HANSER

Leseprobe

zur

„Theoretischen Informatik, 4.A.“

von Dirk W. Hoffmann

ISBN (Buch): 978-3-446-45793-5
ISBN (E-Book): 978-3-446-45794-2

Weitere Informationen und Bestellungen unter
http://www.hanser-fachbuch.de/978-3-446-45793-5
sowie im Buchhandel

Vorwort

Für die meisten Menschen ist die Informatik fest mit der Entstehungsgeschichte des Computers verbunden; einer Technik, die von außen betrachtet keinen Grenzen zu unterliegen scheint. Wir erleben seit Jahren eine schier ungebremste Entwicklung und sind längst daran gewöhnt, dass der Computer von heute schon morgen überholt ist. Dass sich hinter der Computertechnik eine tiefgründige Wissenschaft verbirgt, die all die großen Erfolge erst möglich macht, bleibt vielen Menschen verborgen. Die Rede ist von der theoretischen Informatik.

In der Grundlagenausbildung hat die theoretische Informatik ihren festen Platz eingenommen. Viele Studierende begegnen ihr mit gemischten Gefühlen und von manchen wird sie gar als bedrohlich empfunden. Mitverantwortlich für diese Misere sind die historischen Wurzeln der theoretischen Informatik. Entstanden aus der Mathematik, wird sie häufig in einer Präzision dargestellt, die in der Informatik ihresgleichen sucht. Manch ein Leser verirrt sich schnell in einem Gewirr aus Definitionen, Sätzen und Beweisen, das die Sicht auf die eigentlichen Konzepte und Methoden unfreiwillig verdeckt. Dass die theoretische Informatik weder schwer noch trocken sein muss, versuche ich mit diesem Buch zu beweisen.

Die folgenden Kapitel werden von zwei Leitmotiven getragen. Zum einen möchte ich die grundlegenden Konzepte, Methoden und Ergebnisse der theoretischen Informatik vermitteln, ohne diese durch einen zu hohen Abstraktionsgrad zu vernebeln. Hierzu werden die Problemstellungen durchweg anhand von Beispielen motiviert und die Grundideen der komplizierteren Beweise an konkreten Probleminstanzen nachvollzogen. Zum anderen habe ich versucht, den Lehrstoff in vielerlei Hinsicht mit Leben zu füllen. An zahlreichen Stellen werden Sie Anmerkungen und Querbezüge vorfinden, die sich mit der historischen Entwicklung dieser einzigartigen Wissenschaftsdisziplin beschäftigen.

Bei allen Versuchen, einen verständlichen Zugang zu der nicht immer einfachen Materie zu schaffen, war es mir ein Anliegen, keinen Verlust an Tiefe zu erleiden. Das Buch ist für den Bachelor-Studiengang konzipiert und deckt die typischen Lehrinhalte ab, die im Grundstudium an den hiesigen Hochschulen und Universitäten unterrichtet werden.

Vorwort zur vierten Auflage

Mittlerweile ist die *Theoretische Informatik* in der vierten Auflage erschienen, und ich bedanke mich an dieser Stelle bei allen Lesern, von denen ich seit dem Erscheinen der drit-

ten Auflage eine Rückmeldung erhalten habe. Namentlich erwähnen möchte ich Dr. Klaus Fiedler für seine zahlreichen Hinweise zur Verbesserung des Manuskripts, Mareike Bockholt und Keno Wehr für wichtige Bemerkungen zu Ogdens Lemma und Prof. Dr.-Ing. Martin Eisemann für wertvolle Anmerkungen zur Erzeugung der Chomsky-Normalform.

Karlsruhe, im Mai 2018 Dirk W. Hoffmann

Symbolwegweiser

Definition	Leichte Übungsaufgabe
Satz, Lemma, Korollar	Mittelschwere Übungsaufgabe
	Schwere Übungsaufgabe

Lösungen zu den Übungsaufgaben

In wenigen Schritten erhalten Sie die Lösungen zu den Übungsaufgaben:

1. Gehen Sie auf die Seite www.dirkwhoffmann.de/TH
2. Geben Sie den neben der Aufgabe abgedruckten Webcode ein
3. Die Musterlösung wird als PDF-Dokument angezeigt

Inhaltsverzeichnis

2 Mathematische Grundlagen

In diesem Kapitel werden Sie ...

- die Cantor'sche Definition der Menge ergründen,
- die grundlegenden Eigenschaften von Relationen und Funktionen kennen lernen,
- die natürlichen, rationalen und reellen Zahlen untersuchen,
- den systematischen Umgang mit der Unendlichkeit erlernen,
- induktive Definitionen und Beweise verstehen.

Georg Cantor
(1845 – 1918)

Abbildung 2.1: Der deutsche Mathematiker Georg Cantor wurde am 3. März 1845 in Sankt Petersburg geboren. Nach seiner Ausbildung in Zürich, Göttingen und Berlin folgte er einem Ruf an die Universität Halle, an der er über 40 Jahre lang lehrte und forschte. Cantor gehört zu den bedeutendsten Mathematikern des späten neunzehnten und frühen zwanzigsten Jahrhunderts. Mit seiner *Mannigfaltigkeitslehre* begründete er die Mengenlehre und legte mit dem Begriff der *Kardinalität* den Grundstein für den Umgang mit der Unendlichkeit. Der Begriff der *Abzählbarkeit* geht genauso auf Cantor zurück wie die *Diagonalisierungsmethode*, mit deren Hilfe sich viele Erkenntnisse der theoretischen Informatik auf anschauliche Weise erklären lassen. Im Alter von 39 Jahren erkrankt Cantor an manischer Depression – ein Leiden, das ihn bis zu seinem Lebensende begleiten sollte. Kurz nach seinem siebzigsten Geburtstag wird er nach einem erneuten Krankheitsausbruch in die Universitätsklinik Halle eingewiesen. Dort stirbt Georg Cantor am 6. Januar 1918 im Alter von 72 Jahren.

2.1 Grundlagen der Mengenlehre

2.1.1 Der Mengenbegriff

Wir beginnen unseren Streifzug durch die Grundlagen der Mathematik mit einem Abstecher in das Gebiet der Mengenlehre. Für jeden von uns besitzt der Begriff der *Menge* eine intuitive Interpretation, die nicht zuletzt durch unser Alltagsleben geprägt ist. So fassen wir die 22 Akteure auf dem Fußballplatz wie selbstverständlich zu zwei Elfergruppen zusammen und wissen auch in anderen Lebenslagen Äpfel von Birnen zu unterscheiden. Die Zusammenfassung einer beliebigen Anzahl von Dingen bezeichnen wir als *Menge* und jedes darin enthaltene Objekt als *Element*.

Definition 2.1 (Mengendefinition nach Cantor)

„Unter einer *Menge* verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohl unterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die *Elemente* von M genannt werden) zu einem Ganzen.“ (Georg Cantor)

Dies ist der Originalwortlaut, mit dem der deutsche Mathematiker Georg Cantor (Abbildung 2.1) im Jahr 1885 den Mengenbegriff formulierte [13]. Die hierauf begründete mathematische Theorie wird als *Cantor'sche Mengenlehre* bezeichnet. Ebenfalls üblich sind die Begriffe der *anschaulichen*, *intuitiven* oder *naiven Mengenlehre*, um sie von den später entwickelten, streng axiomatisch definierten Mengenbegriffen abzugrenzen.

Wir schreiben $a \in M$, um auszudrücken, dass a ein Element von M ist. Entsprechend drückt die Notation $a \notin M$ aus, dass a nicht zu M gehört. Die abkürzende Schreibweise $a, b \in M$ bzw. $a, b \notin M$ besagt, dass sowohl a als auch b Elemente von M sind bzw. beide nicht zu M gehören. Zwei Mengen M_1 und M_2 gelten als gleich ($M_1 = M_2$), wenn sie exakt dieselben Elemente enthalten. Im Umkehrschluss existiert für zwei ungleiche Mengen M_1 und M_2 stets ein Element in M_1 oder M_2, das nicht in der anderen Menge enthalten ist. Wir schreiben in diesem Fall $M_1 \neq M_2$. Offensichtlich gilt für jedes Objekt a und jede Menge M entweder $a \in M$ oder $a \notin M$.

Im Gegensatz zur umgangssprachlichen Bedeutung des Begriffs der Menge spielt es im mathematischen Sinn keine Rolle, ob darin wirklich *viele* Objekte zusammengefasst sind. Wir reden selbst dann von einer Menge, wenn diese überhaupt keine Elemente enthält. Für diese *leere Menge* ist das spezielle Symbol $\emptyset$ reserviert.

Mengen können ein einzelnes Objekt niemals mehrfach beinhalten und genauso wenig besitzen ihre Elemente einen festen Platz; Mengen sind inhärent ungeordnet. Im Übungsteil dieses Kapitels werden Sie sehen, dass der Mengenbegriff trotzdem stark genug ist, um geordnete Zusammenfassungen zu modellieren, die zudem beliebig viele Duplikate enthalten dürfen.

In der Praxis haben sich zwei unterschiedliche Schreibweisen etabliert, um die Elemente einer Menge zu definieren:

- Aufzählende Beschreibung

  Die Elemente einer Menge werden explizit aufgelistet. Selbst unendliche Mengen lassen sich aufzählend (enumerativ) beschreiben, wenn die Elemente einer unmittelbar einsichtigen Regelmäßigkeit unterliegen. Die nachstehenden Beispiele bringen Klarheit:

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &:= \{0,1,2,3,\ldots\} \\ \mathbb{N}^+ &:= \{1,2,3,4,\ldots\} \\ \mathbb{Z} &:= \{\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\} \\ M_1 &:= \{0,2,4,6,8,10,\ldots\} \\ M_2 &:= \{0,1,4,9,16,25,\ldots\} \end{aligned}$$

  $\mathbb{N}$ heißt die Menge der *natürlichen Zahlen* oder die Menge der *nichtnegativen ganzen Zahlen*. $\mathbb{N}^+$ beginnt mit der 1 und wird die Menge der *positiven ganzen Zahlen* genannt. $\mathbb{Z}$ ist die Menge der *ganzen Zahlen*. M_1 enthält alle geraden natürlichen Zahlen und die Menge M_2 die Quadrate der ganzen Zahlen.

- Deskriptive Beschreibung

  Die Mengenzugehörigkeit eines Elements wird durch eine charakteristische Eigenschaft beschrieben. Genau jene Elemente sind in der Menge enthalten, auf die die Eigenschaft zutrifft.

$$\begin{aligned} M_3 &:= \{n \in \mathbb{N} \mid n \bmod 2 = 0\} \\ M_4 &:= \{n^2 \mid n \in \mathbb{N}\} \end{aligned}$$

  Demnach enthält die Menge M_3 alle Elemente $n \in \mathbb{N}$, die sich ohne Rest durch 2 dividieren lassen, und die Menge M_4 die Werte n^2 für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$. Die Mengen M_3 und M_4 sind damit nichts anderes als eine deskriptive Beschreibung der im vorherigen Beispiel eingeführten Mengen M_1 und M_2.

Auf den ersten Blick scheint der Mengenbegriff intuitiv erfassbar zu sein, auf den zweiten entpuppt er sich als komplexes Gebilde. Bereits im Einführungskapitel konnten wir den Cantor'schen Mengenbegriff mithilfe der *Russell'schen Antinomie* als widersprüchlich entlarven.
Damit die Mathematik nicht auf wackligen Füßen steht, wurde mit der *axiomatischen Mengenlehre* eine formale Theorie geschaffen, die Inkonsistenzen der Russell'schen Art beseitigen soll. Einen wichtigen Grundstein legte der deutsche Mathematiker Ernst Zermelo, als er im Jahr 1907 ein entsprechendes Axiomensystem formulierte. Die *Zermelo-Mengenlehre* bestand aus insgesamt 7 Axiomen, die noch umgangssprachlich formuliert waren [111]. Das System wurde 1921 von Abraham Fraenkel um das Ersetzungsaxiom und 1930 von Zermelo um das Fundierungsaxiom ergänzt [32, 112]. Die 9 Axiome bilden zusammen die *Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre*, kurz ZF, wie sie heute in weiten Teilen der Mathematik Verwendung findet (Abbildung 2.2).
Wird ZF zusätzlich um das *Auswahlaxiom* (*axiom of choice*) erweitert, so entsteht die ZFC-Mengenlehre (*Zermelo-Fraenkel with Choice*). Das zusätzliche zehnte Axiom besagt das Folgende: Ist M eine Menge von nichtleeren Mengen, dann gibt es eine Funktion f, die aus jeder Menge $M' \in M$ genau ein Element auswählt. Das Auswahlaxiom ist unabhängig von allen anderen. 1937 zeigte Kurt Gödel, dass es sich widerspruchsfrei zu den ZF-Axiomen hinzufügen lässt [37]. 1963 kam Paul Cohen zu dem erstaunlichen Ergebnis, dass die Negation des Auswahlaxioms die Widerspruchsfreiheit von ZF ebenfalls nicht zerstört [23].
Mit dem ehemaligen Mengenbegriff von Cantor hat die axiomatische Mengenlehre nur wenig gemein. Sie gehört heute zu den schwierigsten Teilgebieten der Mathematik und nur wenigen ist es vergönnt, sie vollständig zu durchdringen.

Axiom der Bestimmtheit (Zermelo, 1908)

$$\forall \mathsf{x}\, \forall \mathsf{y}\, (\mathsf{x} = \mathsf{y} \leftrightarrow \forall \mathsf{z}\, (\mathsf{z} \in \mathsf{x} \leftrightarrow \mathsf{z} \in \mathsf{y}))$$

„Ist jedes Element einer Menge M gleichzeitig Element von N und umgekehrt, ist also gleichzeitig $M \subset N$ und $N \subset M$, so ist immer $M = N$. Oder kürzer: jede Menge ist durch ihre Elemente bestimmt.“

Axiom der leeren Menge (Zermelo, 1908)

$$\exists \mathsf{x}\, \forall \mathsf{y}\, \mathsf{y} \notin \mathsf{x}$$

„Es gibt eine (uneigentliche) Menge, die ‚Nullmenge‘ $\emptyset$, welche gar keine Elemente enthält.“

Axiom der Paarung (Zermelo, 1908)

$$\forall \mathsf{x}\, \forall \mathsf{y}\, \exists \mathsf{z}\, \forall \mathsf{u}\, (\mathsf{u} \in \mathsf{z} \leftrightarrow \mathsf{u} = \mathsf{x} \vee \mathsf{u} = \mathsf{y})$$

„Sind a, b irgend zwei Dinge des Bereichs, so existiert immer eine Menge $\{a, b\}$, welche sowohl a als [auch] b, aber kein von beiden verschiedenes Ding x als Element enthält.“

Axiom der Vereinigung (Zermelo, 1908)

$$\forall \mathsf{x}\, \exists \mathsf{y}\, \forall \mathsf{z}\, (\mathsf{z} \in \mathsf{y} \leftrightarrow \exists (\mathsf{w} \in \mathsf{x})\, \mathsf{z} \in \mathsf{w})$$

„Jeder Menge T entspricht eine Menge $\mathfrak{S}T$ (die ‚Vereinigungsmenge‘ von T), welche alle Elemente der Elemente von T und nur solche als Elemente enthält.“

Axiom der Aussonderung (Zermelo, 1908)

$$\forall \mathsf{x}\, \exists \mathsf{y}\, \forall \mathsf{z}\, (\mathsf{z} \in \mathsf{y} \leftrightarrow \mathsf{z} \in \mathsf{x} \wedge \varphi(\mathsf{z}))$$

„Durch jede Satzfunktion $\mathfrak{f}(x)$ wird aus jeder Menge m eine Untermenge $m_{\mathfrak{f}}$ ausgesondert, welche alle Elemente x umfasst, für die $\mathfrak{f}(x)$ wahr ist. Oder: Jedem Teil einer Menge entspricht selbst eine Menge, welche alle Elemente dieses Teils enthält.“

Axiom des Unendlichen (Zermelo, 1908)

$$\exists \mathsf{x}\, (\emptyset \in \mathsf{x} \wedge \forall (\mathsf{y} \in \mathsf{x})\, \{\mathsf{y}\} \in \mathsf{x})$$

„Der Bereich enthält mindestens eine Menge Z, welche die Nullmenge als Element enthält und so beschaffen ist, dass jedem ihrer Elemente a ein weiteres Element der Form $\{a\}$ entspricht.“

Axiom der Potenzmenge (Zermelo, 1908)

$$\forall \mathsf{x}\, \exists \mathsf{y}\, \forall \mathsf{z}\, (\mathsf{z} \in \mathsf{y} \leftrightarrow \mathsf{z} \subseteq \mathsf{x})$$

„Jeder Menge m entspricht eine Menge $\mathfrak{U}m$, welche alle Untermengen von m als Elemente enthält, einschließlich der Nullmenge und m selbst.“

Axiom der Ersetzung (Fraenkel, 1922)

$$(\forall (\mathsf{a} \in \mathsf{x})\, \exists_1 \mathsf{b}\, \varphi(\mathsf{a}, \mathsf{b})) \rightarrow$$
$$(\exists \mathsf{y}\, \forall \mathsf{b}\, (\mathsf{b} \in \mathsf{y} \leftrightarrow \exists (\mathsf{a} \in \mathsf{x})\, \varphi(\mathsf{a}, \mathsf{b})))$$

„Ist M eine Menge und wird jedes Element von M durch ‚ein Ding des Bereichs $\mathfrak{B}$‘ ersetzt, so geht M wiederum in eine Menge über.“

Axiom der Fundierung (Zermelo, 1930)

$$\forall \mathsf{x}\, (\mathsf{x} \neq \emptyset \rightarrow \exists (\mathsf{y} \in \mathsf{x})\, \mathsf{x} \cap \mathsf{y} = \emptyset)$$

„Jede (rückschreitende) Kette von Elementen, in welcher jedes Glied Element des vorangehenden ist, bricht mit endlichem Index ab bei einem Urelement. Oder, was gleichbedeutend ist: Jeder Teilbereich T enthält wenigstens ein Element t_0, das kein Element t in T hat.“

Optional: Axiom der Auswahl (Zermelo, 1904)

$$(\forall (\mathsf{u}, \mathsf{v} \in \mathsf{x})\, (\mathsf{u} \neq \mathsf{v} \rightarrow \mathsf{u} \cap \mathsf{v} = \emptyset) \wedge \forall (\mathsf{u} \in \mathsf{x})\, \mathsf{u} \neq \emptyset) \rightarrow$$
$$\exists \mathsf{y}\, \forall (\mathsf{z} \in \mathsf{x})\, \exists_1 (\mathsf{w} \in \mathsf{z})\, \mathsf{w} \in \mathsf{y}$$

„Ist T eine Menge, deren sämtliche Elemente von $\emptyset$ verschiedene Mengen und untereinander elementfremd sind, so enthält ihre Vereinigung $\cup T$ mindestens eine Untermenge S_1, welche mit jedem Element von T ein und nur ein Element gemein hat.“

Abbildung 2.2: Axiome der Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre

Von den ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ wissen wir, dass sie sich mit den Vergleichsoperatoren $\leq$ und $\geq$ in eine Ordnung bringen lassen. Mengen lassen sich mithilfe der *Teil- oder Untermengenbeziehung* $\subseteq$ und der *Obermengenbeziehung* $\supseteq$ auf ähnliche Weise ordnen:

$$M_1 \subseteq M_2 \;:\Leftrightarrow\; \text{Aus } a \in M_1 \text{ folgt } a \in M_2$$
$$M_1 \supseteq M_2 \;:\Leftrightarrow\; M_2 \subseteq M_1$$

Beachten Sie, dass die Teilmengenbeziehung nach dieser Definition immer auch dann gilt, wenn die linke Menge überhaupt keine Elemente enthält. Mit anderen Worten: Die leere Menge $\emptyset$ ist eine Teilmenge jeder anderen Menge. Des Weiteren ist jede Menge auch eine Teilmenge von sich selbst. Folgerichtig gelten die Beziehungen $\emptyset \subseteq M$, $M \supseteq \emptyset$, $M \subseteq M$ und $M \supseteq M$.

Mithilfe der eingeführten Operatoren können wir die Mengengleichheit wie folgt charakterisieren:

$$M_1 = M_2 \;\Leftrightarrow\; M_1 \subseteq M_2 \text{ und } M_2 \subseteq M_1$$

Zusätzlich vereinbaren wir die Operatoren $\subset$ (*echte Teilmenge*) und $\supset$ (*echte Obermenge*):

$$M_1 \subset M_2 \;:\Leftrightarrow\; M_1 \subseteq M_2 \text{ und } M_1 \neq M_2$$
$$M_1 \supset M_2 \;:\Leftrightarrow\; M_1 \supseteq M_2 \text{ und } M_1 \neq M_2$$

Offensichtlich gilt für die weiter oben eingeführten Mengen die Beziehung $M_1 \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$. Dagegen gilt weder $M_1 \subset M_2$ noch $M_2 \subset M_1$.

2.1.2 Mengenoperationen

Bestehende Mengen lassen sich durch die Anwendung von *Mengenoperationen* zu neuen Mengen verknüpfen. In den nachstehenden Betrachtungen seien M_1 und M_2 Teilmengen einer nichtleeren *Universal-* bzw. *Trägermenge* T. Die *Vereinigungsmenge* $M_1 \cup M_2$ und die *Schnittmenge* $M_1 \cap M_2$ sind wie folgt definiert:

$$M_1 \cup M_2 \;:=\; \{a \mid a \in M_1 \text{ oder } a \in M_2\}$$
$$M_1 \cap M_2 \;:=\; \{a \mid a \in M_1 \text{ und } a \in M_2\}$$

Zwei Mengen M_1 und M_2 heißen *disjunkt*, falls $M_1 \cap M_2 = \emptyset$ gilt.

Die Definition lässt sich auf die Vereinigung bzw. den Schnitt beliebig vieler Mengen verallgemeinern. Für die endlich vielen Mengen

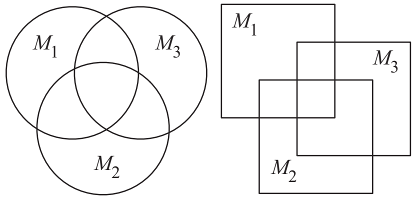
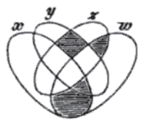


Abbildung 2.3: *Venn-Diagramme* sind ein anschauliches Hilfsmittel, um Beziehungen zwischen Mengen zu visualisieren. Eine Menge wird durch eine Fläche beschrieben, die durch einen geschlossen Linienzug begrenzt wird. Jeder diskrete Punkt innerhalb der Fläche entspricht einem Element der Menge.

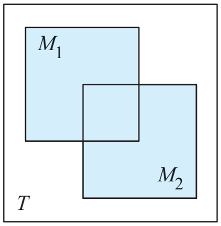


Viergliedriges Venn-Diagramm aus der Originalarbeit von 1881

John Venn (1834 – 1923)

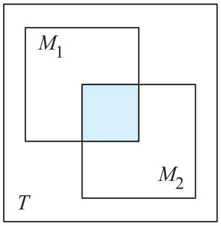
Abbildung 2.4: Das Venn-Diagramm wurde im Jahr 1881 durch den britischen Logiker und Philosophen John Venn eingeführt [101,102]. Es bildet heute die am häufigsten eingesetzte Darstellungsform für die bildliche Repräsentation einer Menge.

- Vereinigung



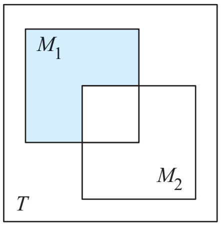
$M_1 \cup M_2$

- Schnitt



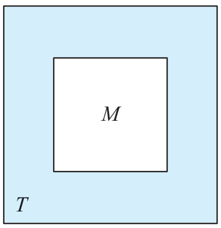
$M_1 \cap M_2$

- Differenz



$M_1 \setminus M_2$

- Komplement



$\overline{M}$

Abbildung 2.5: Elementare Mengenoperationen

$M_1, \ldots, M_n$ bzw. die unendlich vielen Mengen $M_1, M_2, \ldots$ vereinbaren wir die folgende Schreibweise:

$$\bigcup_{i=1}^{n} M_i := M_1 \cup \ldots \cup M_n \quad \text{bzw.} \quad \bigcup_{i=1}^{\infty} M_i := M_1 \cup M_2 \cup \ldots$$

$$\bigcap_{i=1}^{n} M_i := M_1 \cap \ldots \cap M_n \quad \text{bzw.} \quad \bigcap_{i=1}^{\infty} M_i := M_1 \cap M_2 \cap \ldots$$

Zusätzlich definieren wir die *Differenzmenge* $M_1 \setminus M_2$ sowie die *Komplementärmenge* $\overline{M}$ wie folgt:

$$M_1 \setminus M_2 := \{a \mid a \in M_1 \text{ und } a \notin M_2\}$$
$$\overline{M} := T \setminus M$$

Viele Mengenbeziehungen lassen sich intuitiv mithilfe von *Venn-Diagrammen* veranschaulichen. Die Elemente einer Menge werden durch diskrete Punkte und die Mengen selbst als geschlossene Gebiete in der Ebene repräsentiert (vgl. Abbildungen 2.3 bis 2.5).

Die Vereinigungs-, Schnitt- und Komplementoperatoren begründen zusammen die *Mengenalgebra*. In der entstehenden algebraischen Struktur gilt eine Reihe von Gesetzen, die sich direkt aus der Definition der Operatoren ergeben. Insbesondere lassen sich die folgenden vier Verknüpfungsregeln ableiten:

- Kommutativgesetze

$$M_1 \cup M_2 = M_2 \cup M_1$$
$$M_1 \cap M_2 = M_2 \cap M_1$$

- Distributivgesetze

$$M_1 \cup (M_2 \cap M_3) = (M_1 \cup M_2) \cap (M_1 \cup M_3)$$
$$M_1 \cap (M_2 \cup M_3) = (M_1 \cap M_2) \cup (M_1 \cap M_3)$$

- Neutrale Elemente

$$M \cup \emptyset = M$$
$$M \cap T = M$$

- Inverse Elemente

$$M \cup \overline{M} = T$$
$$M \cap \overline{M} = \emptyset$$

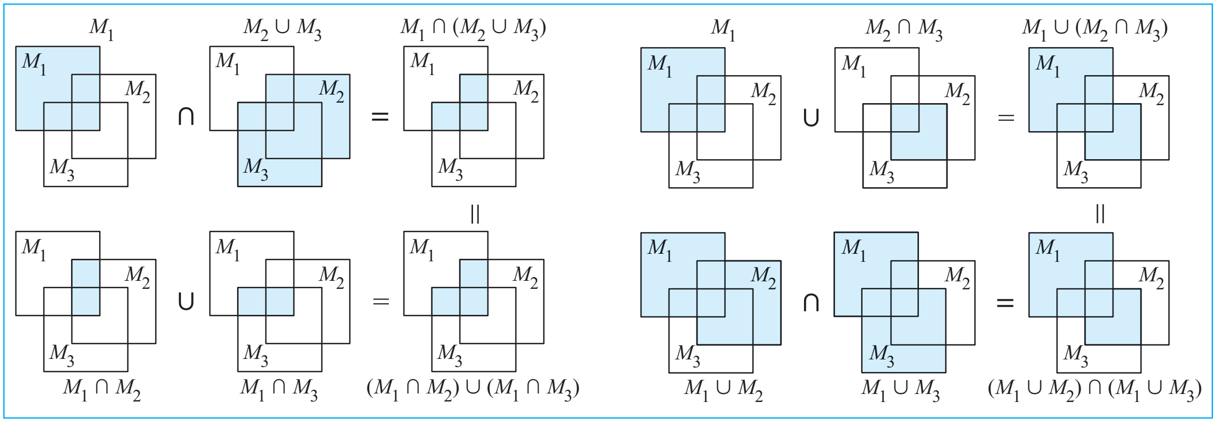


Abbildung 2.6: Veranschaulichung der Distributivgesetze anhand von Venn-Diagrammen

Von den vorgestellten Verknüpfungsregeln bedürfen nur die beiden Distributivgesetze eines zweiten Blickes, um sich von deren Richtigkeit zu überzeugen. Die Venn-Diagramme in Abbildung 2.6 liefern eine grafische Begründung für diese Regeln.

Die Mengenalgebra ist ein Spezialfall einer *booleschen Algebra* (Abbildung 2.7) [49]. Damit übertragen sich alle Gesetzmäßigkeiten, die in einer booleschen Algebra gelten, in direkter Weise auf die Mengenalgebra. Hierunter fallen insbesondere die folgenden Verknüpfungsregeln:

- Assoziativgesetze

$$M_1 \cup (M_2 \cup M_3) = (M_1 \cup M_2) \cup M_3$$
$$M_1 \cap (M_2 \cap M_3) = (M_1 \cap M_2) \cap M_3$$

- Idempotenzgesetze

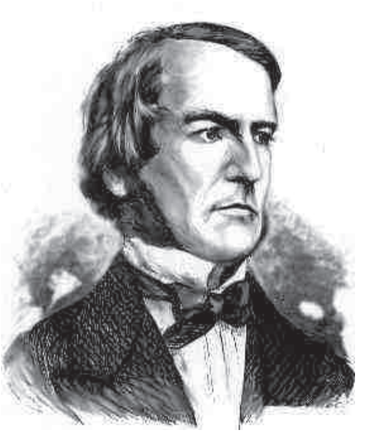
$$M \cup M = M$$
$$M \cap M = M$$

- Absorptionsgesetze

$$M_1 \cup (M_1 \cap M_2) = M_1$$
$$M_1 \cap (M_1 \cup M_2) = M_1$$

- Gesetze von De Morgan (Abbildung 2.8)

$$\overline{M_1 \cup M_2} = \overline{M_1} \cap \overline{M_2}$$
$$\overline{M_1 \cap M_2} = \overline{M_1} \cup \overline{M_2}$$



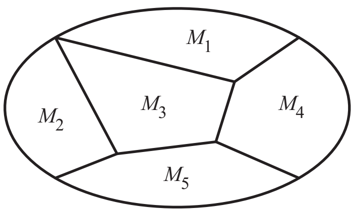
George Boole
(1815 – 1864)

Abbildung 2.7: Der britische Mathematiker und Philosoph George Boole zählt zu den einflussreichsten Logikern des neunzehnten Jahrhunderts. Mit seinem historischen Werk *The laws of thought* legte er 1854 den Grundstein der mathematischen Logik [9]. Die nach ihm benannte boolesche Algebra ist die mathematische Grundlage für die Funktionsweise und die Konstruktion aller modernen Computeranlagen.

„The contrary of an aggregate is the compound of the contraries of the aggregants: the contrary of a compound is the aggregate of the contraries of the components.“

Augustus De Morgan (1806 – 1871)

Abbildung 2.8: Die Gesetze von De Morgan sind nach dem britischen Mathematiker Augustus De Morgan benannt, der neben George Boole als einer der bedeutendsten Mitbegründer der mathematischen Logik gilt. Auch in anderen Bereichen der Mathematik hat De Morgan Maßgebliches geleistet. Im Laufe seines Lebens verfasste er bedeutende Arbeiten in den Bereichen der Arithmetik und der Trigonometrie.



$M = M_1 \cup \ldots \cup M_5$, $M_i \neq \emptyset$ für $1 \leq i \leq 5$,
$M_i \cap M_k = \emptyset$ für $i \neq k, 1 \leq i, k \leq 5$

Abbildung 2.9: Eine Partition teilt eine Menge in paarweise disjunkte Äquivalenzklassen auf.

- Auslöschungsgesetze

$$M \cup T = T$$
$$M \cap \emptyset = \emptyset$$

- Gesetz der Doppelnegation

$$\overline{\overline{M}} = M$$

Zum Schluss wollen wir eine wichtige Mengenoperation einführen, die uns an zahlreichen Stellen in diesem Buch begegnen wird. Gemeint ist die Vereinigung aller Teilmengen zu einer neuen Menge 2^M. Diese wird als *Potenzmenge* bezeichnet und lässt sich mit der eingeführten Nomenklatur wie folgt charakterisieren:

$$2^M := \{M' \mid M' \subseteq M\}$$

Offensichtlich gelten für alle Mengen M die Beziehungen $\emptyset \in 2^M$ und $M \in 2^M$. Für eine nichtleere Menge M besitzt die Potenzmenge damit mindestens 2 Elemente.

Eine Teilmenge $P \subseteq 2^M$ ist eine *Partition* von M, wenn jedes Element aus M in einer und nur einer Menge aus P liegt. Die Elemente aus P werden als *Äquivalenzklassen* bezeichnet (vgl. Abbildung 2.9).

2.2 Relationen und Funktionen

Eine *Relation* setzt verschiedene Objekte in eine wohldefinierte Beziehung zueinander. Wir schreiben $x \sim_R y$, um auszudrücken, dass die Elemente x und y bezüglich der Relation R in Beziehung stehen. Um das Gegenteil auszudrücken, schreiben wir $x \not\sim_R y$. Die eingeführte Notation mag den Anschein erwecken, dass wir mit dem Relationenbegriff ein neues mathematisches Konzept einführen. Die folgenden Definitionen zeigen aber, dass sich die Relationentheorie vollständig auf den Schultern der Mengenlehre errichten lässt:

Definition 2.2 (Kartesisches Produkt)

Sei M eine beliebige Menge. Die Menge

$$M \times M := \{(x,y) \mid x, y \in M\}$$

nennen wir das *kartesische Produkt* von M.

Definition 2.3 (Relation)

Sei M eine beliebige Menge. Jede Menge R mit

$$R \subseteq M \times M$$

heißt Relation in M. Wir schreiben $x \sim_R y$ für $(x,y) \in R$ und $x \not\sim_R y$ für $(x,y) \notin R$.

Dieser Definition folgend, ist das kartesische Produkt $M \times M$ die Menge aller geordneten Paare (x,y) von Elementen aus M. Jede Relation können wir als diejenige Teilmenge von $M \times M$ auffassen, die für alle x,y mit $x \sim_R y$ das Tupel (x,y) enthält.

Relationen lassen sich auf verschiedene Weise beschreiben. Ist die Grundmenge M endlich, so werden neben der mathematisch geprägten Mengenschreibweise (vgl. Abbildung 2.10 oben) insbesondere die folgenden Darstellungen bemüht:

- Graph-Darstellung

  Die Elemente von M werden als Knoten in Form eines Punktes oder Kreises repräsentiert und jedes Element $(x,y) \in R$ als gerichtete Verbindungslinie (Pfeil) eingezeichnet. Elemente der Form (x,x) werden durch eine Schlinge symbolisiert, die den Knoten x mit sich selbst verbindet.

- Matrix-Darstellung

  In dieser Darstellung wird eine Relation durch eine binäre Matrix repräsentiert, die für jedes Element aus M eine separate Zeile und Spalte enthält. Jedes Matrixelement entspricht einem bestimmten Tupel (x,y) des kartesischen Produkts $M \times M$. Gilt $x \sim y$, so wird der Matrixkoeffizient an der betreffenden Stelle auf 1 gesetzt. Alle anderen Koeffizienten sind gleich 0.

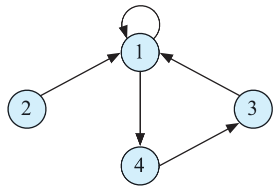
Abbildung 2.10 stellt die verschiedenen Repräsentationsformen gegenüber. Da jede Darstellung über individuelle Vor- und Nachteile verfügt, werden wir uns im Folgenden nicht auf eine einzige Repräsentation beschränken, sondern individuell auf die jeweils passende Darstellungsform zurückgreifen.

Viele praxisrelevante Relationen besitzen immer wiederkehrende, charakteristische Eigenschaften. Die folgenden *Relationenattribute* helfen, das Chaos zu ordnen:

- Mengendarstellung

$$R := \{ \quad (1,1), (1,4), (2,1), (3,1), (4,3) \quad \}$$

- Graph-Darstellung



- Tabellarische Darstellung

	1	2	3	4
1	1	0	0	1
2	1	0	0	0
3	1	0	0	0
4	0	0	1	0

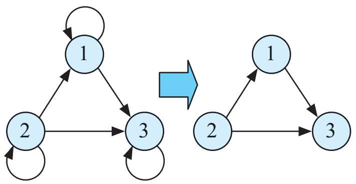
Adjazenztafel

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

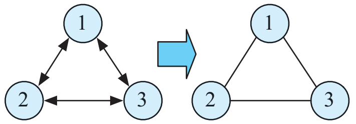
Adjazenzmatrix

Abbildung 2.10: Für die Beschreibung von Relationen haben sich verschiedene Darstellungsformen etabliert.

- Reflexivität



- Symmetrie



- Transitivität

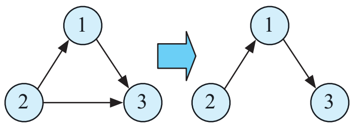


Abbildung 2.11: Vereinfachte Darstellung reflexiver, symmetrischer und transitiver Relationen

Definition 2.4 (Relationenattribute)

Eine Relation R in der Menge M heißt

- *reflexiv* in M, falls $x \sim x$ für alle $x \in M$ gilt,
- *irreflexiv* in M, falls $x \not\sim x$ für alle $x \in M$ gilt,
- *symmetrisch* in M, falls aus $x \sim y$ stets $y \sim x$ folgt,
- *asymmetrisch* in M, falls aus $x \sim y$ stets $y \not\sim x$ folgt,
- *antisymmetrisch* in M, falls aus $x \sim y$ und $y \sim x$ stets $x = y$ folgt,
- *transitiv* in M, falls aus $x \sim y$ und $y \sim z$ stets $x \sim z$ folgt,
- *linkstotal* in M, falls für alle $x \in M$ ein $y \in M$ existiert mit $x \sim y$,
- *rechtstotal* in M, falls für alle $y \in M$ ein $x \in M$ existiert mit $x \sim y$,
- *linkseindeutig* in M, falls aus $x \sim z$ und $y \sim z$ stets $x = y$ folgt,
- *rechtseindeutig* in M, falls aus $x \sim y$ und $x \sim z$ stets $y = z$ folgt.

Stellen wir eine Relation R als Graph oder in Form einer Adjazenzmatrix dar, so lassen sich viele der eingeführten Attribute auf den ersten Blick erkennen. Eine Relation R ist genau dann reflexiv, wenn alle Knoten des Relationengraphen mit einer Schlinge versehen sind, und eine symmetrische Relation liegt genau dann vor, wenn jede Kante in beiden Richtungen mit einer Pfeilspitze abschließt. Ähnliches gilt für die tabellarische Darstellung. Eine Relation R ist genau dann reflexiv, wenn in der Adjazenzmatrix sämtliche Koeffizienten der Hauptdiagonalen gleich 1 sind, und die Symmetrieeigenschaft ist gegeben, wenn die linke untere und die rechte obere Hälfte spiegelsymmetrisch zur Hauptdiagonalen liegen.

Für reflexive, symmetrische oder transitive Relationen R wird der Relationengraph gewöhnlich in einer vereinfachten Darstellung notiert (vgl. Abbildung 2.11). Reflexive Relationen werden dann ohne Schlingen gezeichnet und symmetrische Relationen durch einen ungerichteten Graph repräsentiert; an die Stelle der Doppelpfeile treten in diesem Fall einfache Linienverbindungen. Ähnliche Vereinfachungen gelten für transitive Relationen, die aus Gründen der Übersichtlichkeit um unnötige Kanten befreit werden dürfen. Eine Kante zwischen zwei Knoten x und y darf immer dann entfallen, wenn x und y bereits über andere Kanten miteinander verbunden sind.

Sachwortverzeichnis

Symbole

A

B