol 131
- I**
 Innere Kräfte 13
 Innerlich statisch unbestimmt 64
- K**
 Kämpfergelenk 77
 Kinematik 130
 Kinematische Kette 131
 Kinematische
 Unverschieblichkeit 125
 Kinetik 11
 Klaffung 88
 Knick 88
 Koeffizientenmatrix 128
 Koordinatensystem 33
 Kraft 11
 Krafteck 19, 24
 Kräftegleichgewichtsbedingung 32
 Kräftepaar 27
 Kräftesystem 13
 Kraftvektor 12
 Kragarm 62
 Kreuzprodukt 29
- L**
 Lagerausbildungen 34
 Lagerkräfte 34
 Lagrange'sche Befreiung 142
 Linienkraft 12
 Lokales Koordinatensystem 43
- M**
 Mechanik 11, 13
 Mittelbare Lasteinleitung 166
 Moment 27
 Moment einer Einzelkraft 28
 Momentanpol 131
 Momentengleichgewichtsbedingung 32
 Momentenlinie 46
 Momentensatz 29, 30
 Momentenvektor 29, 30
- N**
 Nebenpol 132
 Newton 12
 Newtons Grundgesetz der
 Mechanik 13
 Normalenvektor 44
 Normalkraft 43
 Normalkraftgelenk 88
 Nullstäbe 102
- P**
 Pendelstab 34, 37
 Platte 41
 Pol 25
 Polplan 25, 133
 Polplansätze 133
 Polstrahl 131
 Polstrahlen 25
- Q**
 Querkraft 43, 54
 Querkraftgelenk 88
- R**
 Räumliches Kräftesystem 13
 Reaktionskräfte 13, 36
 Reduktion 24, 29, 38
 Reduktionspunkt 30
 Relativpol 132
 Resultierendes Moment 38
 Richtungssinn 12
 Riegel 77
 Ritterschnitt 104
 Rollenlager 34
 Rotation 130
- S**
 Schale 41
 Scheibe 41, 72
 Scheitelgelenk 77
 Schlusslinie 36

- Schnittgröße 42, 44
Schnittgrößenermittlung 41
Schnittgrößenvorzeichen 44
Schnittmoment 44
Schnittprinzip 14, 35, 41
Schnittufer 44
Schwerkraft 13
Seileck 25, 26
Seilpolygon 26
Seilstrahlen 25
Spreizung 88
Stabachse 43
Stäbe 41
Stabfaser 44
Stabkräfte 37
Stabkrümmung 44
Stabpolygon 26
Starrer Körper 34
Statisch äquivalent 28
Statische Bestimmtheit 41, 122
- Statische Unbestimmtheit 122
Statische Unterbestimmtheit 122
Statisches Moment 27
Stiel 77
Streckenlastfunktion 38
Stützkräfte 35, 37
Stützlinie 26, 89
Systemaufbau 122
- T**
Torsion 150
Torsionsmoment 150
Trägheitsaxiom 13
Transformation der Kräfte 71
Translation 130
- U**
Unverschieblichkeit 136
- V**
Vektoreigenschaft des Momentes 29
Versatzmoment 28
Verschiebliche Einspannung 34
Verzweigte Systeme 64, 166
Volumenkraft 12, 13
Vorzeichen der Schnittgrößen 43
- W**
Wanderlast 161
Wertigkeit eines Auflagers 34
Wirkungslinie 14, 24, 27, 29, 30
- Z**
Zentralachse 24, 30
Zugband 77
Zustandslinien 45, 46
Zweiwertige Lager 34
Zwischenreaktionen 72, 78, 123