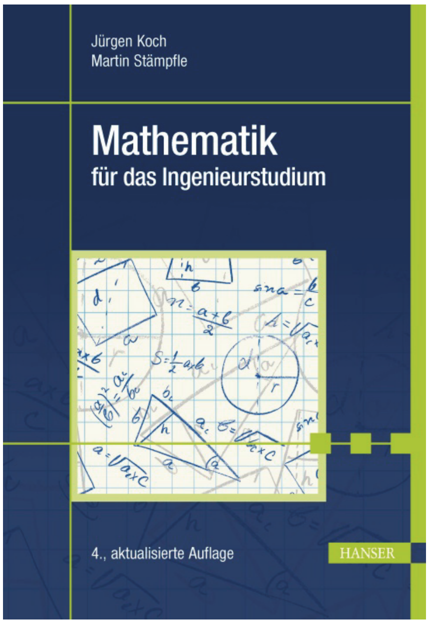
HANSER



Leseprobe

zu

„Mathematik für das Ingenieurstudium“

von Jürgen Koch und Martin Stämpfle

ISBN (Buch): 978-3-446-45166-7
ISBN (E-Book): 978-3-446-45581-8

Weitere Informationen und Bestellungen unter
http://www.hanser-fachbuch.de/978-3-446-45166-7
sowie im Buchhandel

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Drei wesentliche Gründe haben uns bewogen, ein Mathematikbuch zu schreiben. Zum einen haben wir unser persönliches didaktisches Konzept umgesetzt. Zum anderen ist dieses Buch so gestaltet, dass es dem Wandel, der durch den Einsatz von Computern entstanden ist, gerecht wird. Schließlich wird durch viele Anwendungsbeispiele die Bedeutung der Mathematik in der Technik sichtbar.

In diesem Mathematikbuch haben wir viel Wert auf eine verständliche Sprache gelegt. Begriffe, Regeln und Sätze sind so formuliert, dass sie möglichst leicht zu lesen, schnell aufzufassen und einfach zu merken sind. Bilder sagen mehr als tausend Worte. Gemäß diesem Grundsatz werden Sätze, Regeln und Beispiele mit farbigen Skizzen illustriert. Diese Abbildungen helfen, den Sachverhalt unmittelbar visuell aufzunehmen. Alle Beispiele enthalten einen ausführlichen Rechenweg. Durch die Angabe von vielen Zwischenschritten sind sie auf das Niveau von Studienanfängern zugeschnitten. Dieses Buch ist nicht nach dem strengen Prinzip Definition-Satz-Beweis aufgebaut. In diesem Sinne ist es kein Mathematikbuch für Mathematiker. Trotzdem sind an vielen Stellen Herleitungen oder Beweisskizzen enthalten. Sie fördern das Verständnis über die Zusammenhänge des mathematischen Gedankengebäudes. Querbezüge zur Geschichte der Mathematik verdeutlichen, wie sich die Mathematik über Jahrhunderte aus Ideen genialer Personen entwickelt hat. Kurzporträts einiger bedeutender Mathematiker befinden sich im Anhang.

Durch den Einsatz von Computern hat sich die Tätigkeit von Ingenieuren stark gewandelt. Berechnungen und Konstruktionen werden überwiegend mit Softwarewerkzeugen durchgeführt. Dadurch steht die Vermittlung von Rechenschemata und Rechentricks bei der Mathematikausbildung in einem Ingenieurstudium heute nicht mehr im Vordergrund. Computer machen Mathematik aber nicht überflüssig, im Gegenteil: Das Kapital der Ingenieurabsolventen liegt im Verständnis der Mathematik. Das Wissen über die Modellierung und die Kenntnis unterschiedlicher Berechnungsverfahren sowie die Fähigkeit zu einer souveränen Interpretation der Ergebnisse zeichnen einen guten Ingenieur aus. Dieses Buch wird diesem geänderten Anspruch gerecht. Die meisten Kapitel enthalten einen Abschnitt über numerische Verfahren und einen Abschnitt über ausgewählte Anwendungen. Bei diesen Anwendungen sind die technischen Skizzen und Bezeichnungen teilweise vereinfacht dargestellt und deshalb nicht immer normgerecht.

Zum Überprüfen des Lernfortschrittes stehen am Ende der Kapitel Aufgaben, unterteilt in die Kategorien Verständnis, Rechentechnik und Anwendungen, zur Verfügung. Durch selbstständiges Üben und mit einer gesunden Portion Hartnäckigkeit beim Bearbeiten der Aufgaben wird sich der gewünschte Studienerfolg einstellen. Lösungen zu den Aufgaben sind über die Internetseiten der Autoren abrufbar: *www.mathematik-fuer-ingenieure.de*. Das Dozentenportal des Carl Hanser Verlags stellt für Mathematikdozenten begleitend zum Buch einen Foliensatz bereit.

Unser Dank richtet sich in erster Linie an unsere Studierenden. Ihre Fragen und Bemerkungen über viele Semester hinweg haben uns angeregt, immer wieder über Verbesserungen der Darstellung des Stoffes zu reflektieren. Ebenfalls bedanken möchten wir uns bei unseren Kolleginnen und Kollegen der Fakultät Grundlagen an der Hochschule Esslingen. Zahlreiche Hinweise sind an vielen Stellen eingeflossen. Ein herzlicher Dank geht an den Carl Hanser Verlag, speziell an Frau Christine Fritzsch, Frau Renate Roßbach und Frau Katrin Wulst, für die angenehme Zusammenarbeit bei der Entstehung dieses Buches. Schließlich gilt ein besonderer Dank unseren Familien, die uns Freiräume geschaffen und so die Entstehung des Manuskripts ermöglicht haben.

Esslingen, im Juli 2010

Jürgen Koch
Martin Stämpfle

Die positive Resonanz über unser Buch hat uns sehr gefreut und uns dazu motiviert, in die 2. Auflage eine Reihe von Ergänzungen und Verbesserungen aufzunehmen. Bedanken möchten wir uns bei den Studierenden und Kollegen über die Rückmeldungen zu Tippfehlern und kleinen Unstimmigkeiten. In akribischer Kleinarbeit sind wir allen Hinweisen nachgegangen und haben entsprechende Korrekturen vorgenommen. Auch die Lösungen zu den Aufgaben, die nach wie vor im Internet abrufbar sind, haben wir überarbeitet.

Wir haben in der 3. Auflage das Thema Funktionen in drei Kapitel aufgeteilt. Der Einstieg in die Funktionen ist nun etwas allgemeiner gehalten und beinhaltet auch Relationen. Ein eigenes klar strukturiertes Kapitel über die elementaren Funktionen verbessert den Überblick über diese Funktionen. Die zentralen Themen Folgen, Grenzwerte und Stetigkeit sind nun in einem separaten Kapitel gebündelt. Mit Ergänzungen bei der z-Transformation und den beiden komplett neuen Kapiteln über Differenzengleichungen und elementare Zahlentheorie haben wir weitere Aspekte der diskreten Mathematik hinzugefügt. Einige Aufgaben und Lösungen sind neu hinzugekommen oder wurden überarbeitet.

In der 4. Auflage haben wir Abschnitte über orthogonale Vektoren und Matrizen und die Hauptachsentransformation aufgenommen. Das Kapitel über Zahlentheorie wurde um zwei Anwendungen erweitert. Bei den Kapiteln über Grundlagen, Matrizen und gewöhnliche Differenzialgleichungen wurden etliche Aufgaben ergänzt. Auch für diese Auflage haben wir noch einige kleinere Unstimmigkeiten geglättet.

Esslingen, im Oktober 2017

Jürgen Koch
Martin Stämpfle

9 Integralrechnung

Die Einstiegsfrage in die Integralrechnung betrifft das sogenannte Flächenproblem: Wie kann man den Flächeninhalt unter einer Funktion berechnen? Wie so oft in der Mathematik liegt der Schlüssel zur Lösung des Problems darin, den geeigneten Querbezug herzustellen. Die wesentliche Erkenntnis dieses Kapitels ist der Zusammenhang der Differenzialrechnung mit dem Flächenproblem. Wir werden sehen, dass die Integralrechnung eine Art Umkehrung der Differenzialrechnung darstellt.

9.1 Flächenproblem

Zunächst beschränken wir uns nur auf Funktionen, die keine negativen Funktionswerte haben und stetig sind. Das Schaubild einer solchen Funktion schließt im Intervall $[a, b]$ mit der x-Achse eine Fläche A ein. Wir suchen nach einer Methode, diesen Flächeninhalt zu berechnen.

9.1.1 Integralsymbol

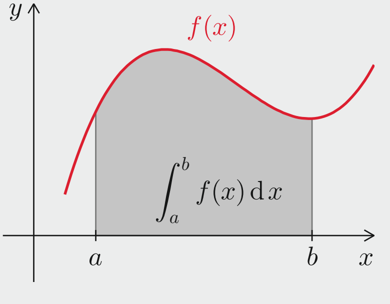
Die Fläche ist erst durch Angabe von Untergrenze a und Obergrenze b eindeutig festgelegt. Wir benötigen deshalb eine geeignete Schreibweise, um unmissverständlich klar zu machen, in welchem Bereich wir die Funktion f betrachten.

Definition 9.1 (Integralsymbol)

Eine stetige und nicht negative Funktion f begrenzt für x-Werte zwischen a und b mit der x-Achse ein Flächenstück. Für den Inhalt A dieser Fläche verwendet man die Schreibweise mit dem **Integralsymbol**

$$A = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Die Funktion f unter dem Integral bezeichnet man als **Integrand**.



Wir verwenden die Sprechweise „Integral von a bis b über f von x $\mathrm{d}x$“. Die Bezeichnung $\mathrm{d}x$ kennen wir bereits von der Ableitung $f'(x) = \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$.

Beim Integral setzen wir zunächst $f \geq 0$ und $a \leq b$ voraus. Im weiteren Verlauf dieses Kapitels werden wir jedoch sehen, dass Integrale auch für $f < 0$ und $a > b$ sinnvoll definiert werden können. Integrale, bei denen ∞ oder $-\infty$ als Grenzen vorkommen, bezeichnet man als uneigentliche Integrale. Die Besonderheiten werden in *Abschnitt 9.3.5* beleuchtet.

Das Integralsymbol $\int$ wurde in Anlehnung an ein langgezogenes „S“ als Anfangsbuchstabe des lateinischen Worts „summa“ bereits im 17. Jahrhundert von dem Mathematiker *Gottfried Wilhelm Leibniz* eingeführt. Bei der Definition des Integralsymbols ist die Variable x lediglich ein Platzhalter. Wir können anstatt x jede beliebige Variable verwenden, mit den Worten von Goethes Faust formuliert: „Name ist Schall und Rauch“.

Integrationsvariable

Die Bezeichnung der Integrationsvariable spielt keine Rolle:

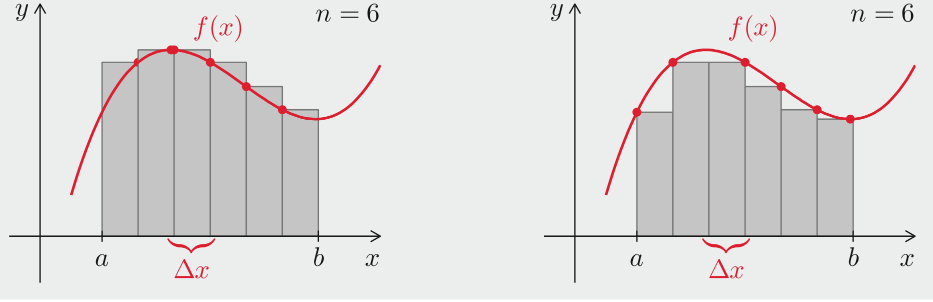
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u = \ldots$$

9.1.2 Integral als Grenzwert von Summen

Eine nahe liegende Idee bei der Berechnung einer Fläche unter einer Funktion ist die Verwendung kleiner Rechtecke. Dazu unterteilt man das Intervall von a bis b in n gleich große Teilintervalle. Bei dieser sogenannten äquidistanten Unterteilung hat jedes Teilintervall die Länge $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$. Rechtecke, deren Höhen so gewählt werden, dass sie gerade noch unter die Funktion passen, erzeugen die sogenannte Untersumme. Bei der Obersumme entsprechen die Höhen der Rechtecke den maximalen Funktionswerten.

Unter- und Obersumme

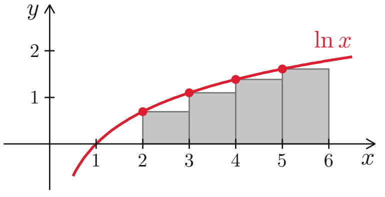
Die Fläche unter einer stetigen und nicht negativen Funktion kann durch **Untersumme** und **Obersumme** angenähert werden. Der tatsächliche Wert der Fläche ist sicherlich nicht kleiner als die Untersumme und sicherlich auch nicht größer als die Obersumme.

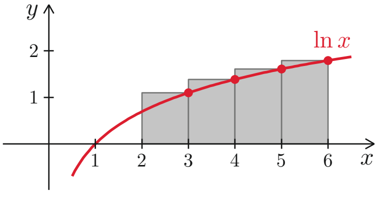


Je kleiner man die Grundseiten der Rechtecke Δx wählt, um so geringer ist der Unterschied zwischen Unter- und Obersumme. Wenn man n groß wählt, kann man die Fläche entsprechend genau berechnen.

Beispiel 9.1 (Unter- und Obersumme)

Die Fläche A unter der Funktion $f(x) = \ln x$ für x-Werte zwischen 2 und 6 soll mithilfe von Unter- und Obersumme näherungsweise berechnet werden.





Eine grobe Abschätzung erhält man mit $n = 4$ Rechtecken, deren Grundseiten die Länge $\Delta x = 1$ haben. Die Untersumme S_U und die Obersumme S_O ergeben

$$S_U = 1 \cdot \ln 2 + 1 \cdot \ln 3 + 1 \cdot \ln 4 + 1 \cdot \ln 5 = \ln(2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5) = \ln 120 \approx 4.7875,$$
$$S_O = 1 \cdot \ln 3 + 1 \cdot \ln 4 + 1 \cdot \ln 5 + 1 \cdot \ln 6 = \ln(3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6) = \ln 360 \approx 5.8861.$$

Der Wert des bestimmten Integrals muss zwischen den beiden berechneten Werten liegen:

$$4.7875 \approx \ln 120 \le A \le \ln 360 \approx 5.8861.$$

Mithilfe von Methoden, die wir in diesem Kapitel noch kennen lernen werden, kann man den exakten Wert der Fläche A für die Funktion f bei diesem Beispiel ermitteln:

$$A = 6 \ln 6 - 2 \ln 2 - 4 \approx 5.3643.$$

Untersumme und Obersumme liefern nur eine grobe Eingrenzung. Die generelle Vorgehensweise lässt sich zu einem praktikablen numerischen Verfahren erweitern, siehe *Abschnitt 9.5.1*. ■

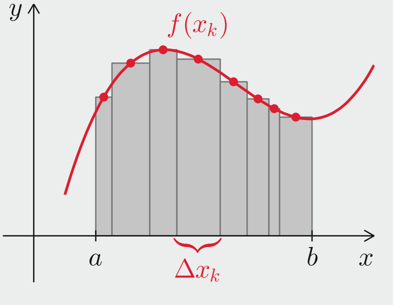
Die Grundseiten der Rechtecke müssen keinesfalls alle gleich groß sein. Wir können Rechtecke mit beliebigen Grundseiten Δx_k verwenden. Anstelle von minimalen und maximalen Funktionswerten können wir die Höhe der Rechtecke durch Funktionswerte $f(x_k)$ an einer beliebigen Stelle x_k im Rechteck festlegen. Wenn wir die Grundseiten der Rechtecke nun immer kleiner werden lassen, dann wird der Näherungswert der Fläche immer genauer. Somit können wir die Fläche unter einer Funktion mathematisch exakt als einen Grenzwert von Summen definieren.

Fläche als Grenzwert von Summen

Die Fläche unter einer stetigen und nicht negativen Funktion f entspricht dem Grenzwert von Summen

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x_k,$$

falls die Grundseiten der Rechtecke Δx_k gegen null streben und der Grenzwert der Rechtecksummen existiert. Dabei ist x_k eine Stelle innerhalb des Rechtecks mit Grundseite Δx_k.



Die Mantelfläche ist die Außenfläche eines Rotationskörpers. Bei der Mantelfläche werden die beiden Kreisscheiben, die den Boden und den Deckel des Körpers bilden, nicht berücksichtigt. Die komplette Oberfläche eines Rotationskörpers besteht also aus der Mantelfläche zusammen mit diesen beiden Kreisscheiben. Auf eine Herleitung der Formeln verzichten wir. Dafür führen wir eine Plausibilitätsbetrachtung durch: Den Ausdruck

$$L = \sqrt{1 + f'(x)^2}$$

kennen wir bereits aus der Formel zur Berechnung der Bogenlänge, siehe *Satz 9.15*. Diese Länge L wird mit dem Kreisumfang $U = 2\,\pi\, f(x)$ multipliziert. Die Funktionswerte $f(x)$ fungieren hier als Radien der einzelnen Kreise. Insgesamt werden also Ausdrücke der Form

„Umfang des Kreises mit Radius $f(x)$“ $\cdot$ „Länge des Kurvensegments“

aufsummiert. Im Spezialfall $f(x) = r$ ist die Ableitung für alle x-Werte null, es gilt also $f'(x) = 0$. Wir erhalten dann für die Mantelfläche eines senkrechten Kreiszylinders

$$M_x = 2\,\pi \int_a^b r \,\mathrm{d}x = 2\,\pi\, r\,(b - a)\ .$$

9.5 Numerische Verfahren

Es gibt verschiedene Gründe, die eine Annäherung von bestimmten Integralen durch numerische Näherungswerte erfordern. Beispielsweise gibt es elementare Funktionen, bei denen die Stammfunktionen nicht durch elementare Funktionen darstellbar sind. Bei Problemen aus der Praxis ist man oftmals schon deshalb auf numerische Integrationsmethoden angewiesen, weil man keine analytische Darstellung der Funktion selbst kennt. In diesen Fällen kann man lediglich Funktionswerte zu bestimmten Parameterwerten berechnen und daraus versuchen, einen möglichst guten Näherungswert für das Integral zu erzeugen.

Das Ziel bei der numerischen Integration sind Formeln, mit denen man Näherungswerte für den Wert eines bestimmten Integrals berechnen kann. Dabei wählt man nicht den Weg über Stammfunktionen, sondern man sucht nach Methoden, mit denen sich Flächeninhalte approximieren lassen. In den vergangenen Jahrhunderten haben sich zahlreiche Mathematiker mit dieser Problemstellung beschäftigt, wodurch eine ganze Reihe sogenannter Quadraturformeln entstanden sind. In der damaligen Zeit wurde die Integration als Quadratur bezeichnet.

Bei der numerischen Berechnung mithilfe von Computern setzt man Verfahren ein, die gute Näherungswerte mit möglichst wenig Rechenaufwand liefern. Gleichzeitig benötigt man verlässliche Abschätzungen für den maximalen Fehler zwischen dem Näherungswert und dem exakten Wert. Das Romberg-Verfahren, das wir in diesem Abschnitt vorstellen, erfüllt diese Anforderungen und wird bei der Lösung praktischer Probleme deshalb häufig eingesetzt.

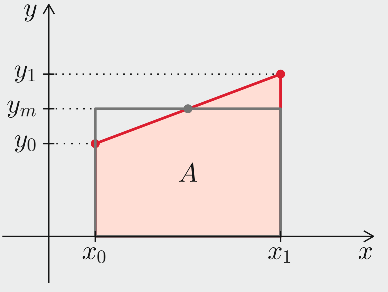
9.5.1 Trapezregel

In erster Näherung kann man den Flächeninhalt durch Rechtecksummen annähern. Diesen Aspekt haben wir in *Abschnitt 9.1.2* bereits ausführlich betrachtet. Eine deutliche Verbesserung bei der numerischen Berechnung des bestimmten Integrals erzielt man, indem man anstelle von Rechtecken Trapeze verwendet.

Trapez

Ein Viereck, das zumindest zwei parallele Seiten hat, bezeichnet man als **Trapez**. Die Fläche eines Trapezes ist genau gleich groß wie die Fläche des Rechtecks, das dieselbe Grundseite hat und dessen Höhe gerade dem Mittelwert y_m der beiden Höhen y_0 und y_1 des Trapezes entspricht:

$$A = (x_1 - x_0)\,\frac{y_0 + y_1}{2}.$$



Um eine Näherungsformel für das bestimmte Integral

$$I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

zu bestimmen, zerlegen wir das Intervall $[a, b]$ in n gleichlange Teilintervalle der Länge $h = \frac{b-a}{n}$ und werten die Funktion an insgesamt $n+1$ Stellen aus:

$$f(a),\ f(a+h),\ f(a+2\,h),\ \ldots,\ f(b-2\,h),\ f(b-h),\ f(b)$$

Dadurch entstehen Sehnentrapeze, deren Grundseiten alle dieselbe Länge h haben. Die Summe aller n Trapezflächen ergibt dann

$$\begin{aligned}\tilde{A} &= h\,\frac{f(a)+f(a+h)}{2} &&+\ h\,\frac{f(a+h)+f(a+2h)}{2} &&+\ \ldots\\ &+\ h\,\frac{f(b-2h)+f(b-h)}{2} &&+\ h\,\frac{f(b-h)+f(b)}{2}.\end{aligned}$$

Alle Funktionswerte außer dem ersten und dem letzten liefern einen Beitrag zu zwei Trapezen. Die Formel lässt sich dadurch etwas vereinfachen:

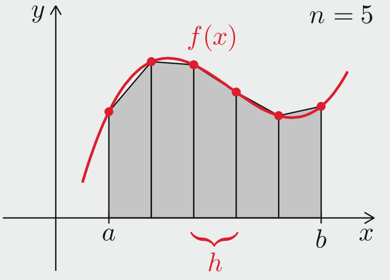
$$\tilde{A} = \frac{h}{2}\,f(a) + \underbrace{\frac{h}{2}\,f(a+h) + \frac{h}{2}\,f(a+h)}_{h\,f(a+h)} + \ldots + \underbrace{\frac{h}{2}\,f(b-h) + \frac{h}{2}\,f(b-h)}_{h\,f(b-h)} + \frac{h}{2}\,f(b).$$

Trapezregel

Das bestimmte Integral einer Funktion f über dem Intervall $[a, b]$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

kann man durch eine Summe von n Trapezflächen annähern. Die Trapeze haben eine Grundseite der Länge $h = \frac{b-a}{n}$.



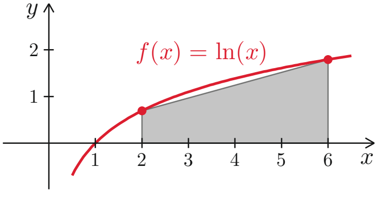
Die Funktionswerte müssen an $n+1$ Stellen berechnet werden. Die Formel zur Berechnung der Summe der Trapezflächen lautet

$$\tilde{A} = h\left(\tfrac{1}{2}\,f(a) + f(a+h) + f(a+2\,h) + \ldots + f(b-2\,h) + f(b-h) + \tfrac{1}{2}\,f(b)\right).$$

Beispiel 9.35 (Trapezregel)

Für $n = 1$ erhalten wir einen Näherungswert der Fläche unter der Funktion $f(x) = \ln x$ durch

$$h = \frac{b-a}{1} = \frac{6-2}{1} = 4$$

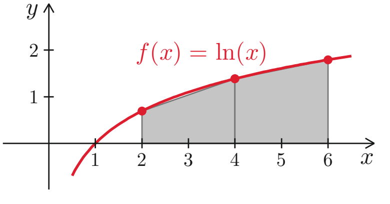


für x-Werte zwischen 2 und 6. Die Formel liefert

$$\tilde{A}_4 = 4\left(\frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{2}\ln 6\right) \approx 4.9698.$$

Bei $n = 2$ liefert die Schrittweite

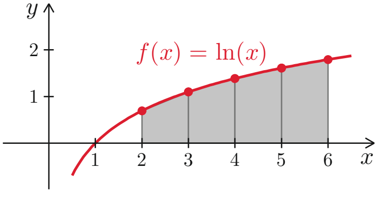
$$h = \frac{b-a}{2} = \frac{6-2}{2} = 2$$



den Näherungswert

$$\tilde{A}_2 = 2\left(\frac{1}{2}\ln 2 + \ln 4 + \frac{1}{2}\ln 6\right) \approx 5.2575.$$

Für $n = 4$ ist aus der Grafik kaum noch ein Unterschied zwischen der Originalfläche und den Trapezen zu erkennen. Die Grundseiten der Trapeze haben alle die Länge



$$h = \frac{b-a}{4} = \frac{6-2}{4} = 1.$$

Die Formel ergibt

$$\tilde{A}_1 = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\ln 2 + \ln 3 + \ln 4 + \ln 5 + \frac{1}{2}\ln 6\right) \approx 5.3368.$$

Die Trapezregel ergibt eine deutlich bessere Annäherung des exakten Wertes $A \approx 5.3643$ als die Annäherung durch Unter- und Obersumme, siehe *Beispiel 9.1*. ■

9.5.2 Romberg-Verfahren

Mit dem Romberg-Verfahren kann man aus Näherungswerten, die man mit der Trapezregel berechnet hat, einen noch besseren Näherungswert erzeugen. Die Idee besteht dabei darin, die Näherungswerte der Trapezregel als Funktion der Schrittweite h zu interpretieren. Aus theoretischer Sicht würde die Trapezregel mit Schrittweite $h = 0$ ein exaktes Ergebnis liefern. Praktisch kann man die Schrittweite $h = 0$ natürlich nicht verwenden. Man versucht deshalb, den Wert der Trapezregel mit Schrittweite $h = 0$ durch Extrapolation bekannter Werte möglichst gut zu schätzen. Eine genaue Beschreibung findet man bei [Mohr:Numerik].

Beispiel 9.36 (Romberg-Verfahren)

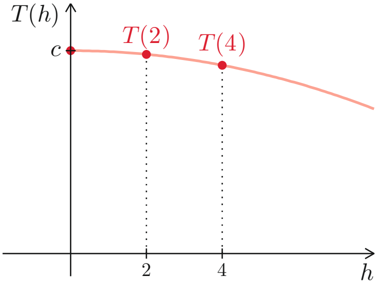
Wir verwenden die Näherungswerte aus *Beispiel 9.35*

$$T(4) \approx 4.9698, \quad T(2) \approx 5.2575$$

und bestimmen eine Parabel $T(h) = a\,h^2 + c$, die durch diese Punkte verläuft. Aus den Gleichungen

$$T(4) = 16\,a + c, \quad T(2) = 4\,a + c$$

lässt sich c ermitteln:



$$c = \frac{4\,T(2) - T(4)}{3} \approx 5.3534.$$

Dieser Wert ist der Funktionswert der Parabel an der Stelle $h = 0$. Verglichen mit dem exakten Wert $A \approx 5.3643$ aus *Beispiel 9.1*, ist c ein wesentlich besserer Näherungswert als die beiden Ausgangswerte $T(4)$ und $T(2)$. ■

9.6 Anwendungen

Wenn es bei Anwendungen darum geht, Funktionswerte über einen bestimmten Bereich zu summieren, kommen oft Integrale zum Einsatz. Wir betrachten zwei typische Beispiele, eines aus der Elektrotechnik und eines aus der Mechanik. Beim Effektivwert in der Elektrotechnik wird der zeitliche Verlauf eines Signals integriert. Bei Schwerpunkten und statischen Momenten in der Mechanik werden Funktionen über eine räumliche Distanz integriert.

9.6.1 Effektivwert

Energie, die wir über die Steckdose aus dem Stromnetz beziehen, ist in der Regel kein Gleichstrom, sondern Wechselstrom. In den meistern Ländern erfolgt die Spannungsversorgung durch sinusförmige Wechselspannungen mit einer Frequenz von 50 Hz oder 60 Hz. In Deutschland findet man auf Steckdosen und Geräten oft die Bezeichnung 230 V. Diese

Angabe bezeichnet aber nicht, wie oft behauptet wird, die Amplitude der sinusförmigen Wechselspannung. Tatsächlich liegt die Amplitude bei etwa $325\,\mathrm{V}$. In der Elektrotechnik bezeichnet man diesen Wert als Scheitelwert. Den Zusammenhang zwischen diesen beiden Angaben, also $230\,\mathrm{V}$ einerseits und Scheitelwert $325\,\mathrm{V}$ andererseits, werden wir im Folgenden klären.

Für den Verbraucher ist letztendlich entscheidend, welche Energie bzw. Leistung zur Verfügung gestellt wird. Zu diesem Zweck betrachtet man den sogenannten Effektivwert. Der Effektivwert ist folgendermaßen definiert: Bei einer Wechselspannung wird an einem ohmschen Widerstand über einen gewissen Zeitraum dieselbe Leistung umgesetzt wie bei einer Gleichspannung, deren Spannung dem Effektivwert entspricht. Aus der Elektrotechnik kennt man die Formel zur Berechnung des Effektivwerts, siehe [Küpfmüller],

$$U_{\mathrm{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)\,\mathrm{d}t}.$$

Dabei bezeichnet T die Periodendauer. Bei einer sinusförmigen Wechselspannung mit Kreisfrequenz $\omega = \frac{2\pi}{T}$ und Scheitelwert $\hat{U}$ erhalten wir

$$U_{\mathrm{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T \hat{U}^2 \sin^2(\omega\,t)\,\mathrm{d}t}.$$

Mit der Substitution $x = \omega\,t$ ergibt sich

$$U_{\mathrm{eff}} = \hat{U}\sqrt{\frac{1}{2\,\pi}\int_0^{2\,\pi} \sin^2 x\,\mathrm{d}x}.$$

Der Effektivwert ist also unabhängig von der Periode T und der Kreisfrequenz ω. Das Integral berechnen wir mithilfe einer Stammfunktion, siehe *Beispiel 9.22*,

$$U_{\mathrm{eff}} = \hat{U}\sqrt{\frac{1}{2\,\pi}\left(-\frac{1}{2}\left(\sin x\cos x - x\right)\right)\Big|_0^{2\,\pi}} = \hat{U}\sqrt{\frac{1}{2\,\pi}\,\pi} = \hat{U}\,\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Bei einem sinusförmigen Verlauf ist der Scheitelwert also immer um den Faktor $\sqrt{2}$ größer als der Effektivwert. Bei einem Scheitelwert von $\hat{U} = 325\,\mathrm{V}$ erhalten wir den Effektivwert

$$U_{\mathrm{eff}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,325\,\mathrm{V} \approx 230\,\mathrm{V}.$$

9.6.2 Schwerpunkte und statische Momente ebener Flächen

Der Schwerpunkt eines Objekts ist in der technischen Mechanik von zentraler Bedeutung. Kräfte, die im Schwerpunkt angreifen, verändern das Rotationsverhalten nicht. Oder anders formuliert, wirkt eine Kraft in einer gewissen Entfernung vom Schwerpunkt auf ein

12 Funktionen mit mehreren Variablen

Bislang haben wir ausschließlich Funktionen betrachtet, die von einer unabhängigen Variablen abhängen. In Anwendungen treten aber häufig Funktionszusammenhänge auf, bei denen der Funktionswert etwa von der Zeit und vom Ort abhängt. Deshalb erweitern wir den Funktionsbegriff auf mehrere unabhängige Variable. Je nach Art der Problemstellung hat man so zwei, drei oder noch mehr unabhängige Variable. Wir werden in diesem Kapitel im Wesentlichen Funktionen mit zwei Variablen untersuchen. Die Verallgemeinerung von zwei auf drei und mehr Variable ist an den meisten Stellen ohne neue Gedanken durchführbar.

12.1 Definition und Darstellung

In diesem Abschnitt klären wir, wie man Funktionen mit mehreren Variablen formal definiert. Außerdem erläutern wir Methoden zur grafischen Darstellung. Dazu betrachten wir einfache Beispiele von Funktionen mit zwei Variablen.

12.1.1 Definition einer Funktion mit mehreren Variablen

Bei Funktionen mit mehreren Variablen ist die Definitionsmenge eine Teilmenge des entsprechenden Raumes. So liegt die Definitionsmenge einer Funktion mit zwei Variablen in der Ebene. Jedem Punkt dieser Definitionsmenge in der Ebene wird dann durch die Funktion ein Funktionswert zugeordnet.

Definition 12.1 (Funktion mit zwei Variablen)

Unter einer **Funktion f mit zwei Variablen** versteht man eine Abbildung, die jedem Zahlenpaar (x, y) aus einer **Definitionsmenge** $D \subseteq \mathbb{R}^2$ genau eine reelle Zahl z aus einer **Zielmenge** W zuordnet:

$$(x, y) \mapsto z = f(x, y), \quad (x, y) \in D.$$

Für drei und mehr unabhängige Variable sind die Schreibweisen

$$f(x, y, z), \quad f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n), \quad f(\boldsymbol{x})$$

gebräuchlich. Dabei bezeichnet $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ einen Vektor.

12.1.2 Schaubild einer Funktion mit mehreren Variablen

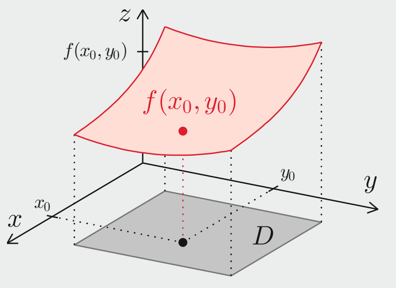
Das Schaubild von Funktionen mit einer Variablen kann man in der Ebene darstellen. Zur Visualisierung von Funktionen mit zwei Variablen benötigt man eine weitere Dimension. Funktionsschaubilder sind nun Flächen im dreidimensionalen Raum. Hier wird deutlich, dass die grafische Darstellung von Funktionen mit drei und mehr Variablen mindestens einen vierdimensionalen Raum erfordert, was jedoch die menschliche Vorstellungskraft vor große Herausforderungen stellt.

Schaubild

Das Schaubild einer Funktion

$$z = f(x, y)$$

ist eine Fläche im Raum. Dabei gibt es zu jedem Punkt (x_0, y_0) der Definitionsmenge D genau einen Punkt $z_0 = f(x_0, y_0)$ auf der Fläche.



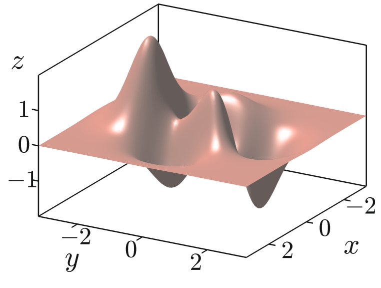
Durch Visualisierungssoftware lassen sich selbst komplexe Funktionen mit zwei Veränderlichen ansprechend darstellen. Zur Erzeugung möglichst realistischer Bilder verwendet man dabei unterschiedliche Methoden der Computergrafik.

Beispiel 12.1 (Peaks)

Die Funktion

$$\begin{aligned} f(x, y) &= (1 + x)^2 \, \mathrm{e}^{-x^2-(1-y)^2} \\ &- 3(x^3 + y^5 - x) \, \mathrm{e}^{-x^2-y^2} \\ &- \mathrm{e}^{-(1-x)^2-y^2} \end{aligned}$$

beschreibt eine Fläche im Raum, die aus mehreren e-Funktionen zusammengesetzt ist. Alle beteiligten e-Funktionen haben negative Exponenten, sodass die Funktionswerte, mit zunehmender Entfernung der x-Werte und y-Werte vom Ursprung schnell gegen null gehen.



12.1.3 Schnittkurven mit Ebenen und Höhenlinien

Um einen Eindruck vom Verlauf einer Fläche zu bekommen, kann man Schnitte durch das Funktionsschaubild legen. In einer Schnittebene wird die Fläche auf eine Kurve reduziert. Man erhält also ein zweidimensionales Schaubild, wie wir es bereits von Funktionen mit einer Variablen kennen.

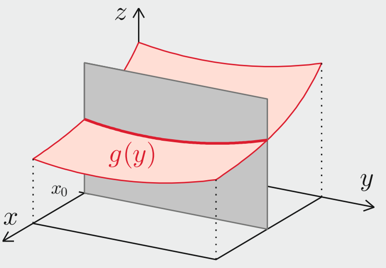
Am einfachsten sind vertikale und horizontale Schnitte zu realisieren. Durch Festhalten der Größen $x = x_0$, $y = y_0$ oder $z = z_0$ erhält man Schnittkurven, die parallel zur y-z-Ebene, zur x-z-Ebene oder zur x-y-Ebene verlaufen. Spezielle Schnittkurven erhält man für $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ oder $z_0 = 0$. Dann gehen die Schnittebenen durch den Ursprung.

Schnitte mit Ebenen parallel zur y-z-Ebene

Schneidet man das Schaubild einer Funktion mit zwei Variablen $z = f(x, y)$ mit der Ebene $x = x_0$, so erhält man die Funktionsgleichung der Schnittkurve

$$z = g(y) = f(x_0, y)$$

durch Einsetzen des festen Wertes $x = x_0$ in die Funktion f. Dabei liegt die Schnittkurve in einer Ebene, die parallel zur y-z-Ebene verläuft.

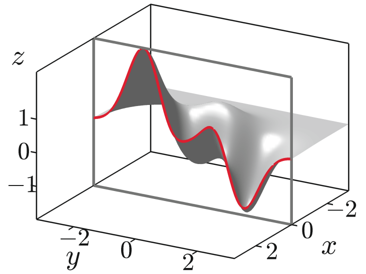


Beispiel 12.2 (Peaks geschnitten mit y-z-Ebene)

Die Schnittkurve der Funktion aus *Beispiel 12.1* mit der y-z-Ebene erhalten wir durch Einsetzen von $x = 0$ in die Funktionsgleichung

$$g(y) = e^{-(1-y)^2} - 3y^5 e^{-y^2} - e^{-1-y^2}.$$

Dadurch ergibt sich eine Funktion $g(y)$, die nur von der Variablen y abhängt.



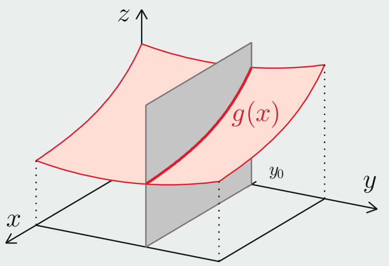
Schnittkurven mit Ebenen parallel zur y-z-Ebene oder zur x-z-Ebene einer Funktion mit zwei Variablen lassen sich problemlos durch Einsetzen entsprechender Werte ermitteln. Die Schnittkurven sind Schaubilder von Funktionen in der jeweiligen Schnittebene.

Schnitte mit Ebenen parallel zur x-z-Ebene

Schneidet man das Schaubild einer Funktion mit zwei Variablen $z = f(x, y)$ mit der Ebene $y = y_0$, so erhält man die Funktionsgleichung der Schnittkurve

$$z = g(x) = f(x, y_0)$$

durch Einsetzen des festen Wertes $y = y_0$ in die Funktion f. Dabei liegt die Schnittkurve in einer Ebene, die parallel zur x-z-Ebene verläuft.

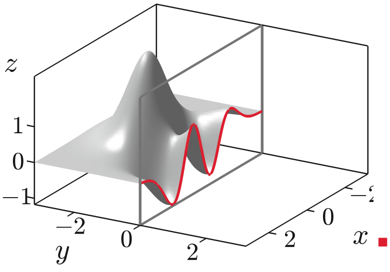


Beispiel 12.3 (Peaks geschnitten mit x-z-Ebene)

Die Schnittkurve der Funktion aus *Beispiel 12.1* mit der x-z-Ebene erhalten wir durch Einsetzen von $y = 0$ in die Funktionsgleichung

$$g(x) = (1+x)^2 e^{-x^2-1} - 3(x^3-x)e^{-x^2} - e^{-(1-x)^2}.$$

Die entstehende Funktion $g(x)$ hängt nur von der Variablen x ab.



Definition 12.2 (Höhenlinien)

Die Schnittkurven der Ebenen $z = z_0$, die parallel zur x-y-Ebene verlaufen, mit dem Schaubild der Funktion $z = f(x, y)$ nennt man **Höhenlinien**, **Konturlinien** oder **Niveaulinien**.

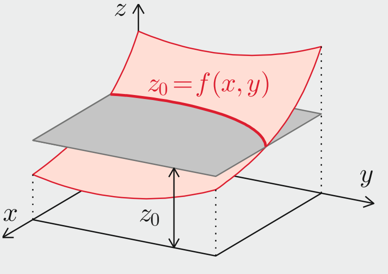
Während die Schnittkurven für $x = x_0$ und $y = y_0$ Kurven in expliziter Form ergeben, ist die Situation bei Schnittkurven für $z = z_0$ anders. Hier entstehen Kurven in impliziter Darstellung. Dies erschwert in der Regel das Erstellen einer Grafik mit x-y-Schnittkurven. Anschaulich kann man sich die Niveaulinien als Höhenlinien eines Gebirges vorstellen. Bei Landkarten bezeichnet man Höhenlinien als Isohypsen.

Höhenlinien

Die Höhenlinien der Funktion $z = f(x, y)$ zum Niveau $z = z_0$, erfüllen die implizite Gleichung

$$z_0 = f(x, y).$$

Entlang einer Höhenlinie hat die Funktion f den konstanten Wert z_0. Höhenlinien zu unterschiedlichen Niveauwerten z_0 schneiden sich nicht.

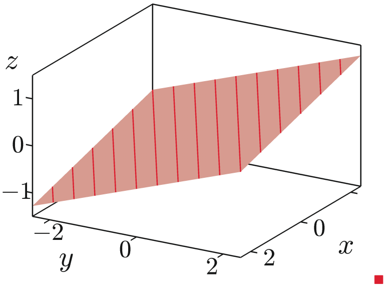


Beispiel 12.4 (Ebene)

Die Funktion

$$f(x, y) = -\frac{1}{5}\,x + \frac{1}{3}\,y$$

ist eine lineare Funktion in x und y. Die Funktion ist auf ganz $\mathbb{R}^2$ definiert. Alle Schnittkurven mit Ebenen sind Geraden. Das Schaubild ist eine Ebene. In x-Richtung nehmen die Funktionswerte ab und in y-Richtung nehmen sie zu.

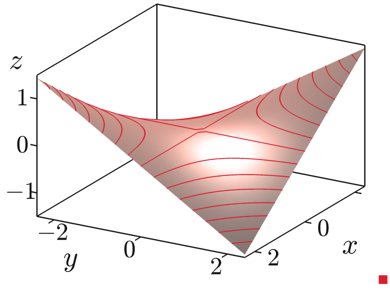


Beispiel 12.5 (Hyperbolisches Paraboloid)

Das Schaubild der Funktion

$$f(x,y) = -\frac{1}{4}\,x\,y$$

besteht aus einem sogenannten hyperbolischen Paraboloid. Die Schnittkurven für $x = x_0$ und $y = y_0$ sind Geraden. Höhenlinien haben die Form $z_0 = -\frac{1}{4}\,x\,y$, sie sind also rechtwinklige Hyperbeln.

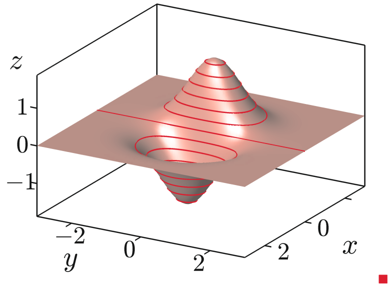


Beispiel 12.6 (Zusammengesetzte Exponentialfunktion)

Die Funktion

$$f(x,y) = -4\,x\,\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$$

entsteht im Wesentlichen durch Multiplikation der Variablen x mit einer Exponentialfunktion. Je weiter man sich vom Ursprung entfernt, desto kleiner werden die Funktionswerte.



Rotationssymmetrische Funktionen sind Funktionen, bei denen der Funktionswert $f(x,y)$ nur von Radius $r = \sqrt{x^2+y^2}$ abhängt. Die unabhängigen Variablen treten also nur in der Form $x^2 + y^2$ auf. Die Schaubilder solcher Funktionen sind rotationssymmetrisch bezüglich der z-Achse. Die Höhenlinien von Rotationsflächen sind konzentrische Kreise.

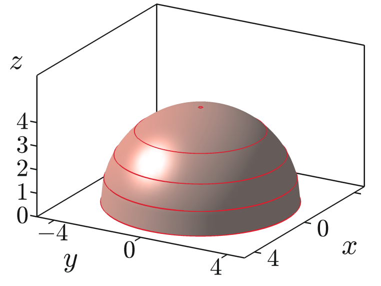
Beispiel 12.7 (Halbkugel)

Das Schaubild der rotationssymmetrischen Funktion

$$f(x,y) = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$$

stellt die obere Hälfte der Kugel mit Radius 4 und Mittelpunkt im Ursprung dar. Definitions- und Wertemenge sind

$$D = \{(x,y)\,|\,x^2 + y^2 \leq 16\}, \quad W = [0,4].$$



Die Schnittkurven für $x_0 = 0$ und $y_0 = 0$ sind

$$g_1(y) = \sqrt{16 - y^2}, \quad g_2(x) = \sqrt{16 - x^2},$$

also Halbkreise um den Ursprung mit Radius 4. Höhenlinien sind implizit durch die Gleichung

$$x^2 + y^2 = 16 - z_0^2$$

festgelegt und existieren für $0 \leq z_0 \leq 4$. Dies sind konzentrische Kreise mit Radius $r = \sqrt{16 - z_0^2}$, deren Mittelpunkte im Abstand z_0 zum Ursprung auf der z-Achse liegen. Für $z_0 = 4$ entartet der Kreis zu einem Punkt. Die Abbildung zeigt die Höhenlinien für $z_0 = 0, 1, 2, 3, 4$.

Höhenlinien von Rotationsflächen

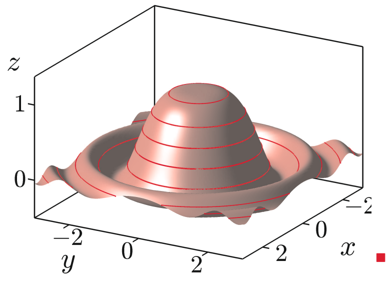
Die Höhenlinien von Rotationsflächen sind konzentrische Kreise um den Ursprung.

Beispiel 12.8 (Sombrero)

Die Funktion

$$f(x, y) = \frac{\sin\left(x^2 + y^2\right)}{x^2 + y^2}$$

besteht aus einem rotationssymmetrischen Sinus, dessen Amplitude mit dem Radius abnimmt. Das Schaubild hat die Gestalt eines Sombreros. Die Funktion kann mit dem Wert 1 stetig in den Ursprung fortgesetzt werden.



12.2 Grenzwert und Stetigkeit

Analog zu Funktionen mit einer Variablen gibt es auch bei Funktionen mit mehreren Variablen den Begriff der Stetigkeit. Man muss allerdings gleich erwähnen, dass die Situation hier etwas komplizierter ist. Im Eindimensionalen lautet die anschauliche Definition der Stetigkeit: Eine Funktion ist stetig, wenn man ihr Schaubild ohne abzusetzen zeichnen kann. Diese anschauliche Definition lässt sich nicht ohne Weiteres auf zwei Variablen erweitern.

12.2.1 Grenzwert einer Funktion mit mehreren Variablen

Wir werden im zweidimensionalen Raum keine exakten Definitionen für Folgen und Grenzwerte einführen. Stattdessen beschreiben wir anschaulich, was der Grenzwert

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y)$$

bedeutet. Der Grenzwert existiert genau dann, wenn bei jeder Annäherung an die Stelle (x_0, y_0) die Folge der Funktionswerte gegen denselben Grenzwert konvergiert. Dabei müssen wir beachten, dass die Annäherung aus jeder Richtung der x-y-Ebene geschehen kann. Es müssen also viel mehr Möglichkeiten als im Fall einer Variablen geprüft werden.

Bei drei Variablen definiert man den Funktionsgrenzwert durch

$$\lim_{(x,y,z)\to(x_0,y_0,z_0)} f(x, y, z),$$

und bei mehr als drei Variablen entsprechend.

13 Komplexe Zahlen und Funktionen

Obwohl bereits *Leonhard Euler* und *Johann Carl Friedrich Gauß* das Zeichen i für imaginäre Einheit eingeführt haben, wurde die Bedeutung der komplexen Zahlen für die Mathematik erst Anfang des 19. Jahrhunderts erkannt. Etwa zeitgleich fand durch die Erfindung der elektrischen Telegrafie der Einstieg in die elektronische Nachrichtenübermittlung statt. Dadurch sind wir heute in der Lage, Informationen mit Telefon, Fernsehen und Computer in Echtzeit zu übermitteln. Trotzdem gibt es nach wie vor gute Gründe dafür, dass viele Informationen in nicht elektronischer Form, etwa durch Briefe, Bücher oder Zeitschriften übermittelt werden. Mit den reellen und komplexen Zahlen verhält es sich ganz ähnlich. Viele Problemstellungen lassen sich durch komplexe Zahlen einfacher beschreiben und mithilfe komplexer Zahlen schneller und einfacher lösen. Trotzdem kommt man bei einer ganzen Reihe von Problemstellungen in der Mathematik auch ganz gut ohne komplexe Zahlen zurecht.

Im Zusammenhang mit komplexen Zahlen treten Begriffe wie imaginäre Einheit und Imaginärteil auf. Dadurch gewinnt man leicht den Eindruck, dass komplexe Zahlen fiktive Gebilde sind, die keine Bedeutung für die reale Welt haben. Genau das Gegenteil ist jedoch der Fall. Komplexe Zahlen sind genau so real wie die reellen Zahlen. An die reellen Zahlen haben wir uns nur schon gewöhnt. Die Liebe zu den komplexen Zahlen ist meistens keine Liebe auf den ersten Blick. Wer jedoch das Prinzip einmal durchschaut hat, möchte die komplexen Zahlen nie mehr missen.

13.1 Definition und Darstellung

Wenn in der Mathematik eine neue Zahlenmenge eingeführt wird, muss es dafür einen plausiblen Grund geben, siehe *Abschnitt 1.2*. Es stellt sich also die Frage, welche mathematischen Probleme nicht mit reellen Zahlen gelöst werden können. Beim Rechnen mit reellen Zahlen sind wir immer wieder auf das Problem gestoßen, dass unter der Wurzel keine negative Zahl stehen darf. Oder anders formuliert: Es gibt keine reelle Zahl, deren Quadrat eine negative Zahl ergibt. Die grundlegende Idee der komplexen Zahlen besteht darin, die reellen Zahlen so zu erweitern, dass dieses Manko behoben wird.

13.1.1 Komplexe Zahlen

Die Basis für die komplexen Zahlen wird durch die Definition einer imaginären Einheit gelegt. Die imaginäre Einheit ist dadurch festgelegt, dass das Quadrat der imaginären Einheit -1 ergibt. Die imaginäre Einheit ist somit keine reelle Zahl, sondern etwas Neues.

In der Mathematik ist es üblich, die komplexe Einheit mit i zu bezeichnen. Um Verwechslungen mit der Abkürzung für die Stromstärke zu vermeiden, verwendet man in der Elektrotechnik manchmal die Schreibweise j.

Definition 13.1 (Imaginäre Einheit)
Die **imaginäre Einheit** i ist definiert durch

$$\mathrm{i}^2 = -1.$$

In *Definition 13.1* haben wir bewusst nicht die Formulierung $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$ gewählt. In *Abschnitt 13.3.2* werden wir klären, wie das Wurzelsymbol im Zusammenhang mit komplexen Zahlen zu verstehen ist.

Ausgehend von der komplexen Einheit i definiert man die Menge der komplexen Zahlen. Dabei geht man so ähnlich wie bei Koordinaten von Punkten oder Vektoren vor. Jede komplexe Zahl besitzt eine reelle und eine imaginäre Komponente.

Definition 13.2 (Komplexe Zahlen)
Die Menge der **komplexen Zahlen** ist definiert durch

$$\mathbb{C} = \left\{ z = x + \mathrm{i}\, y \mid x, y \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{i}^2 = -1 \right\}.$$

Dabei bezeichnet die reelle Zahl x den **Realteil** $\mathrm{Re}(z)$ und die reelle Zahl y den **Imaginärteil** $\mathrm{Im}(z)$ der komplexen Zahl $z = x + \mathrm{i}\, y$.

Die Menge der reellen Zahlen ist eine echte Teilmenge der komplexen Zahlen. Sie besteht aus allen komplexen Zahlen mit Imaginärteil null. Alle komplexen Zahlen der Form $z = \mathrm{i}y$, also alle komplexen Zahlen mit Realteil null, bezeichnet man als rein imaginäre Zahlen.

Beispiel 13.1 (Komplexe Zahlen)

a) Die komplexe Zahl $z_1 = 1 - \mathrm{i}$ hat den Realteil 1 und den Imaginärteil -1.
b) Die Zahl $z_2 = 2\mathrm{i}$ hat den Realteil 0 und den Imaginärteil 2.
c) Durch $z_3 = 1$ wird eine komplexe Zahl mit Realteil 1 und Imaginärteil 0 festgelegt. ■

13.1.2 Gaußsche Zahlenebene

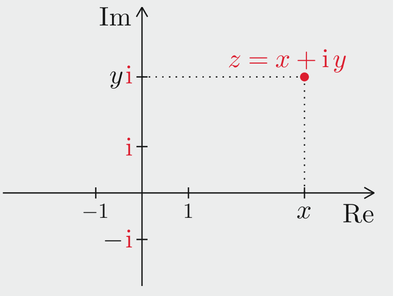
Eine komplexe Zahl hat zwei reelle Anteile, den Realteil und den Imaginärteil. Dabei ist unbedingt zu beachten, dass der Imaginärteil eine reelle Zahl ist und die imaginäre Einheit i nicht enthält. Eine komplexe Zahl besitzt zwei unabhängige Komponenten. Deshalb reicht zur Darstellung komplexer Zahlen ein Zahlenstrahl, wie wir es von den reellen Zahlen gewohnt sind, nicht aus.

Gaußsche Zahlenebene

Die grafische Darstellung der Menge der komplexen Zahlen in einem kartesischen Koordinatensystem bezeichnet man als **Gaußsche Zahlenebene**. Die horizontale Achse ist die **reelle Achse** und die vertikale Achse die **imaginäre Achse**. Die Darstellung durch

$$z = x + \mathrm{i}\, y$$

bezeichnet man als **kartesische Form**.



Korrekterweise muss die Einheit i bei der Beschriftung der imaginären Achse angegeben werden. An vielen Stellen wird jedoch diese mathematische Feinheit ignoriert und die imaginäre Achse ohne die imaginäre Einheit beschriftet. Oftmals werden komplexe Zahlen in der Gaußschen Zahlenebene nicht nur durch Punkte, sondern durch Pfeile dargestellt.

13.1.3 Polarkoordinaten

Für komplexe Zahlen haben sich mehrere Darstellungsformen etabliert. In kartesischen Koordinaten verwendet man den Realteil und den Imaginärteil, um eine komplexe Zahl zu beschreiben. In Polarkoordinaten betrachtet man den Abstand einer komplexen Zahl vom Ursprung und den Winkel, den eine komplexe Zahl mit der positiven reellen Achse bildet. Beim Arbeiten mit komplexen Zahlen muss man mit beiden Darstellungen vertraut sein. Es gibt Problemstellungen, die sich in kartesischer Form leichter lösen lassen als in Polarkoordinaten. Andere Probleme wiederum lassen sich eleganter in Polarkoordinaten lösen.

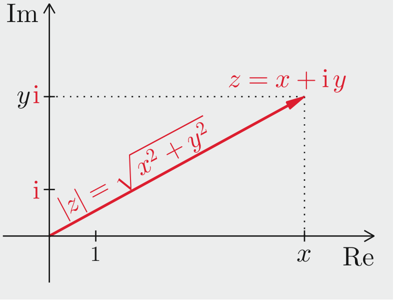
Definition 13.3 (Betrag einer komplexen Zahl)

Der **Betrag** der komplexen Zahl z ist der Abstand von z zum Ursprung. In kartesischer Form

$$z = x + \mathrm{i}\, y$$

gilt

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

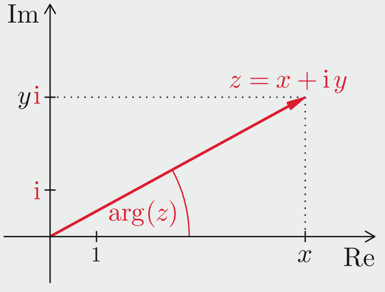


Wenn man zusätzlich zum Betrag auch noch einen Winkel für eine komplexe Zahl festlegt, dann ist die Zahl dadurch eindeutig beschrieben. Bei komplexen Zahlen wird der Winkel bezüglich der positiven reellen Achse gemessen.

Definition 13.4 (Argument einer komplexen Zahl)

Das **Argument** der komplexen Zahl $z = x + \mathrm{i}\, y$ mit $z \neq 0$ ist der Winkel von z. Es gilt:

$$\arg(z) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{für } x > 0, y \text{ bel.} \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & \text{für } x < 0, y \geq 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \pi & \text{für } x < 0, y < 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{für } x = 0, y > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{für } x = 0, y < 0\,. \end{cases}$$



Der Arkustangens liefert Werte zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$. Abhängig vom Quadranten, indem die komplexe Zahl liegt, muss man deshalb bei der Winkelberechnung π addieren oder subtrahieren. Die Formel zur Berechnung des Winkels in *Definition 13.4* liefert dadurch Werte im Intervall von $(-\pi, \pi]$. Zahlen auf der positiven reellen Achse haben das Argument 0, auf der positiven imaginären Achse das Argument $\frac{\pi}{2}$, auf der negativen reellen Achse das Argument π und auf der negativen imaginären Achse das Argument $-\frac{\pi}{2}$.

Bei der komplexen Zahl Null liegt eine Ausnahmesituation vor. Der Zahl Null ist kein eindeutiger Winkel zugeordnet. Meistens umgeht man dieses Problem, indem man der Zahl Null den Winkel null zuordnet.

Bei praktischen Problemstellungen wird man oft mit Winkelberechnungen konfrontiert. In vielen Programmiersprachen gibt es deshalb eine erweiterte Arkustangensfunktion, die in der Regel mit atan2 bezeichnet wird:

$$\arg(x + \mathrm{i}\, y) = \text{atan2}(y, x).$$

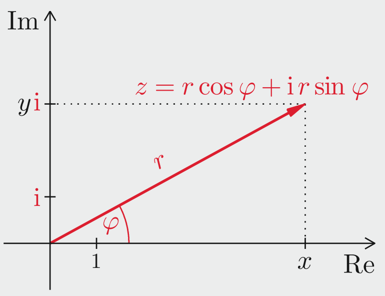
Die Winkelzuordnung bei den komplexen Zahlen hat einen Schönheitsfehler. Beim Wechsel über die negative reelle Achse springen die Winkelwerte um 2π. Dieser Schönheitsfehler lässt sich genau so wenig beseitigen wie die Datumsgrenze entlang des 180. Längengrads.

Definition 13.5 (Polarform, Polarkoordinaten)

Die Darstellung einer komplexen Zahl z mit Betrag r und Winkel φ in der Form

$$z = \underbrace{r\,\cos\varphi}_{\mathrm{Re}(z)} + \mathrm{i}\,\underbrace{r\,\sin\varphi}_{\mathrm{Im}(z)}$$

nennt man **Polarform**. Man bezeichnet r und φ als **Polarkoordinaten** von z.



In Polarkoordinaten sind auch Winkel außerhalb des Intervalls $(-\pi, \pi]$ zulässig. Dabei ist zu beachten, dass Winkel, die sich um ein ganzzahliges Vielfaches von 2π unterscheiden, bei gleichem Radius dieselbe komplexe Zahl darstellen.

13.1.4 Exponentialform

Mitte des 18. Jahrhunderts hat *Leonhard Euler* einen verblüffenden Zusammenhang zwischen der Kreiszahl π, der Eulerschen Zahl e und der imaginären Einheit i entdeckt:

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi} = -1.$$

Durch die imaginäre Einheit i entsteht also eine mathematische Verbindung zwischen der Wachstumskonstante e und der trigonometrischen Konstante π. Dieser Zusammenhang lässt sich auf die e-Funktion und die trigonometrischen Funktionen Sinus und Kosinus erweitern.

Satz 13.1 (Eulersche Identität)
Für jede reelle Zahl φ gilt die **Eulersche Identität**

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\varphi} = \cos\varphi + \mathrm{i}\,\sin\varphi.$$

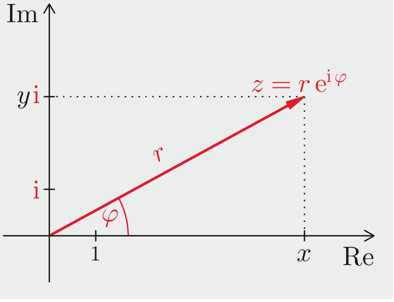
Diese Beziehung wird auch als **Satz von Euler** oder **Euler-Formel** bezeichnet. Außerdem gilt stets $\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\varphi}\right| = 1$.

Die Eulersche Identität lässt sich mithilfe von Potenzreihen beweisen, siehe *Kapitel 10*. Durch die Eulersche Identität und durch Polarkoordinaten ergibt sich die sogenannte Exponentialform einer komplexen Zahl.

Definition 13.6 (Exponentialform)
Die Darstellung einer komplexen Zahl z mithilfe der Eulerschen Zahl e

$$z = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\varphi}$$

nennt man **Exponentialform**. Dabei sind der Betrag $|z| = r$ und das Argument $\arg(z) = \varphi$ die Polarkoordinaten der komplexen Zahl z.



Die Exponentialform ist beim Arbeiten mit komplexen Zahlen sehr hilfreich. Insbesondere werden wir die Potenzgesetze aus *Satz 1.4* verwenden, um Potenzen und Wurzeln von komplexen Zahlen zu berechnen.

Beispiel 13.2 (Komplexe Zahlen)

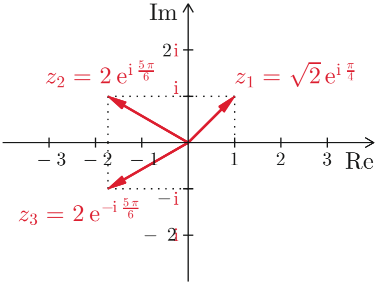
Die komplexe Zahl $z_1 = 1 + \mathrm{i}$ lässt sich von der kartesischen Form in die Exponentialform umrechnen:

$$|z_1| = \sqrt{2}, \quad \arg(z_1) = \arctan\frac{1}{1} = \frac{\pi}{4}.$$

Die Zahl $z_2 = 2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}$ lautet in kartesischer Form

$$z_2 = 2\cos\frac{5\pi}{6} + 2\,\mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{6} = -\sqrt{3} + \mathrm{i}.$$

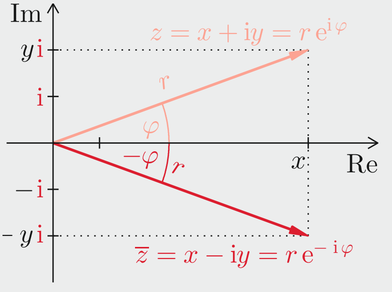
Die Zahl $z_3 = 2\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}$ liegt im dritten Quadranten.



Definition 13.7 (Konjugiert komplexe Zahl)

Die **konjugiert komplexe Zahl** $\overline{z}$ einer komplexen Zahl z erhält man durch Spiegeln an der reellen Achse:

- $z = x + \mathrm{i}\,y \implies \overline{z} = x - \mathrm{i}\,y$
- $z = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\varphi} \implies \overline{z} = r\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\varphi}$



Manchmal verwendet man auch die Bezeichnung z^* für die konjugiert komplexe Zahl von z. Die Eulersche Identität besagt, dass man eine e-Funktion mit imaginärem Exponenten mithilfe von Sinus und Kosinus ausdrücken kann. Umgekehrt lassen sich Sinus und Kosinus auch mit e-Funktionen mit imaginären Exponenten darstellen. Dazu betrachten wir die Eulersche Identität einmal für den Winkel φ und einmal für den Winkel $-\varphi$. Durch Addition bzw. Subtraktion der beiden Identitäten ergibt sich

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\varphi} & = & \cos\varphi + \mathrm{i}\,\sin\varphi \\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\varphi} & = & \cos\varphi - \mathrm{i}\,\sin\varphi \\ \hline \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\varphi} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\varphi} & = & 2\cos\varphi \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\varphi} & = & \cos\varphi + \mathrm{i}\,\sin\varphi \\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\varphi} & = & \cos\varphi - \mathrm{i}\,\sin\varphi \\ \hline \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\varphi} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\varphi} & = & 2\,\mathrm{i}\,\sin\varphi \end{array}$$

Satz 13.2 (Darstellung von Sinus und Kosinus durch komplexe e-Funktionen)

Der Sinus und der Kosinus lassen sich für jede reelle Zahl φ mithilfe von e-Funktionen mit imaginären Exponenten darstellen:

- $\cos\varphi = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\varphi} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\varphi}}{2}$
- $\sin\varphi = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\varphi} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\varphi}}{2\,\mathrm{i}}$

21 Elementare Zahlentheorie

Mit Teilbarkeitseigenschaften ganzer Zahlen, wie etwa der Modulo-Rechnung, hat sich die Mathematik schon in der Antike beschäftigt. Man bezeichnet dieses Teilgebiet als elementare oder arithmetische Zahlentheorie. Durch den Einsatz von Computern besitzt die elementare Zahlentheorie heute vielfältige praktische Anwendungen. Dabei spielen oft Primzahlen eine entscheidende Rolle. Beispiele sind Codes mit sogenannten Prüfziffern, wie etwa die ISBN-Nummern im Buchhandel, die EAN-Barcodes zur Produktkennzeichnung, die IBAN-Kontonummern der Banken und die Personalausweisnummern. Diese Prüfziffern helfen, die Eingabe- und Übertragungsfehler dieser Codes zu reduzieren.

21.1 Teilbarkeit

Einige Begriffe der elementaren Zahlentheorie sind so nahe liegend, dass wir uns schwer tun, die Notwendigkeit einer mathematischen Definition zu akzeptieren. Ein typisches Beispiel ist der Begriff der Teilbarkeit.

Definition 21.1 (Teilbarkeit)

Man nennt eine ganze Zahl m einen **Teiler** der ganzen Zahl n, falls n ein ganzzahliges Vielfaches von m ist:

$$m \mid n \quad \Longleftrightarrow \quad \text{es gibt eine Zahl } q \in \mathbb{Z} \text{ mit } n = q \cdot m\,.$$

Beispiel 21.1 (Teilbarkeit)

a) $7 \mid 91$, denn $91 = 13 \cdot 7$.

b) $13 \mid -1963$, denn $-1963 = -151 \cdot 13$. ■

Satz 21.1 (Rechenregeln für Teilbarkeit)

Für beliebige ganze Zahlen ℓ, m und n gilt:

- $m \mid 0$
- $m \mid m$
- $m \mid n \quad \Longrightarrow \quad m \mid \ell \cdot n$
- $m \mid n \quad \Longrightarrow \quad m \mid -n$
- $m \mid n$ und $m \mid \ell \quad \Longrightarrow \quad m \mid (n + \ell)$
- $m \mid n$ und $m \mid \ell \quad \Longrightarrow \quad m \mid (n - \ell)$

Die Division zweier ganzer Zahlen geht in der Regel nicht ohne Rest auf. Diesen Divisionsrest bezeichnet man als Modulo.

Definition 21.2 (Modulo)

Den Rest r, der beim Teilen einer ganzen Zahl n durch eine ganze Zahl m entsteht, bezeichnet man als **Modulo**:

$$r = n \mod m \quad \Longleftrightarrow \quad \text{es gibt eine Zahl } q \in \mathbb{Z} \text{ mit } n = q \cdot m + r\,.$$

Der Rest r liegt in der Menge $\mathbb{Z}_m = \{0, 1, \ldots, |m| - 1\}$.

Für den Divisionsrest hat man eine Art normierten Bereich festgelegt. Bei der Rechnung modulo m besteht dieser Bereich aus den Zahlen von 0 bis maximal $|m| - 1$, der mit $\mathbb{Z}_m$ bezeichnet wird. Durch das Betragszeichen wird auch der Fall $m < 0$ berücksichtigt.

Beispiel 21.2 (Modulo)

a) $30 \mod 13 = 4$, denn $30 = 2 \cdot 13 + 4$.

b) $-30 \mod 13 = 9$, denn $-30 = -3 \cdot 13 + 9$.

c) $12345 \mod 13 = 8$, denn $12345 = 949 \cdot 13 + 8$.

d) Für $n > 1$ gilt: $2n - 1 \mod n = n - 1$, denn $2n - 1 = 1 \cdot n + n - 1$. ■

Es gibt eine Reihe von Zahlen m, für die der Modulo-Rest r einfach zu bestimmen ist. Beispielsweise ist bei $m = 2$ der Modulo-Rest einer geraden Zahl 0 und der Modulo-Rest einer ungeraden Zahl 1. Bei $m = 10$ ist der Modulo-Rest die letzte Ziffer und bei $m = 5$ muss man nur die letzte Ziffer durch 5 teilen, um den Modulo-Rest zu erhalten. Bei $m = 3$ oder $m = 9$ kann man den Modulo-Rest über die iterierte Quersumme bestimmen.

Beispiel 21.3 (Iterierte Quersumme)

Zur Bestimmung von

$$27051963 \mod 9$$

bilden wir zunächst die Quersumme, also die Summe der einzelnen Ziffern

$$2 + 7 + 0 + 5 + 1 + 9 + 6 + 3 = 33.$$

Da die Quersumme einen Wert größer als 9 hat, bilden wir die Quersumme der Quersumme $3 + 3 = 6$. Dieses Prinzip bezeichnet man als iterierte Quersumme. Es liefert einen Wert, der nicht mehr größer als 9 ist und damit unser gesuchtes Ergebnis $27051963 \mod 9 = 6$. ■

Beispiel 21.4 (Mikroprozessor)

Die Ganzzahlarithmetik bei einem Mikroprozessor mit 16 Bit entspricht der Rechnung modulo $m = 2^{16}$. Ein solcher Prozessor kann die Zahlen aus

$$\mathbb{Z}_{65536} = \{\,0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ 65535\,\}$$

darstellen. ■

Die größte Zahl, die gleichzeitig ein Teiler von zwei ganzen Zahlen ist, nennt man den größten gemeinsamen Teiler dieser beiden Zahlen.

Definition 21.3 (Größter gemeinsamer Teiler, teilerfremd)
Der **größte gemeinsame Teiler** m der beiden ganzen Zahlen n_1 und n_2 ist die größte natürliche Zahl m, die beide Zahlen teilt:

$$m = \mathrm{ggT}(n_1, n_2) \quad \Longleftrightarrow \quad m \text{ ist größte natürliche Zahl mit } m \mid n_1 \text{ und } m \mid n_2 \,.$$

Zwei Zahlen n_1 und n_2 mit $\mathrm{ggT}(n_1, n_2) = 1$ bezeichnet man als **teilerfremd**.

Für Berechnungen mit dem größten gemeinsamen Teiler gibt es ein paar einfache Regeln.

Satz 21.2 (Rechenregeln für ggT)
Für beliebige ganze Zahlen n, n_1 und n_2 gilt:

- $\mathrm{ggT}(n, 0) = |n|$
- $\mathrm{ggT}(n, 1) = 1$
- $\mathrm{ggT}(n, n) = |n|$
- $\mathrm{ggT}(n_1, n_2) = \mathrm{ggT}(n_2, n_1)$
- $n_1 \mid n_2 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{ggT}(n_1, n_2) = n_1$
- $\mathrm{ggT}(n_1, n_2) = \mathrm{ggT}(n_1, n_2 \mod n_1)$

Die Rechenregel

$$\mathrm{ggT}(n_1, n_2) = \mathrm{ggT}(n_1, n_2 \mod n_1)$$

schauen wir uns genauer an. Wenn m der größte gemeinsame Teiler von n_1 und n_2 ist, dann gilt:

$$m = \mathrm{ggT}(n_1, n_2) \quad \Longrightarrow \quad m \mid n_1 \text{ und } m \mid n_2 \,.$$

Mit r bezeichnen wir n_2 modulo n_1. Nach *Definition 21.2* gibt es dann eine ganze Zahl q so, dass:

$$r = n_2 \mod n_1 \quad \Longrightarrow \quad n_2 = q \cdot n_1 + r \,.$$

Da m sowohl n_1 als auch n_2 teilt gilt:

$$m \mid n_2 - q \cdot n_1 = r \,.$$

Somit ist m auch ein Teiler von n_2 modulo n_1. Dieses Prinzip war bereits dem griechischen Mathematiker *Euklid* bekannt. Gegen Ende des 4. Jahrhunderts vor Christus formuliert er in seinem 7. Buch der Elemente „Teilbarkeit und Primzahlen" den nach ihm benannten Algorithmus zur Bestimmung des größten gemeinsamen Teilers.

Euklidscher Algorithmus

„Es seien AB und CD die beiden gegebenen Zahlen, sodass die größere, AB, von der kleineren, CD, nicht genau gemessen werde. Nimm immer die kleinere von der größeren weg, bis ein Rest kommt, welcher die nächst vorgehende Zahl genau misst. Dieser Rest ist das größte gemeinschaftliche Maß der beiden gegebenen Zahlen.“

Die Schreibweise von Euklid ist sicherlich gewöhnungsbedürftig. Wenn man sich jedoch vor Augen hält, dass zur damaligen Zeit Zahlen nur in Form von Strecken zwischen zwei Punkten betrachtet wurden, dann lassen sich die Operationen „genau messen“ und „die kleinere von der größeren weg nehmen“ mit Holzstöcken nachvollziehen.

Beispiel 21.5 (Euklidscher Algorithmus)

a) Wir berechnen den größten gemeinsamen Teiler von 35 und 21. Nach dem Euklidschen Algorithmus bilden wir zunächst die Differenz der beiden Zahlen

$$\mathrm{ggT}\,(35, 21) \quad \longrightarrow \quad 35 - 21 = 14 \quad \longrightarrow \quad \mathrm{ggT}\,(21, 14)\,.$$

Im zweiten Schritt betrachten wir die beiden Zahlen 21 und 14, die Differenz ergibt

$$\mathrm{ggT}\,(21, 14) \quad \longrightarrow \quad 21 - 14 = 7 \quad \longrightarrow \quad \mathrm{ggT}\,(14, 7)\,.$$

Im nächsten Schritt bilden wir

$$\mathrm{ggT}\,(14, 7) \quad \longrightarrow \quad 14 - 7 = 7 \quad \longrightarrow \quad \mathrm{ggT}\,(7, 7) = 7\,.$$

b) Die einzelnen Schritte zur Bestimmung des größten gemeinsamen Teilers von 81 und 18 sind:

$$\mathrm{ggT}\,(81, 18) = \mathrm{ggT}\,(63, 18) = \mathrm{ggT}\,(45, 18) = \mathrm{ggT}\,(27, 18) = \mathrm{ggT}\,(18, 9) = \mathrm{ggT}\,(9, 9) = 9\,.$$

Definition 21.4 (Kleinstes gemeinsames Vielfaches)

Das **kleinste gemeinsame Vielfache** n der beiden ganzen Zahlen m_1 und m_2 ist die kleinste natürliche Zahl n, die ein Vielfaches beider Zahlen ist:

$$n = \mathrm{kgV}\,(m_1, m_2) \quad \Longleftrightarrow \quad n \text{ ist kleinste natürliche Zahl mit } m_1 \mid n \text{ und } m_2 \mid n\,.$$

Das kleinste gemeinsame Vielfache ist das Gegenstück zum größten gemeinsamen Teiler. Das Produkt aus ggT und kgV zweier Zahlen ergibt stets das Produkt der beiden Zahlen.

Satz 21.3 (Zusammenhang von ggT und kgV)

Zwischen dem größten gemeinsamen Teiler und dem kleinsten gemeinsamen Vielfachen besteht der Zusammenhang

$$\mathrm{ggT}\,(m, n) \cdot \mathrm{kgV}\,(m, n) = |m \cdot n|\,.$$

Zur Berechnung des kleinsten gemeinsamen Vielfachen greifen wir auf den größten gemeinsamen Teiler zurück, den wir ja mit dem Euklidschen Algorithmus ermitteln können.

Beispiel 21.6 (Kleinstes gemeinsames Vielfaches)
Wir ermitteln das kleinste gemeinsame Vielfache von 39 und 65. Dazu bestimmen wir zunächst den größten gemeinsamen Teiler mit dem Euklidschen Algorithmus:

$$\mathrm{ggT}\,(65,39) = \mathrm{ggT}\,(39,26) = \mathrm{ggT}\,(26,13) = \mathrm{ggT}\,(13,13) = 13\,.$$

Daraus erhalten wir dann

$$\mathrm{kgV}\,(65,39) = \frac{65\cdot 39}{\mathrm{ggT}\,(65,39)} = \frac{65\cdot 39}{13} = 195\,.$$

21.2 Kongruente Zahlen

Berechnungen modulo m erzeugen Zahlen in $\mathbb{Z}_m$. Zwei Zahlen, die modulo m denselben Rest haben, bezeichnet man als kongruent modulo m.

Definition 21.5 (Kongruente Zahlen)
Man nennt zwei natürliche Zahlen n_1 und n_2 **kongruent modulo** m, falls der Rest modulo m beider Zahlen gleich ist:

$$n_1 \equiv n_2 \mod m \quad\Longleftrightarrow\quad n_1 \mod m \;=\; n_2 \mod m\,.$$

Beispiel 21.7 (Kongruente Zahlen)
Modulo $m = 2$ sind alle geraden Zahlen kongruent zu 0:

$$\ldots,\quad -2 \equiv 0 \mod 2,\quad 0 \equiv 0 \mod 2,\quad 2 \equiv 0 \mod 2,\quad 4 \equiv 0 \mod 2,\quad \ldots$$

Die ungeraden Zahlen sind modulo $m = 2$ kongruent zu 1:

$$\ldots,\quad -3 \equiv 1 \mod 2,\quad -1 \equiv 1 \mod 2,\quad 1 \equiv 1 \mod 2,\quad 3 \equiv 1 \mod 2,\quad \ldots$$

Somit ist jede Zahl modulo $m = 2$ entweder kongruent zu 0 oder zu 1.

Satz 21.4 (Eigenschaften der Kongruenz)
Die Kongruenz ist

- reflexiv: $n \equiv n \mod m$,
- symmetrisch: $n_1 \equiv n_2 \mod m \implies n_2 \equiv n_1 \mod m$,
- transitiv: $n_1 \equiv n_2 \mod m$ und $n_2 \equiv n_3 \mod m \implies n_1 \equiv n_3 \mod m$.

Satz 21.5 (Rechenregeln für kongruente Zahlen)
Für beliebige ganze Zahlen ℓ, ℓ_1, ℓ_2, m, n_1, und n_2 gilt:

- $n_1 \equiv n_2 \mod m \quad\Longrightarrow\quad n_1 \cdot \ell \equiv n_2 \cdot \ell \mod m$
- $n_1 \equiv n_2 \mod m$ und $\ell_1 \equiv \ell_2 \mod m \quad\Longrightarrow\quad n_1 + \ell_1 \equiv n_2 + \ell_2 \mod m$
- $n_1 \equiv n_2 \mod m$ und $\ell_1 \equiv \ell_2 \mod m \quad\Longrightarrow\quad n_1 \cdot \ell_1 \equiv n_2 \cdot \ell_2 \mod m$

Beispiel 21.8 (Rechenregeln für kongruente Zahlen)

a) Die beiden Zahlen 8 und 3 sind kongruent modulo $m = 5$. Multipliziert man diese Zahlen mit demselben Faktor 7, so ergeben sich wieder kongruente Zahlen:

$$8 \equiv 3 \mod 5 \quad\Longrightarrow\quad \underbrace{8 \cdot 7}_{56 \equiv 1 \mod 5} \equiv \underbrace{3 \cdot 7}_{21 \equiv 1 \mod 5} \mod 5$$

b) Aus den Kongruenzen von 8 und 3 sowie 4 und 9 modulo $m = 5$ folgt die Kongruenz der Summen

$$8 \equiv 3 \mod 5 \quad \text{und} \quad 9 \equiv 4 \mod 5 \quad\Longrightarrow\quad \underbrace{8 + 9}_{17 \equiv 2 \mod 5} \equiv \underbrace{3 + 4}_{7 \equiv 2 \mod 5} \mod 5$$

und der Produkte

$$8 \equiv 3 \mod 5 \quad \text{und} \quad 9 \equiv 4 \mod 5 \quad\Longrightarrow\quad \underbrace{8 \cdot 9}_{72 \equiv 2 \mod 5} \equiv \underbrace{3 \cdot 4}_{12 \equiv 2 \mod 5} \mod 5\,.$$

Durch die Rechenregeln für kongruente Zahlen ist sichergestellt, dass eine Addition oder eine Multiplikation modulo m für kongruente Zahlen dasselbe Ergebnis ergibt. Es ist also nahe liegend, dass man für Berechnungen modulo m möglichst einfache Zahlen verwendet. Das sind die Zahlen aus $\mathbb{Z}_m$. Zu jeder dieser m Zahlen sind unendlich viele Zahlen kongruent modulo m. Alle diese kongruenten Zahlen bezeichnet man als Restklasse.

Definition 21.6 (Restklasse)
Die Menge der ganzen Zahlen, die zu einer ganzen Zahl r modulo m kongruent sind, bezeichnet man als **Restklasse modulo** m:

$$[r]_m = [r] = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \equiv r \mod m\}\,.$$

Beispiel 21.9 (Restklassen)

a) Die Restklasse modulo 5 der Zahl 1 besteht aus

$$[1]_5 = \{\ldots, -14, -9, -4, 1, 6, 11, 16, \ldots\}\,.$$

b) Die Restklasse modulo 7 der Zahl 2 besteht aus

$$[2]_7 = \{\ldots, -19, -12, -5, 2, 9, 16, 23, \ldots\}\,.$$

Sachwortverzeichnis

Symbole

A

L

M

N

Q

R

S

T

U

V