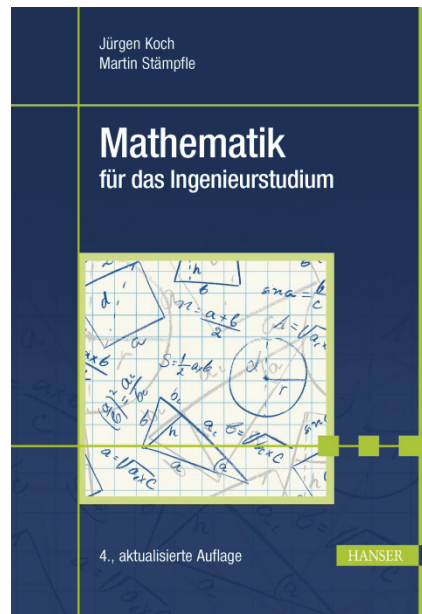


HANSER



Leseprobe

zu

„Mathematik für das Ingenieurstudium“

von Jürgen Koch und Martin Stämpfle

ISBN (Buch): 978-3-446-45166-7

ISBN (E-Book): 978-3-446-45581-8

Weitere Informationen und Bestellungen unter
<http://www.hanser-fachbuch.de/978-3-446-45166-7>

sowie im Buchhandel

© Carl Hanser Verlag, München

Inhaltsverzeichnis

1	Grundlagen	19
1.1	Logik und Mengen	19
1.1.1	Aussagenlogik	19
1.1.2	Mengen	22
1.2	Zahlen	25
1.2.1	Natürliche Zahlen	25
1.2.2	Ganze Zahlen	26
1.2.3	Rationale Zahlen	27
1.2.4	Reelle Zahlen	28
1.2.5	Ordnung	30
1.2.6	Intervalle	31
1.2.7	Betrag und Signum	32
1.2.8	Summe und Produkt	35
1.3	Potenz und Wurzel	36
1.3.1	Potenzen	36
1.3.2	Potenzgesetze	37
1.3.3	Wurzeln	37
1.3.4	Binomischer Satz	38
1.4	Trigonometrie	40
1.4.1	Trigonometrie im rechtwinkligen Dreieck	40
1.4.2	Winkel im Grad- und Bogenmaß	42
1.4.3	Sinus- und Kosinussatz	43
1.5	Gleichungen und Ungleichungen	44
1.5.1	Lineare Gleichungen	45
1.5.2	Potenzgleichungen	46
1.5.3	Quadratische Gleichungen	46
1.5.4	Wurzelgleichungen	48
1.5.5	Ungleichungen	49
1.6	Beweise	51
1.6.1	Direkter Beweis	52
1.6.2	Indirekter Beweis	52
1.6.3	Konstruktiver Beweis	53
1.6.4	Vollständige Induktion	54
1.7	Aufgaben	56
2	Lineare Gleichungssysteme	61
2.1	Einführung	61

2.2	Gauß-Algorithmus	63
2.2.1	Äquivalenzumformungen	64
2.2.2	Vorwärtselemination	65
2.2.3	Rückwärtseinsetzen	66
2.2.4	Gaußsches Eliminationsverfahren	67
2.2.5	Rechenschema	68
2.3	Spezielle Typen linearer Gleichungssysteme	70
2.3.1	Lineare Gleichungssysteme ohne Lösung	70
2.3.2	Lineare Gleichungssysteme mit unendlich vielen Lösungen	71
2.3.3	Systeme mit redundanten Gleichungen	72
2.3.4	Unterbestimmte lineare Gleichungssysteme	73
2.3.5	Überbestimmte lineare Gleichungssysteme	74
2.3.6	Homogene lineare Gleichungssysteme	75
2.3.7	Lineare Gleichungssysteme mit Parametern	77
2.4	Numerische Verfahren	79
2.4.1	Jacobi-Iteration	79
2.4.2	Gauß-Seidel-Iteration	80
2.5	Anwendungen	81
2.5.1	Produktion	81
2.5.2	Netzwerkanalyse in der Elektrotechnik	82
2.6	Aufgaben	83
3	Vektoren	85
3.1	Der Begriff eines Vektors	85
3.2	Vektorrechnung ohne Koordinaten	87
3.2.1	Addition und Subtraktion	87
3.2.2	Skalare Multiplikation	89
3.2.3	Skalarprodukt	90
3.2.4	Vektorprodukt	94
3.2.5	Spatprodukt	96
3.2.6	Lineare Unabhängigkeit	98
3.3	Vektoren in Koordinatendarstellung	102
3.3.1	Koordinatendarstellung	103
3.3.2	Addition und Subtraktion	104
3.3.3	Skalare Multiplikation	105
3.3.4	Skalarprodukt	105
3.3.5	Vektorprodukt	107
3.3.6	Spatprodukt	109
3.3.7	Lineare Unabhängigkeit	109
3.4	Punkte, Geraden und Ebenen	112
3.4.1	Kartesisches Koordinatensystem	112
3.4.2	Parameterdarstellung von Geraden und Ebenen	114
3.4.3	Parameterfreie Darstellung von Geraden und Ebenen	116
3.4.4	Schnitte von Geraden und Ebenen	117
3.4.5	Abstände	119

3.4.6	Winkel	122
3.5	Anwendungen	124
3.5.1	Kraft	124
3.5.2	Arbeit	124
3.5.3	Drehmoment	125
3.6	Aufgaben	126
4	Matrizen	131
4.1	Der Begriff einer Matrix	131
4.2	Rechnen mit Matrizen	135
4.2.1	Addition, Subtraktion und skalare Multiplikation	136
4.2.2	Multiplikation von Matrizen	137
4.3	Determinanten	143
4.3.1	Determinante einer (2,2)-Matrix	143
4.3.2	Determinante einer (3,3)-Matrix	145
4.3.3	Determinante einer (n,n)-Matrix	149
4.4	Inverse Matrix	152
4.4.1	Invertierbare Matrizen	153
4.4.2	Inverse einer (2,2)-Matrix	154
4.4.3	Inverse Matrix und lineares Gleichungssystem	155
4.4.4	Orthogonale Matrizen	155
4.5	Lineare Abbildungen	156
4.5.1	Matrizen als Abbildungen	156
4.5.2	Koordinatentransformation	158
4.5.3	Kern, Bild und Rang	159
4.6	Eigenwerte und Eigenvektoren	160
4.7	Numerische Verfahren	166
4.8	Anwendungen	167
4.9	Aufgaben	169
5	Funktionen	173
5.1	Relationen und Funktionen	173
5.1.1	Relationen	173
5.1.2	Funktionen	174
5.2	Reelle Funktionen	176
5.2.1	Definitionsmenge, Zielmenge und Wertemenge	176
5.2.2	Wertetabelle und Schaubild	178
5.2.3	Explizite und implizite Darstellung	180
5.2.4	Abschnittsweise definierte Funktionen	181
5.2.5	Funktionsschar	183
5.2.6	Verkettung von Funktionen	184
5.3	Eigenschaften	187
5.3.1	Symmetrie	188
5.3.2	Periode	191
5.3.3	Monotonie	192
5.3.4	Beschränktheit	193

5.4	Das Prinzip der Umkehrfunktion	194
5.5	Anwendungen	197
5.5.1	Messwerte	197
5.5.2	Kennfelder	198
5.6	Aufgaben	199
6	Elementare Funktionen	201
6.1	Potenz- und Wurzelfunktionen	201
6.1.1	Potenzfunktionen	201
6.1.2	Wurzelfunktionen	203
6.2	Polynome und gebrochenrationale Funktionen	204
6.2.1	Polynome	204
6.2.2	Gebrochenrationale Funktionen	212
6.3	Sinus, Kosinus, Tangens und Arkusfunktionen	220
6.3.1	Definition am Einheitskreis	220
6.3.2	Eigenschaften	221
6.3.3	Allgemeine Sinus- und Kosinusfunktion	224
6.3.4	Arkusfunktionen	226
6.4	Exponential- und Logarithmusfunktionen	231
6.4.1	Exponentialfunktionen	231
6.4.2	Die e-Funktion	232
6.4.3	Logarithmusfunktionen	234
6.5	Hyperbel- und Areafunktionen	237
6.5.1	Hyperbelfunktionen	237
6.5.2	Areafunktionen	239
6.6	Anwendungen	240
6.6.1	Freileitungen	240
6.6.2	Industrieroboter	241
6.7	Aufgaben	242
7	Folgen, Grenzwerte und Stetigkeit	245
7.1	Folgen	245
7.1.1	Zahlenfolgen	245
7.1.2	Grenzwert einer Folge	249
7.2	Funktionsgrenzwerte	253
7.3	Stetigkeit	255
7.4	Asymptotisches Verhalten	260
7.5	Numerische Verfahren	264
7.5.1	Berechnung von Funktionswerten	265
7.5.2	Bisektionsverfahren	266
7.6	Anwendungen	268
7.7	Aufgaben	269
8	Differenzialrechnung	271
8.1	Steigung und Ableitungsfunktion	271
8.1.1	Tangente und Differenzierbarkeit	271

8.1.2	Differenzial	275
8.1.3	Ableitungsfunktion	275
8.1.4	Mittelwertsatz der Differenzialrechnung	279
8.1.5	Höhere Ableitungen	280
8.2	Ableitungstechnik	281
8.2.1	Ableitungsregeln	281
8.2.2	Ableitung der Umkehrfunktion	286
8.2.3	Logarithmisches Differenzieren	288
8.2.4	Implizites Differenzieren	289
8.2.5	Zusammenfassung	290
8.3	Regel von Bernoulli-de l'Hospital	291
8.4	Geometrische Bedeutung der Ableitungen	295
8.4.1	Neigungswinkel und Schnittwinkel	295
8.4.2	Monotonie	297
8.4.3	Krümmung	298
8.4.4	Lokale Extrema	299
8.4.5	Wendepunkte	303
8.4.6	Globale Extrema	304
8.5	Numerische Verfahren	305
8.5.1	Numerische Differenziation	306
8.5.2	Newton-Verfahren	307
8.5.3	Sekantenverfahren	309
8.6	Anwendungen	310
8.6.1	Fehlerrechnung	310
8.6.2	Extremwertaufgaben	312
8.6.3	Momentan- und Durchschnittsgeschwindigkeit	314
8.7	Aufgaben	315
9	Integralrechnung	321
9.1	Flächenproblem	321
9.1.1	Integralsymbol	321
9.1.2	Integral als Grenzwert von Summen	322
9.1.3	Bestimmtes Integral	324
9.2	Zusammenhang von Ableitung und Integral	325
9.2.1	Integralfunktion	325
9.2.2	Stammfunktion	327
9.2.3	Bestimmtes Integral und Stammfunktion	329
9.2.4	Mittelwertsatz der Integralrechnung	330
9.3	Integrationstechnik	332
9.3.1	Integrationsregeln	332
9.3.2	Integration durch Substitution	336
9.3.3	Partielle Integration	343
9.3.4	Gebrochenrationale Funktionen	345
9.3.5	Uneigentliche Integrale	348

9.4	Länge, Flächeninhalt und Volumen	351
9.4.1	Flächeninhalte	351
9.4.2	Bogenlänge	353
9.4.3	Rotationskörper	355
9.5	Numerische Verfahren	359
9.5.1	Trapezregel	360
9.5.2	Romberg-Verfahren	362
9.6	Anwendungen	362
9.6.1	Effektivwert	362
9.6.2	Schwerpunkte und statische Momente ebener Flächen	363
9.7	Aufgaben	367
10	Potenzreihen	371
10.1	Unendliche Reihen	372
10.2	Potenzreihen und Konvergenz	376
10.3	Taylor-Reihen	377
10.4	Eigenschaften	379
10.5	Numerische Verfahren	385
10.6	Anwendungen	386
10.7	Aufgaben	387
11	Kurven	389
11.1	Parameterdarstellung	389
11.2	Kegelschnitte	392
11.3	Tangente	398
11.4	Krümmung	400
11.5	Bogenlänge	403
11.6	Numerische Verfahren	405
11.7	Anwendungen	407
11.7.1	Mechanik	407
11.7.2	Straßenbau	408
11.8	Aufgaben	410
12	Funktionen mit mehreren Variablen	413
12.1	Definition und Darstellung	413
12.1.1	Definition einer Funktion mit mehreren Variablen	413
12.1.2	Schaubild einer Funktion mit mehreren Variablen	414
12.1.3	Schnittkurven mit Ebenen und Höhenlinien	414
12.2	Grenzwert und Stetigkeit	418
12.2.1	Grenzwert einer Funktion mit mehreren Variablen	418
12.2.2	Stetigkeit	419
12.3	Differenziation	420
12.3.1	Partielle Ableitungen und partielle Differenzierbarkeit	420
12.3.2	Differenzierbarkeit und Tangentialebene	423
12.3.3	Gradient und Richtungsableitung	425
12.3.4	Differenzial	428

12.3.5	Höhere partielle Ableitungen	431
12.3.6	Extremwerte	433
12.4	Ausgleichsrechnung	435
12.4.1	Methode der kleinsten Fehlerquadrate	435
12.4.2	Ausgleichsrechnung mit Polynomen	436
12.4.3	Lineare Ausgleichsrechnung	440
12.5	Vektorwertige Funktionen	442
12.6	Numerische Verfahren	443
12.6.1	Mehrdimensionales Newton-Verfahren	443
12.6.2	Gradientenverfahren	445
12.7	Anwendungen	447
12.8	Aufgaben	449
13	Komplexe Zahlen und Funktionen	451
13.1	Definition und Darstellung	451
13.1.1	Komplexe Zahlen	451
13.1.2	Gaußsche Zahlenebene	452
13.1.3	Polarkoordinaten	453
13.1.4	Exponentialform	455
13.2	Rechenregeln	457
13.2.1	Gleichheit	457
13.2.2	Addition und Subtraktion	457
13.2.3	Multiplikation und Division	458
13.2.4	Rechnen mit der konjugiert komplexen Zahl	460
13.2.5	Rechnen mit dem Betrag einer komplexen Zahl	460
13.3	Potenzen, Wurzeln und Polynome	462
13.3.1	Potenzen	463
13.3.2	Wurzeln	463
13.3.3	Fundamentalsatz der Algebra	466
13.4	Komplexe Funktionen	468
13.4.1	Ortskurven	469
13.4.2	Harmonische Schwingungen	470
13.4.3	Transformationen	474
13.5	Anwendungen	478
13.6	Aufgaben	479
14	Gewöhnliche Differenzialgleichungen	481
14.1	Einführung	481
14.1.1	Grundbegriffe	481
14.1.2	Anfangswert- und Randwertproblem	484
14.1.3	Richtungsfeld und Orthogonaltrajektorie	486
14.1.4	Differenzialgleichung und Funktionenschar	488
14.2	Differenzialgleichungen erster Ordnung	489
14.2.1	Separation der Variablen	490
14.2.2	Lineare Substitution	492
14.2.3	Ähnlichkeitsdifferenzialgleichungen	493

14.3	Lineare Differenzialgleichungen	494
14.3.1	Homogene und inhomogene lineare Differenzialgleichungen	494
14.3.2	Lineare Differenzialgleichungen erster Ordnung	497
14.3.3	Allgemeine Eigenschaften	501
14.3.4	Differenzialgleichungen mit konstanten Koeffizienten	504
14.4	Schwingungsdifferenzialgleichungen	517
14.4.1	Allgemeine Form	517
14.4.2	Freie Schwingung	518
14.4.3	Harmonisch angeregte Schwingung	520
14.4.4	Frequenzgänge	524
14.5	Differenzialgleichungssysteme	526
14.5.1	Eliminationsverfahren	526
14.5.2	Zustandsvariablen	528
14.5.3	Lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten	530
14.5.4	Lineare Differenzialgleichung als System	536
14.5.5	Stabilität	538
14.6	Numerische Verfahren	542
14.6.1	Polygonzugverfahren von Euler	542
14.6.2	Euler-Verfahren für Differenzialgleichungssysteme	544
14.7	Anwendungen	545
14.7.1	Temperaturverlauf	545
14.7.2	Radioaktiver Zerfall	545
14.7.3	Freier Fall mit Luftwiderstand	546
14.7.4	Feder-Masse-Schwinger	547
14.7.5	Pendel	548
14.7.6	Wechselstromkreise	548
14.8	Aufgaben	551
15	Differenzengleichungen	557
15.1	Lineare Differenzengleichungen	557
15.1.1	Differenzengleichungen erster Ordnung	559
15.1.2	Differenzengleichungen höherer Ordnung	561
15.2	Systeme linearer Differenzengleichungen	565
15.2.1	Homogene Systeme erster Ordnung	566
15.2.2	Inhomogene Systeme erster Ordnung	568
15.2.3	Asymptotisches Verhalten	569
15.3	Anwendungen	571
15.4	Aufgaben	572
16	Fourier-Reihen	573
16.1	Fourier-Analyse	573
16.1.1	Periodische Funktionen	573
16.1.2	Trigonometrische Polynome	575
16.1.3	Fourier-Reihe	577
16.1.4	Satz von Fourier	578
16.1.5	Gibbssches Phänomen	581

16.2 Komplexe Darstellung	583
16.2.1 Komplexe Fourier-Reihe	583
16.2.2 Berechnung komplexer Fourier-Koeffizienten	585
16.2.3 Spektrum	587
16.2.4 Minimaleigenschaft	590
16.3 Eigenschaften	592
16.3.1 Symmetrie	592
16.3.2 Integrationsintervall	593
16.3.3 Mittelwert	594
16.3.4 Linearität	594
16.3.5 Ähnlichkeit und Zeitumkehr	596
16.3.6 Zeitverschiebung	597
16.4 Aufgaben	599
17 Verallgemeinerte Funktionen	601
17.1 Heaviside-Funktion	601
17.2 Dirac-Distribution	603
17.3 Verallgemeinerte Ableitung	605
17.4 Faltung	607
17.5 Anwendungen	611
17.6 Aufgaben	612
18 Fourier-Transformation	613
18.1 Integraltransformation	613
18.1.1 Definition	613
18.1.2 Darstellung mit Real- und Imaginärteil	615
18.1.3 Sinus- und Kosinustransformation	617
18.1.4 Transformation gerader und ungerader Funktionen	618
18.1.5 Darstellung mit Amplitude und Phase	620
18.2 Eigenschaften	621
18.2.1 Linearität	622
18.2.2 Zeitverschiebung	623
18.2.3 Amplitudenmodulation	625
18.2.4 Ähnlichkeit und Zeitumkehr	627
18.3 Inverse Fourier-Transformation	628
18.3.1 Definition	628
18.3.2 Vertauschungssatz	630
18.3.3 Linearität	631
18.4 Differenziation, Integration und Faltung	631
18.4.1 Differenziation im Zeitbereich	631
18.4.2 Differenziation im Frequenzbereich	633
18.4.3 Multiplikationssatz	633
18.4.4 Integration	634
18.4.5 Faltung	635
18.5 Periodische Funktionen	635
18.5.1 Fourier-Transformation einer Fourier-Reihe	636

18.5.2	Koeffizienten der Fourier-Reihe	636
18.5.3	Grenzwertbetrachtung	638
18.6	Anwendungen	640
18.6.1	Lineare zeitinvariante Systeme	640
18.6.2	Tiefpassfilter	642
18.7	Aufgaben	644
19	Laplace-Transformation	647
19.1	Bildbereich	647
19.1.1	Definition	647
19.1.2	Laplace- und Fourier-Transformation	650
19.2	Eigenschaften	651
19.2.1	Linearität	651
19.2.2	Ähnlichkeit	652
19.2.3	Zeitverschiebung	653
19.2.4	Dämpfung	654
19.3	Differenziation, Integration und Faltung	655
19.3.1	Differenziation	655
19.3.2	Integration	657
19.3.3	Faltung	658
19.3.4	Grenzwerte	659
19.4	Transformation periodischer Funktionen	659
19.5	Rücktransformation	661
19.6	Lösung gewöhnlicher Differenzialgleichungen	662
19.7	Anwendungen	668
19.8	Aufgaben	671
20	z-Transformation	673
20.1	Transformation diskreter Signale	673
20.1.1	Definition	673
20.1.2	z-Transformation und Laplace-Transformation	675
20.2	Eigenschaften	676
20.2.1	Linearität	676
20.2.2	Dämpfung	677
20.2.3	Verschiebung	677
20.2.4	Vorwärtsdifferenzen	678
20.2.5	Multiplikationssatz	679
20.2.6	Diskrete Faltung	680
20.3	Lösung von Differenzengleichungen	682
20.4	Anwendungen	685
20.5	Aufgaben	687
21	Elementare Zahlentheorie	689
21.1	Teilbarkeit	689
21.2	Kongruente Zahlen	693
21.3	Primzahlen	698

21.4 Anwendungen	702
21.4.1 International Bank Account Number (IBAN)	702
21.4.2 Linearer Kongruenzgenerator für Pseudozufallszahlen	703
21.5 Aufgaben	704
A Anhang	705
A.1 Bedeutende Mathematiker	705
A.2 Trigonometrische Funktionen	724
A.3 Ableitungen	725
A.4 Ableitungsregeln	725
A.5 Integrale	726
A.6 Integralregeln	727
A.7 Potenzreihen	727
A.8 Fourier-Reihen	728
A.9 Korrespondenzen der Fourier-Transformation	730
A.10 Eigenschaften der Fourier-Transformation	732
A.11 Korrespondenzen der Laplace-Transformation	733
A.12 Eigenschaften der Laplace-Transformation	734
A.13 Korrespondenzen der z-Transformationen	735
A.14 Eigenschaften der z-Transformationen	735
A.15 Griechisches Alphabet	736
Literaturverzeichnis	737
Sachwortverzeichnis	739

Vorwort

Drei wesentliche Gründe haben uns bewogen, ein Mathematikbuch zu schreiben. Zum einen haben wir unser persönliches didaktisches Konzept umgesetzt. Zum anderen ist dieses Buch so gestaltet, dass es dem Wandel, der durch den Einsatz von Computern entstanden ist, gerecht wird. Schließlich wird durch viele Anwendungsbeispiele die Bedeutung der Mathematik in der Technik sichtbar.

In diesem Mathematikbuch haben wir viel Wert auf eine verständliche Sprache gelegt. Begriffe, Regeln und Sätze sind so formuliert, dass sie möglichst leicht zu lesen, schnell aufzufassen und einfach zu merken sind. Bilder sagen mehr als tausend Worte. Gemäß diesem Grundsatz werden Sätze, Regeln und Beispiele mit farbigen Skizzen illustriert. Diese Abbildungen helfen, den Sachverhalt unmittelbar visuell aufzunehmen. Alle Beispiele enthalten einen ausführlichen Rechenweg. Durch die Angabe von vielen Zwischenschritten sind sie auf das Niveau von Studienanfängern zugeschnitten. Dieses Buch ist nicht nach dem strengen Prinzip Definition-Satz-Beweis aufgebaut. In diesem Sinne ist es kein Mathematikbuch für Mathematiker. Trotzdem sind an vielen Stellen Herleitungen oder Beweisskizzen enthalten. Sie fördern das Verständnis über die Zusammenhänge des mathematischen Gedankengebäudes. Querbezüge zur Geschichte der Mathematik verdeutlichen, wie sich die Mathematik über Jahrhunderte aus Ideen genialer Personen entwickelt hat. Kurzporträts einiger bedeutender Mathematiker befinden sich im Anhang.

Durch den Einsatz von Computern hat sich die Tätigkeit von Ingenieuren stark gewandelt. Berechnungen und Konstruktionen werden überwiegend mit Softwarewerkzeugen durchgeführt. Dadurch steht die Vermittlung von Rechenschemata und Rechenricks bei der Mathematikausbildung in einem Ingenieurstudium heute nicht mehr im Vordergrund. Computer machen Mathematik aber nicht überflüssig, im Gegenteil: Das Kapital der Ingenieurabsolventen liegt im Verständnis der Mathematik. Das Wissen über die Modellierung und die Kenntnis unterschiedlicher Berechnungsverfahren sowie die Fähigkeit zu einer souveränen Interpretation der Ergebnisse zeichnen einen guten Ingenieur aus. Dieses Buch wird diesem geänderten Anspruch gerecht. Die meisten Kapitel enthalten einen Abschnitt über numerische Verfahren und einen Abschnitt über ausgewählte Anwendungen. Bei diesen Anwendungen sind die technischen Skizzen und Bezeichnungen teilweise vereinfacht dargestellt und deshalb nicht immer normgerecht.

Zum Überprüfen des Lernfortschrittes stehen am Ende der Kapitel Aufgaben, unterteilt in die Kategorien Verständnis, Rechentechnik und Anwendungen, zur Verfügung. Durch selbstständiges Üben und mit einer gesunden Portion Hartnäckigkeit beim Bearbeiten der Aufgaben wird sich der gewünschte Studienerfolg einstellen. Lösungen zu den Aufgaben sind über die Internetseiten der Autoren abrufbar: www.mathematik-fuer-ingenieure.de. Das Dozentenportal des Carl Hanser Verlags stellt für Mathematikdozenten begleitend zum Buch einen Foliensatz bereit.

Unser Dank richtet sich in erster Linie an unsere Studierenden. Ihre Fragen und Bemerkungen über viele Semester hinweg haben uns angeregt, immer wieder über Verbesserungen der Darstellung des Stoffes zu reflektieren. Ebenfalls bedanken möchten wir uns bei unseren Kolleginnen und Kollegen der Fakultät Grundlagen an der Hochschule Esslingen. Zahlreiche Hinweise sind an vielen Stellen eingeflossen. Ein herzlicher Dank geht an den Carl Hanser Verlag, speziell an Frau Christine Fritzsich, Frau Renate Roßbach und Frau Katrin Wulst, für die angenehme Zusammenarbeit bei der Entstehung dieses Buches. Schließlich gilt ein besonderer Dank unseren Familien, die uns Freiräume geschaffen und so die Entstehung des Manuskripts ermöglicht haben.

Esslingen, im Juli 2010

Jürgen Koch
Martin Stämpfle

Die positive Resonanz über unser Buch hat uns sehr gefreut und uns dazu motiviert, in die 2. Auflage eine Reihe von Ergänzungen und Verbesserungen aufzunehmen. Bedanken möchten wir uns bei den Studierenden und Kollegen über die Rückmeldungen zu Tippfehlern und kleinen Unstimmigkeiten. In akribischer Kleinarbeit sind wir allen Hinweisen nachgegangen und haben entsprechende Korrekturen vorgenommen. Auch die Lösungen zu den Aufgaben, die nach wie vor im Internet abrufbar sind, haben wir überarbeitet.

Wir haben in der 3. Auflage das Thema Funktionen in drei Kapitel aufgeteilt. Der Einstieg in die Funktionen ist nun etwas allgemeiner gehalten und beinhaltet auch Relationen. Ein eigenes klar strukturiertes Kapitel über die elementaren Funktionen verbessert den Überblick über diese Funktionen. Die zentralen Themen Folgen, Grenzwerte und Stetigkeit sind nun in einem separaten Kapitel gebündelt. Mit Ergänzungen bei der z -Transformation und den beiden komplett neuen Kapiteln über Differenzgleichungen und elementare Zahlentheorie haben wir weitere Aspekte der diskreten Mathematik hinzugefügt. Einige Aufgaben und Lösungen sind neu hinzugekommen oder wurden überarbeitet.

In der 4. Auflage haben wir Abschnitte über orthogonale Vektoren und Matrizen und die Hauptachsentransformation aufgenommen. Das Kapitel über Zahlentheorie wurde um zwei Anwendungen erweitert. Bei den Kapiteln über Grundlagen, Matrizen und gewöhnliche Differenzialgleichungen wurden etliche Aufgaben ergänzt. Auch für diese Auflage haben wir noch einige kleinere Unstimmigkeiten geglättet.

Esslingen, im Oktober 2017

Jürgen Koch
Martin Stämpfle

9 Integralrechnung

Die Einstiegsfrage in die Integralrechnung betrifft das sogenannte Flächenproblem: Wie kann man den Flächeninhalt unter einer Funktion berechnen? Wie so oft in der Mathematik liegt der Schlüssel zur Lösung des Problems darin, den geeigneten Querbezug herzustellen. Die wesentliche Erkenntnis dieses Kapitels ist der Zusammenhang der Differenzialrechnung mit dem Flächenproblem. Wir werden sehen, dass die Integralrechnung eine Art Umkehrung der Differenzialrechnung darstellt.

9.1 Flächenproblem

Zunächst beschränken wir uns nur auf Funktionen, die keine negativen Funktionswerte haben und stetig sind. Das Schaubild einer solchen Funktion schließt im Intervall $[a, b]$ mit der x -Achse eine Fläche A ein. Wir suchen nach einer Methode, diesen Flächeninhalt zu berechnen.

9.1.1 Integralsymbol

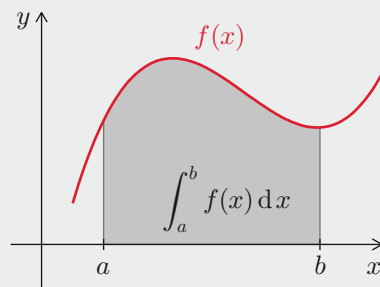
Die Fläche ist erst durch Angabe von Untergrenze a und Obergrenze b eindeutig festgelegt. Wir benötigen deshalb eine geeignete Schreibweise, um unmissverständlich klar zu machen, in welchem Bereich wir die Funktion f betrachten.

Definition 9.1 (Integralsymbol)

Eine stetige und nicht negative Funktion f begrenzt für x -Werte zwischen a und b mit der x -Achse ein Flächenstück. Für den Inhalt A dieser Fläche verwendet man die Schreibweise mit dem **Integralsymbol**

$$A = \int_a^b f(x) \, dx.$$

Die Funktion f unter dem Integral bezeichnet man als **Integrand**.



Wir verwenden die Sprechweise „Integral von a bis b über f von $x \, dx$ “. Die Bezeichnung dx kennen wir bereits von der Ableitung $f'(x) = \frac{df}{dx}$.

Beim Integral setzen wir zunächst $f \geq 0$ und $a \leq b$ voraus. Im weiteren Verlauf dieses Kapitels werden wir jedoch sehen, dass Integrale auch für $f < 0$ und $a > b$ sinnvoll definiert werden können. Integrale, bei denen ∞ oder $-\infty$ als Grenzen vorkommen, bezeichnet man als uneigentliche Integrale. Die Besonderheiten werden in *Abschnitt 9.3.5* beleuchtet.

Das Integralsymbol \int wurde in Anlehnung an ein langgezogenes „S“ als Anfangsbuchstabe des lateinischen Worts „summa“ bereits im 17. Jahrhundert von dem Mathematiker *Gottfried Wilhelm Leibniz* eingeführt. Bei der Definition des Integralsymbols ist die Variable x lediglich ein Platzhalter. Wir können anstatt x jede beliebige Variable verwenden, mit den Worten von Goethes Faust formuliert: „Name ist Schall und Rauch“.

Integrationsvariable

Die Bezeichnung der Integrationsvariable spielt keine Rolle:

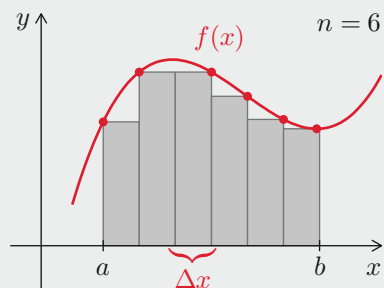
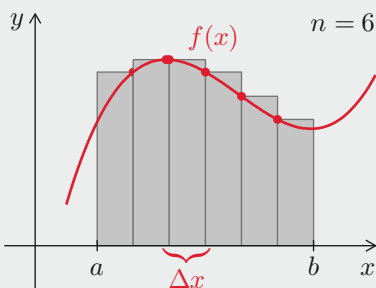
$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(u) du = \dots$$

9.1.2 Integral als Grenzwert von Summen

Eine nahe liegende Idee bei der Berechnung einer Fläche unter einer Funktion ist die Verwendung kleiner Rechtecke. Dazu unterteilt man das Intervall von a bis b in n gleich große Teilintervalle. Bei dieser sogenannten äquidistanten Unterteilung hat jedes Teilintervall die Länge $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Rechtecke, deren Höhen so gewählt werden, dass sie gerade noch unter die Funktion passen, erzeugen die sogenannte **Untersumme**. Bei der **Obersumme** entsprechen die Höhen der Rechtecke den maximalen Funktionswerten.

Unter- und Obersumme

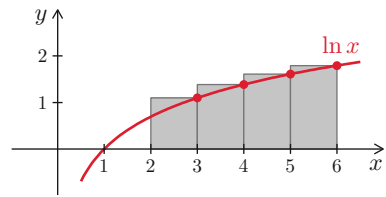
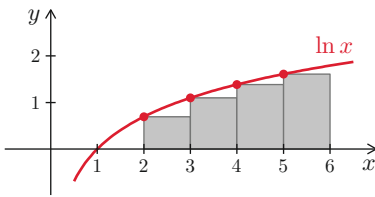
Die Fläche unter einer stetigen und nicht negativen Funktion kann durch **Untersumme** und **Obersumme** angenähert werden. Der tatsächliche Wert der Fläche ist sicherlich nicht kleiner als die Untersumme und sicherlich auch nicht größer als die Obersumme.



Je kleiner man die Grundseiten der Rechtecke Δx wählt, um so geringer ist der Unterschied zwischen Unter- und Obersumme. Wenn man n groß wählt, kann man die Fläche entsprechend genau berechnen.

Beispiel 9.1 (Unter- und Obersumme)

Die Fläche A unter der Funktion $f(x) = \ln x$ für x -Werte zwischen 2 und 6 soll mithilfe von Unter- und Obersumme näherungsweise berechnet werden.



Eine grobe Abschätzung erhält man mit $n = 4$ Rechtecken, deren Grundseiten die Länge $\Delta x = 1$ haben. Die Untersumme S_U und die Obersumme S_O ergeben

$$S_U = 1 \cdot \ln 2 + 1 \cdot \ln 3 + 1 \cdot \ln 4 + 1 \cdot \ln 5 = \ln(2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5) = \ln 120 \approx 4.7875,$$

$$S_O = 1 \cdot \ln 3 + 1 \cdot \ln 4 + 1 \cdot \ln 5 + 1 \cdot \ln 6 = \ln(3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6) = \ln 360 \approx 5.8861.$$

Der Wert des bestimmten Integrals muss zwischen den beiden berechneten Werten liegen:

$$4.7875 \approx \ln 120 \leq A \leq \ln 360 \approx 5.8861.$$

Mithilfe von Methoden, die wir in diesem Kapitel noch kennen lernen werden, kann man den exakten Wert der Fläche A für die Funktion f bei diesem Beispiel ermitteln:

$$A = 6 \ln 6 - 2 \ln 2 - 4 \approx 5.3643.$$

Untersumme und Obersumme liefern nur eine grobe Eingrenzung. Die generelle Vorgehensweise lässt sich zu einem praktikablen numerischen Verfahren erweitern, siehe *Abschnitt 9.5.1*. ■

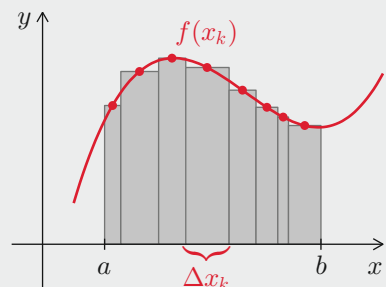
Die Grundseiten der Rechtecke müssen keinesfalls alle gleich groß sein. Wir können Rechtecke mit beliebigen Grundseiten Δx_k verwenden. Anstelle von minimalen und maximalen Funktionswerten können wir die Höhe der Rechtecke durch Funktionswerte $f(x_k)$ an einer beliebigen Stelle x_k im Rechteck festlegen. Wenn wir die Grundseiten der Rechtecke nun immer kleiner werden lassen, dann wird der Näherungswert der Fläche immer genauer. Somit können wir die Fläche unter einer Funktion mathematisch exakt als einen Grenzwert von Summen definieren.

Fläche als Grenzwert von Summen

Die Fläche unter einer stetigen und nicht negativen Funktion f entspricht dem Grenzwert von Summen

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x_k,$$

falls die Grundseiten der Rechtecke Δx_k gegen null streben und der Grenzwert der Rechtecksummen existiert. Dabei ist x_k eine Stelle innerhalb des Rechtecks mit Grundseite Δx_k .



Die Mantelfläche ist die Außenfläche eines Rotationskörpers. Bei der Mantelfläche werden die beiden Kreisscheiben, die den Boden und den Deckel des Körpers bilden, nicht berücksichtigt. Die komplette Oberfläche eines Rotationskörpers besteht also aus der Mantelfläche zusammen mit diesen beiden Kreisscheiben. Auf eine Herleitung der Formeln verzichten wir. Dafür führen wir eine Plausibilitätsbetrachtung durch: Den Ausdruck

$$L = \sqrt{1 + f'(x)^2}$$

kennen wir bereits aus der Formel zur Berechnung der Bogenlänge, siehe *Satz 9.15*. Diese Länge L wird mit dem Kreisumfang $U = 2\pi f(x)$ multipliziert. Die Funktionswerte $f(x)$ fungieren hier als Radien der einzelnen Kreise. Insgesamt werden also Ausdrücke der Form

$$\text{„Umfang des Kreises mit Radius } f(x)\text{“} \cdot \text{„Länge des Kurvensegments“}$$

aufsummiert. Im Spezialfall $f(x) = r$ ist die Ableitung für alle x -Werte null, es gilt also $f'(x) = 0$. Wir erhalten dann für die Mantelfläche eines senkrechten Kreiszylinders

$$M_x = 2\pi \int_a^b r \, dx = 2\pi r (b - a).$$

9.5 Numerische Verfahren

Es gibt verschiedene Gründe, die eine Annäherung von bestimmten Integralen durch numerische Näherungswerte erfordern. Beispielsweise gibt es elementare Funktionen, bei denen die Stammfunktionen nicht durch elementare Funktionen darstellbar sind. Bei Problemen aus der Praxis ist man oftmals schon deshalb auf numerische Integrationsmethoden angewiesen, weil man keine analytische Darstellung der Funktion selbst kennt. In diesen Fällen kann man lediglich Funktionswerte zu bestimmten Parameterwerten berechnen und daraus versuchen, einen möglichst guten Näherungswert für das Integral zu erzeugen.

Das Ziel bei der numerischen Integration sind Formeln, mit denen man Näherungswerte für den Wert eines bestimmten Integrals berechnen kann. Dabei wählt man nicht den Weg über Stammfunktionen, sondern man sucht nach Methoden, mit denen sich Flächeninhalte approximieren lassen. In den vergangenen Jahrhunderten haben sich zahlreiche Mathematiker mit dieser Problemstellung beschäftigt, wodurch eine ganze Reihe sogenannter Quadraturformeln entstanden sind. In der damaligen Zeit wurde die Integration als Quadratur bezeichnet.

Bei der numerischen Berechnung mithilfe von Computern setzt man Verfahren ein, die gute Näherungswerte mit möglichst wenig Rechenaufwand liefern. Gleichzeitig benötigt man verlässliche Abschätzungen für den maximalen Fehler zwischen dem Näherungswert und dem exakten Wert. Das Romberg-Verfahren, das wir in diesem Abschnitt vorstellen, erfüllt diese Anforderungen und wird bei der Lösung praktischer Probleme deshalb häufig eingesetzt.

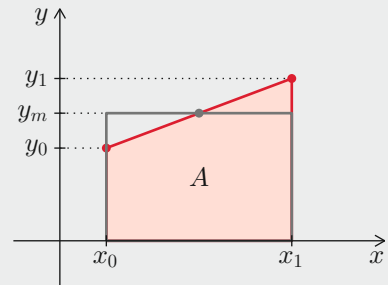
9.5.1 Trapezregel

In erster Näherung kann man den Flächeninhalt durch Rechtecksummen annähern. Diesen Aspekt haben wir in *Abschnitt 9.1.2* bereits ausführlich betrachtet. Eine deutliche Verbesserung bei der numerischen Berechnung des bestimmten Integrals erzielt man, indem man anstelle von Rechtecken Trapeze verwendet.

Trapez

Ein Viereck, das zumindest zwei parallele Seiten hat, bezeichnet man als **Trapez**. Die Fläche eines Trapezes ist genau gleich groß wie die Fläche des Rechtecks, das dieselbe Grundseite hat und dessen Höhe gerade dem Mittelwert y_m der beiden Höhen y_0 und y_1 des Trapezes entspricht:

$$A = (x_1 - x_0) \frac{y_0 + y_1}{2}.$$



Um eine Näherungsformel für das bestimmte Integral

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

zu bestimmen, zerlegen wir das Intervall $[a, b]$ in n gleichlange Teilintervalle der Länge $h = \frac{b-a}{n}$ und werten die Funktion an insgesamt $n + 1$ Stellen aus:

$$f(a), f(a+h), f(a+2h), \dots, f(b-2h), f(b-h), f(b)$$

Dadurch entstehen Sehnen Trapeze, deren Grundseiten alle dieselbe Länge h haben. Die Summe aller n Trapezflächen ergibt dann

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= h \frac{f(a) + f(a+h)}{2} + h \frac{f(a+h) + f(a+2h)}{2} + \dots \\ &+ h \frac{f(b-2h) + f(b-h)}{2} + h \frac{f(b-h) + f(b)}{2}. \end{aligned}$$

Alle Funktionswerte außer dem ersten und dem letzten liefern einen Beitrag zu zwei Trapezen. Die Formel lässt sich dadurch etwas vereinfachen:

$$\tilde{A} = \frac{h}{2} f(a) + \underbrace{\frac{h}{2} f(a+h) + \frac{h}{2} f(a+h)}_{h f(a+h)} + \dots + \underbrace{\frac{h}{2} f(b-h) + \frac{h}{2} f(b-h)}_{h f(b-h)} + \frac{h}{2} f(b).$$

Trapezregel

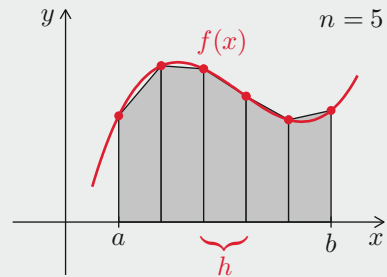
Das bestimmte Integral einer Funktion f über dem Intervall $[a, b]$

$$\int_a^b f(x) dx$$

kann man durch eine Summe von n Trapezflächen annähern. Die Trapeze haben eine Grundseite der Länge $h = \frac{b-a}{n}$.

Die Funktionswerte müssen an $n+1$ Stellen berechnet werden. Die Formel zur Berechnung der Summe der Trapezflächen lautet

$$\tilde{A} = h \left(\frac{1}{2} f(a) + f(a+h) + f(a+2h) + \dots + f(b-2h) + f(b-h) + \frac{1}{2} f(b) \right).$$



Beispiel 9.35 (Trapezregel)

Für $n=1$ erhalten wir einen Näherungswert der Fläche unter der Funktion $f(x) = \ln x$ durch

$$h = \frac{b-a}{1} = \frac{6-2}{1} = 4$$

für x -Werte zwischen 2 und 6. Die Formel liefert

$$\tilde{A}_4 = 4 \left(\frac{1}{2} \ln 2 + \frac{1}{2} \ln 6 \right) \approx 4.9698.$$

Bei $n=2$ liefert die Schrittweite

$$h = \frac{b-a}{2} = \frac{6-2}{2} = 2$$

den Näherungswert

$$\tilde{A}_2 = 2 \left(\frac{1}{2} \ln 2 + \ln 4 + \frac{1}{2} \ln 6 \right) \approx 5.2575.$$

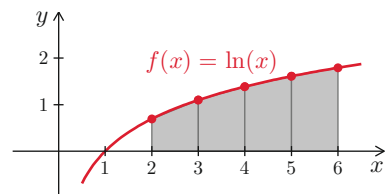
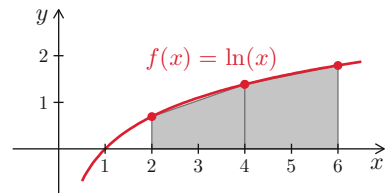
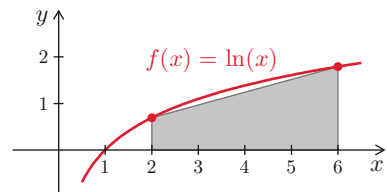
Für $n=4$ ist aus der Grafik kaum noch ein Unterschied zwischen der Originalfläche und den Trapezen zu erkennen. Die Grundseiten der Trapeze haben alle die Länge

$$h = \frac{b-a}{4} = \frac{6-2}{4} = 1.$$

Die Formel ergibt

$$\tilde{A}_1 = 1 \cdot \left(\frac{1}{2} \ln 2 + \ln 3 + \ln 4 + \ln 5 + \frac{1}{2} \ln 6 \right) \approx 5.3368.$$

Die Trapezregel ergibt eine deutlich bessere Annäherung des exakten Wertes $A \approx 5.3643$ als die Annäherung durch Unter- und Obersumme, siehe *Beispiel 9.1*. ■



9.5.2 Romberg-Verfahren

Mit dem Romberg-Verfahren kann man aus Näherungswerten, die man mit der Trapezregel berechnet hat, einen noch besseren Näherungswert erzeugen. Die Idee besteht dabei darin, die Näherungswerte der Trapezregel als Funktion der Schrittweite h zu interpretieren. Aus theoretischer Sicht würde die Trapezregel mit Schrittweite $h = 0$ ein exaktes Ergebnis liefern. Praktisch kann man die Schrittweite $h = 0$ natürlich nicht verwenden. Man versucht deshalb, den Wert der Trapezregel mit Schrittweite $h = 0$ durch Extrapolation bekannter Werte möglichst gut zu schätzen. Eine genaue Beschreibung findet man bei [Mohr:Numerik].

Beispiel 9.36 (Romberg-Verfahren)

Wir verwenden die Näherungswerte aus *Beispiel 9.35*

$$T(4) \approx 4.9698, \quad T(2) \approx 5.2575$$

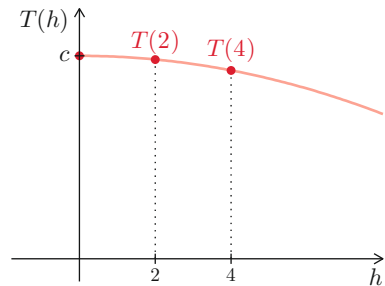
und bestimmen eine Parabel $T(h) = ah^2 + c$, die durch diese Punkte verläuft. Aus den Gleichungen

$$T(4) = 16a + c, \quad T(2) = 4a + c$$

lässt sich c ermitteln:

$$c = \frac{4T(2) - T(4)}{3} \approx 5.3534.$$

Dieser Wert ist der Funktionswert der Parabel an der Stelle $h = 0$. Verglichen mit dem exakten Wert $A \approx 5.3643$ aus *Beispiel 9.1*, ist c ein wesentlich besserer Näherungswert als die beiden Ausgangswerte $T(4)$ und $T(2)$. ■



9.6 Anwendungen

Wenn es bei Anwendungen darum geht, Funktionswerte über einen bestimmten Bereich zu summieren, kommen oft Integrale zum Einsatz. Wir betrachten zwei typische Beispiele, eines aus der Elektrotechnik und eines aus der Mechanik. Beim Effektivwert in der Elektrotechnik wird der zeitliche Verlauf eines Signals integriert. Bei Schwerpunkten und statischen Momenten in der Mechanik werden Funktionen über eine räumliche Distanz integriert.

9.6.1 Effektivwert

Energie, die wir über die Steckdose aus dem Stromnetz beziehen, ist in der Regel kein Gleichstrom, sondern Wechselstrom. In den meisten Ländern erfolgt die Spannungsversorgung durch sinusförmige Wechselspannungen mit einer Frequenz von 50 Hz oder 60 Hz. In Deutschland findet man auf Steckdosen und Geräten oft die Bezeichnung 230 V. Diese

Angabe bezeichnet aber nicht, wie oft behauptet wird, die Amplitude der sinusförmigen Wechselspannung. Tatsächlich liegt die Amplitude bei etwa 325 V. In der Elektrotechnik bezeichnet man diesen Wert als Scheitelwert. Den Zusammenhang zwischen diesen beiden Angaben, also 230 V einerseits und Scheitelwert 325 V andererseits, werden wir im Folgenden klären.

Für den Verbraucher ist letztendlich entscheidend, welche Energie bzw. Leistung zur Verfügung gestellt wird. Zu diesem Zweck betrachtet man den sogenannten Effektivwert. Der Effektivwert ist folgendermaßen definiert: Bei einer Wechselspannung wird an einem ohmschen Widerstand über einen gewissen Zeitraum dieselbe Leistung umgesetzt wie bei einer Gleichspannung, deren Spannung dem Effektivwert entspricht. Aus der Elektrotechnik kennt man die Formel zur Berechnung des Effektivwerts, siehe [Küpfmüller],

$$U_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt}.$$

Dabei bezeichnet T die Periodendauer. Bei einer sinusförmigen Wechselspannung mit Kreisfrequenz $\omega = \frac{2\pi}{T}$ und Scheitelwert \hat{U} erhalten wir

$$U_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \hat{U}^2 \sin^2(\omega t) dt}.$$

Mit der Substitution $x = \omega t$ ergibt sich

$$U_{\text{eff}} = \hat{U} \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 x dx}.$$

Der Effektivwert ist also unabhängig von der Periode T und der Kreisfrequenz ω . Das Integral berechnen wir mithilfe einer Stammfunktion, siehe *Beispiel 9.22*,

$$U_{\text{eff}} = \hat{U} \sqrt{\frac{1}{2\pi} \left(-\frac{1}{2} (\sin x \cos x - x) \right) \Big|_0^{2\pi}} = \hat{U} \sqrt{\frac{1}{2\pi} \pi} = \hat{U} \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Bei einem sinusförmigen Verlauf ist der Scheitelwert also immer um den Faktor $\sqrt{2}$ größer als der Effektivwert. Bei einem Scheitelwert von $\hat{U} = 325 \text{ V}$ erhalten wir den Effektivwert

$$U_{\text{eff}} = \frac{1}{\sqrt{2}} 325 \text{ V} \approx 230 \text{ V}.$$

9.6.2 Schwerpunkte und statische Momente ebener Flächen

Der Schwerpunkt eines Objekts ist in der technischen Mechanik von zentraler Bedeutung. Kräfte, die im Schwerpunkt angreifen, verändern das Rotationsverhalten nicht. Oder anders formuliert, wirkt eine Kraft in einer gewissen Entfernung vom Schwerpunkt auf ein

12 Funktionen mit mehreren Variablen

Bislang haben wir ausschließlich Funktionen betrachtet, die von einer unabhängigen Variablen abhängen. In Anwendungen treten aber häufig Funktionszusammenhänge auf, bei denen der Funktionswert etwa von der Zeit und vom Ort abhängt. Deshalb erweitern wir den Funktionsbegriff auf mehrere unabhängige Variable. Je nach Art der Problemstellung hat man so zwei, drei oder noch mehr unabhängige Variable. Wir werden in diesem Kapitel im Wesentlichen Funktionen mit zwei Variablen untersuchen. Die Verallgemeinerung von zwei auf drei und mehr Variable ist an den meisten Stellen ohne neue Gedanken durchführbar.

12.1 Definition und Darstellung

In diesem Abschnitt klären wir, wie man Funktionen mit mehreren Variablen formal definiert. Außerdem erläutern wir Methoden zur grafischen Darstellung. Dazu betrachten wir einfache Beispiele von Funktionen mit zwei Variablen.

12.1.1 Definition einer Funktion mit mehreren Variablen

Bei Funktionen mit mehreren Variablen ist die Definitionsmenge eine Teilmenge des entsprechenden Raumes. So liegt die Definitionsmenge einer Funktion mit zwei Variablen in der Ebene. Jedem Punkt dieser Definitionsmenge in der Ebene wird dann durch die Funktion ein Funktionswert zugeordnet.

Definition 12.1 (Funktion mit zwei Variablen)

Unter einer **Funktion f mit zwei Variablen** versteht man eine Abbildung, die jedem Zahlenpaar (x, y) aus einer **Definitionsmenge** $D \subseteq \mathbb{R}^2$ genau eine reelle Zahl z aus einer **Zielmenge** W zuordnet:

$$(x, y) \mapsto z = f(x, y), \quad (x, y) \in D.$$

Für drei und mehr unabhängige Variable sind die Schreibweisen

$$f(x, y, z), \quad f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n), \quad f(\mathbf{x})$$

gebräuchlich. Dabei bezeichnet $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ einen Vektor.

12.1.2 Schaubild einer Funktion mit mehreren Variablen

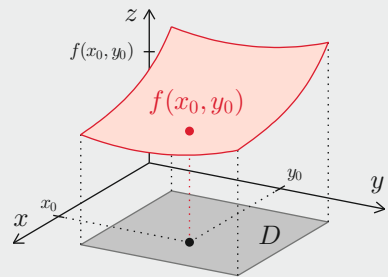
Das Schaubild von Funktionen mit einer Variablen kann man in der Ebene darstellen. Zur Visualisierung von Funktionen mit zwei Variablen benötigt man eine weitere Dimension. Funktionsschaubilder sind nun Flächen im dreidimensionalen Raum. Hier wird deutlich, dass die grafische Darstellung von Funktionen mit drei und mehr Variablen mindestens einen vierdimensionalen Raum erfordert, was jedoch die menschliche Vorstellungskraft vor große Herausforderungen stellt.

Schaubild

Das Schaubild einer Funktion

$$z = f(x, y)$$

ist eine Fläche im Raum. Dabei gibt es zu jedem Punkt (x_0, y_0) der Definitionsmenge D genau einen Punkt $z_0 = f(x_0, y_0)$ auf der Fläche.



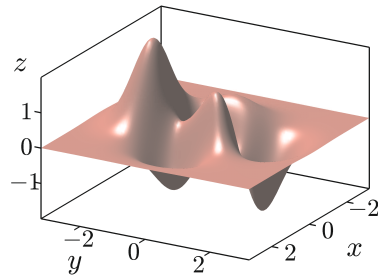
Durch Visualisierungssoftware lassen sich selbst komplexe Funktionen mit zwei Veränderlichen ansprechend darstellen. Zur Erzeugung möglichst realistischer Bilder verwendet man dabei unterschiedliche Methoden der Computergrafik.

Beispiel 12.1 (Peaks)

Die Funktion

$$\begin{aligned} f(x, y) &= (1+x)^2 e^{-x^2-(1-y)^2} \\ &\quad - 3(x^3 + y^5 - x) e^{-x^2-y^2} \\ &\quad - e^{-(1-x)^2-y^2} \end{aligned}$$

beschreibt eine Fläche im Raum, die aus mehreren e-Funktionen zusammengesetzt ist. Alle beteiligten e-Funktionen haben negative Exponenten, sodass die Funktionswerte, mit zunehmender Entfernung der x -Werte und y -Werte vom Ursprung schnell gegen null gehen.



12.1.3 Schnittkurven mit Ebenen und Höhenlinien

Um einen Eindruck vom Verlauf einer Fläche zu bekommen, kann man Schnitte durch das Funktionsschaubild legen. In einer Schnittebene wird die Fläche auf eine Kurve reduziert. Man erhält also ein zweidimensionales Schaubild, wie wir es bereits von Funktionen mit einer Variablen kennen.

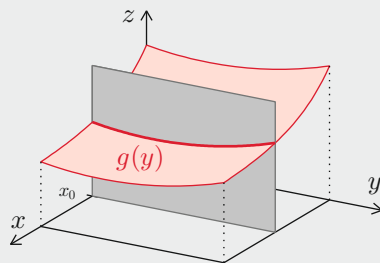
Am einfachsten sind vertikale und horizontale Schnitte zu realisieren. Durch Festhalten der Größen $x = x_0$, $y = y_0$ oder $z = z_0$ erhält man Schnittkurven, die parallel zur y - z -Ebene, zur x - z -Ebene oder zur x - y -Ebene verlaufen. Spezielle Schnittkurven erhält man für $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ oder $z_0 = 0$. Dann gehen die Schnittebenen durch den Ursprung.

Schnitte mit Ebenen parallel zur y - z -Ebene

Schneidet man das Schaubild einer Funktion mit zwei Variablen $z = f(x, y)$ mit der Ebene $x = x_0$, so erhält man die Funktionsgleichung der Schnittkurve

$$z = g(y) = f(x_0, y)$$

durch Einsetzen des festen Wertes $x = x_0$ in die Funktion f . Dabei liegt die Schnittkurve in einer Ebene, die parallel zur y - z -Ebene verläuft.

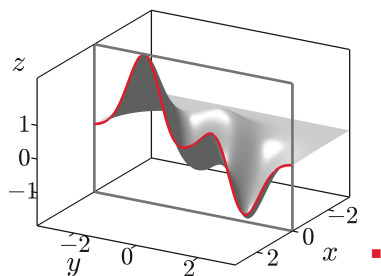


Beispiel 12.2 (Peaks geschnitten mit y - z -Ebene)

Die Schnittkurve der Funktion aus *Beispiel 12.1* mit der y - z -Ebene erhalten wir durch Einsetzen von $x = 0$ in die Funktionsgleichung

$$g(y) = e^{-(1-y)^2} - 3y^5 e^{-y^2} - e^{-1-y^2}.$$

Dadurch ergibt sich eine Funktion $g(y)$, die nur von der Variablen y abhängt.



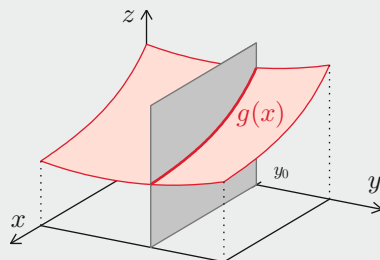
Schnittkurven mit Ebenen parallel zur y - z -Ebene oder zur x - z -Ebene einer Funktion mit zwei Variablen lassen sich problemlos durch Einsetzen entsprechender Werte ermitteln. Die Schnittkurven sind Schaubilder von Funktionen in der jeweiligen Schnittebene.

Schnitte mit Ebenen parallel zur x - z -Ebene

Schneidet man das Schaubild einer Funktion mit zwei Variablen $z = f(x, y)$ mit der Ebene $y = y_0$, so erhält man die Funktionsgleichung der Schnittkurve

$$z = g(x) = f(x, y_0)$$

durch Einsetzen des festen Wertes $y = y_0$ in die Funktion f . Dabei liegt die Schnittkurve in einer Ebene, die parallel zur x - z -Ebene verläuft.

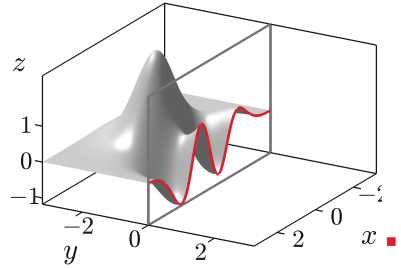


Beispiel 12.3 (Peaks geschnitten mit x - z -Ebene)

Die Schnittkurve der Funktion aus *Beispiel 12.1* mit der x - z -Ebene erhalten wir durch Einsetzen von $y = 0$ in die Funktionsgleichung

$$g(x) = (1+x)^2 e^{-x^2-1} - 3(x^3-x)e^{-x^2} - e^{-(1-x)^2}.$$

Die entstehende Funktion $g(x)$ hängt nur von der Variablen x ab.

**Definition 12.2 (Höhenlinien)**

Die Schnittkurven der Ebenen $z = z_0$, die parallel zur x - y -Ebene verlaufen, mit dem Schaubild der Funktion $z = f(x, y)$ nennt man **Höhenlinien**, **Konturlinien** oder **Niveaulinien**.

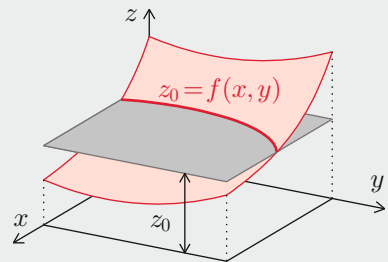
Während die Schnittkurven für $x = x_0$ und $y = y_0$ Kurven in expliziter Form ergeben, ist die Situation bei Schnittkurven für $z = z_0$ anders. Hier entstehen Kurven in impliziter Darstellung. Dies erschwert in der Regel das Erstellen einer Grafik mit x - y -Schnittkurven. Anschaulich kann man sich die Niveaulinien als Höhenlinien eines Gebirges vorstellen. Bei Landkarten bezeichnet man Höhenlinien als Isohypsen.

Höhenlinien

Die Höhenlinien der Funktion $z = f(x, y)$ zum Niveau $z = z_0$, erfüllen die implizite Gleichung

$$z_0 = f(x, y).$$

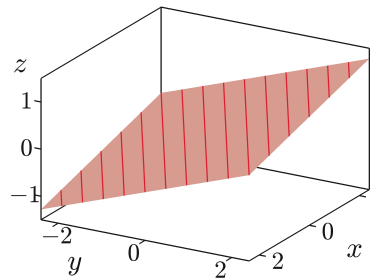
Entlang einer Höhenlinie hat die Funktion f den konstanten Wert z_0 . Höhenlinien zu unterschiedlichen Niveaufwerten z_0 schneiden sich nicht.

**Beispiel 12.4 (Ebene)**

Die Funktion

$$f(x, y) = -\frac{1}{5}x + \frac{1}{3}y$$

ist eine lineare Funktion in x und y . Die Funktion ist auf ganz \mathbb{R}^2 definiert. Alle Schnittkurven mit Ebenen sind Geraden. Das Schaubild ist eine Ebene. In x -Richtung nehmen die Funktionswerte ab und in y -Richtung nehmen sie zu.

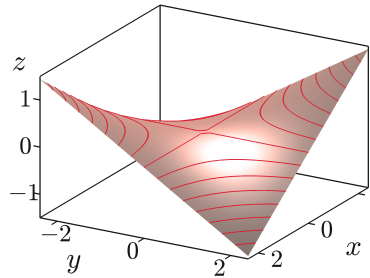


Beispiel 12.5 (Hyperbolisches Paraboloid)

Das Schaubild der Funktion

$$f(x, y) = -\frac{1}{4}xy$$

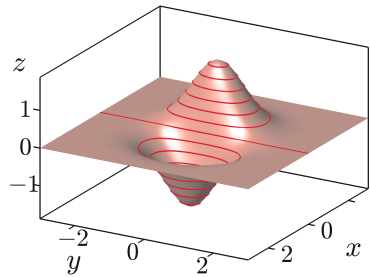
besteht aus einem sogenannten hyperbolischen Paraboloid. Die Schnittkurven für $x = x_0$ und $y = y_0$ sind Geraden. Höhenlinien haben die Form $z_0 = -\frac{1}{4}xy$, sie sind also rechtwinklige Hyperbeln.

**Beispiel 12.6 (Zusammengesetzte Exponentialfunktion)**

Die Funktion

$$f(x, y) = -4xe^{-(x^2+y^2)}$$

entsteht im Wesentlichen durch Multiplikation der Variablen x mit einer Exponentialfunktion. Je weiter man sich vom Ursprung entfernt, desto kleiner werden die Funktionswerte.



Rotationssymmetrische Funktionen sind Funktionen, bei denen der Funktionswert $f(x, y)$ nur von Radius $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ abhängt. Die unabhängigen Variablen treten also nur in der Form $x^2 + y^2$ auf. Die Schaubilder solcher Funktionen sind rotationssymmetrisch bezüglich der z -Achse. Die Höhenlinien von Rotationsflächen sind konzentrische Kreise.

Beispiel 12.7 (Halbkugel)

Das Schaubild der rotationssymmetrischen Funktion

$$f(x, y) = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$$

stellt die obere Hälfte der Kugel mit Radius 4 und Mittelpunkt im Ursprung dar. Definitions- und Wertemenge sind

$$D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 16\}, \quad W = [0, 4].$$

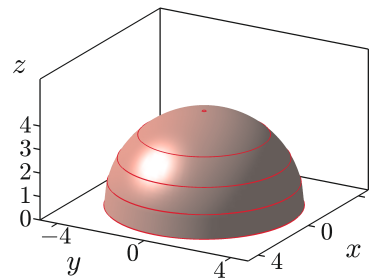
Die Schnittkurven für $x_0 = 0$ und $y_0 = 0$ sind

$$g_1(y) = \sqrt{16 - y^2}, \quad g_2(x) = \sqrt{16 - x^2},$$

also Halbkreise um den Ursprung mit Radius 4. Höhenlinien sind implizit durch die Gleichung

$$x^2 + y^2 = 16 - z_0^2$$

festgelegt und existieren für $0 \leq z_0 \leq 4$. Dies sind konzentrische Kreise mit Radius $r = \sqrt{16 - z_0^2}$, deren Mittelpunkte im Abstand z_0 zum Ursprung auf der z -Achse liegen. Für $z_0 = 4$ entartet der Kreis zu einem Punkt. Die Abbildung zeigt die Höhenlinien für $z_0 = 0, 1, 2, 3, 4$.



Höhenlinien von Rotationsflächen

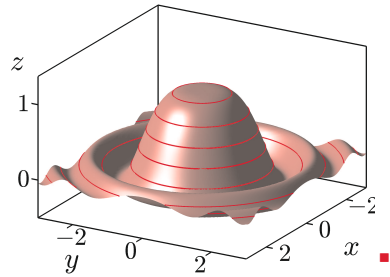
Die Höhenlinien von Rotationsflächen sind konzentrische Kreise um den Ursprung.

Beispiel 12.8 (Sombbrero)

Die Funktion

$$f(x, y) = \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$$

besteht aus einem rotationssymmetrischen Sinus, dessen Amplitude mit dem Radius abnimmt. Das Schaubild hat die Gestalt eines Sombberos. Die Funktion kann mit dem Wert 1 stetig in den Ursprung fortgesetzt werden.



12.2 Grenzwert und Stetigkeit

Analog zu Funktionen mit einer Variablen gibt es auch bei Funktionen mit mehreren Variablen den Begriff der Stetigkeit. Man muss allerdings gleich erwähnen, dass die Situation hier etwas komplizierter ist. Im Eindimensionalen lautet die anschauliche Definition der Stetigkeit: Eine Funktion ist stetig, wenn man ihr Schaubild ohne abzusetzen zeichnen kann. Diese anschauliche Definition lässt sich nicht ohne Weiteres auf zwei Variablen erweitern.

12.2.1 Grenzwert einer Funktion mit mehreren Variablen

Wir werden im zweidimensionalen Raum keine exakten Definitionen für Folgen und Grenzwerte einführen. Stattdessen beschreiben wir anschaulich, was der Grenzwert

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y)$$

bedeutet. Der Grenzwert existiert genau dann, wenn bei jeder Annäherung an die Stelle (x_0, y_0) die Folge der Funktionswerte gegen denselben Grenzwert konvergiert. Dabei müssen wir beachten, dass die Annäherung aus jeder Richtung der x - y -Ebene geschehen kann. Es müssen also viel mehr Möglichkeiten als im Fall einer Variablen geprüft werden.

Bei drei Variablen definiert man den Funktionsgrenzwert durch

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (x_0,y_0,z_0)} f(x, y, z),$$

und bei mehr als drei Variablen entsprechend.

13 Komplexe Zahlen und Funktionen

Obwohl bereits *Leonhard Euler* und *Johann Carl Friedrich Gauß* das Zeichen i für imaginäre Einheit eingeführt haben, wurde die Bedeutung der komplexen Zahlen für die Mathematik erst Anfang des 19. Jahrhunderts erkannt. Etwa zeitgleich fand durch die Erfindung der elektrischen Telegrafie der Einstieg in die elektronische Nachrichtenübermittlung statt. Dadurch sind wir heute in der Lage, Informationen mit Telefon, Fernsehen und Computer in Echtzeit zu übermitteln. Trotzdem gibt es nach wie vor gute Gründe dafür, dass viele Informationen in nicht elektronischer Form, etwa durch Briefe, Bücher oder Zeitschriften übermittelt werden. Mit den reellen und komplexen Zahlen verhält es sich ganz ähnlich. Viele Problemstellungen lassen sich durch komplexe Zahlen einfacher beschreiben und mithilfe komplexer Zahlen schneller und einfacher lösen. Trotzdem kommt man bei einer ganzen Reihe von Problemstellungen in der Mathematik auch ganz gut ohne komplexe Zahlen zurecht.

Im Zusammenhang mit komplexen Zahlen treten Begriffe wie imaginäre Einheit und Imaginärteil auf. Dadurch gewinnt man leicht den Eindruck, dass komplexe Zahlen fiktive Gebilde sind, die keine Bedeutung für die reale Welt haben. Genau das Gegenteil ist jedoch der Fall. Komplexe Zahlen sind genau so real wie die reellen Zahlen. An die reellen Zahlen haben wir uns nur schon gewöhnt. Die Liebe zu den komplexen Zahlen ist meistens keine Liebe auf den ersten Blick. Wer jedoch das Prinzip einmal durchschaut hat, möchte die komplexen Zahlen nie mehr missen.

13.1 Definition und Darstellung

Wenn in der Mathematik eine neue Zahlenmenge eingeführt wird, muss es dafür einen plausiblen Grund geben, siehe *Abschnitt 1.2*. Es stellt sich also die Frage, welche mathematischen Probleme nicht mit reellen Zahlen gelöst werden können. Beim Rechnen mit reellen Zahlen sind wir immer wieder auf das Problem gestoßen, dass unter der Wurzel keine negative Zahl stehen darf. Oder anders formuliert: Es gibt keine reelle Zahl, deren Quadrat eine negative Zahl ergibt. Die grundlegende Idee der komplexen Zahlen besteht darin, die reellen Zahlen so zu erweitern, dass dieses Manko behoben wird.

13.1.1 Komplexe Zahlen

Die Basis für die komplexen Zahlen wird durch die Definition einer imaginären Einheit gelegt. Die imaginäre Einheit ist dadurch festgelegt, dass das Quadrat der imaginären Einheit -1 ergibt. Die imaginäre Einheit ist somit keine reelle Zahl, sondern etwas Neues.

In der Mathematik ist es üblich, die komplexe Einheit mit i zu bezeichnen. Um Verwechslungen mit der Abkürzung für die Stromstärke zu vermeiden, verwendet man in der Elektrotechnik manchmal die Schreibweise j .

Definition 13.1 (Imaginäre Einheit)

Die **imaginäre Einheit** i ist definiert durch

$$i^2 = -1.$$

In *Definition 13.1* haben wir bewusst nicht die Formulierung $i = \sqrt{-1}$ gewählt. In *Abschnitt 13.3.2* werden wir klären, wie das Wurzelsymbol im Zusammenhang mit komplexen Zahlen zu verstehen ist.

Ausgehend von der komplexen Einheit i definiert man die Menge der komplexen Zahlen. Dabei geht man so ähnlich wie bei Koordinaten von Punkten oder Vektoren vor. Jede komplexe Zahl besitzt eine reelle und eine imaginäre Komponente.

Definition 13.2 (Komplexe Zahlen)

Die Menge der **komplexen Zahlen** ist definiert durch

$$\mathbb{C} = \{z = x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}, \quad i^2 = -1\}.$$

Dabei bezeichnet die reelle Zahl x den **Realteil** $\operatorname{Re}(z)$ und die reelle Zahl y den **Imaginärteil** $\operatorname{Im}(z)$ der komplexen Zahl $z = x + iy$.

Die Menge der reellen Zahlen ist eine echte Teilmenge der komplexen Zahlen. Sie besteht aus allen komplexen Zahlen mit Imaginärteil null. Alle komplexen Zahlen der Form $z = iy$, also alle komplexen Zahlen mit Realteil null, bezeichnet man als rein imaginäre Zahlen.

Beispiel 13.1 (Komplexe Zahlen)

- a) Die komplexe Zahl $z_1 = 1 - i$ hat den Realteil 1 und den Imaginärteil -1 .
- b) Die Zahl $z_2 = 2i$ hat den Realteil 0 und den Imaginärteil 2.
- c) Durch $z_3 = 1$ wird eine komplexe Zahl mit Realteil 1 und Imaginärteil 0 festgelegt. ■

13.1.2 Gaußsche Zahlenebene

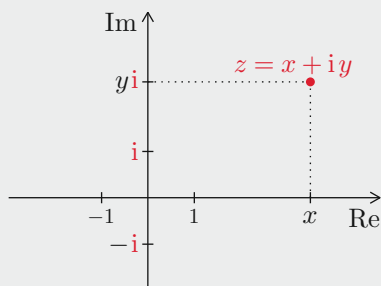
Eine komplexe Zahl hat zwei reelle Anteile, den Realteil und den Imaginärteil. Dabei ist unbedingt zu beachten, dass der Imaginärteil eine reelle Zahl ist und die imaginäre Einheit i nicht enthält. Eine komplexe Zahl besitzt zwei unabhängige Komponenten. Deshalb reicht zur Darstellung komplexer Zahlen ein Zahlenstrahl, wie wir es von den reellen Zahlen gewohnt sind, nicht aus.

Gaußsche Zahlenebene

Die grafische Darstellung der Menge der komplexen Zahlen in einem kartesischen Koordinatensystem bezeichnet man als **Gaußsche Zahlenebene**. Die horizontale Achse ist die **reelle Achse** und die vertikale Achse die **imaginäre Achse**. Die Darstellung durch

$$z = x + iy$$

bezeichnet man als **kartesische Form**.



Korrekterweise muss die Einheit **i** bei der Beschriftung der imaginären Achse angegeben werden. An vielen Stellen wird jedoch diese mathematische Feinheit ignoriert und die imaginäre Achse ohne die imaginäre Einheit beschriftet. Oftmals werden komplexe Zahlen in der Gaußschen Zahlenebene nicht nur durch Punkte, sondern durch Pfeile dargestellt.

13.1.3 Polarkoordinaten

Für komplexe Zahlen haben sich mehrere Darstellungsformen etabliert. In kartesischen Koordinaten verwendet man den Realteil und den Imaginärteil, um eine komplexe Zahl zu beschreiben. In Polarkoordinaten betrachtet man den Abstand einer komplexen Zahl vom Ursprung und den Winkel, den eine komplexe Zahl mit der positiven reellen Achse bildet. Beim Arbeiten mit komplexen Zahlen muss man mit beiden Darstellungen vertraut sein. Es gibt Problemstellungen, die sich in kartesischer Form leichter lösen lassen als in Polarkoordinaten. Andere Probleme wiederum lassen sich eleganter in Polarkoordinaten lösen.

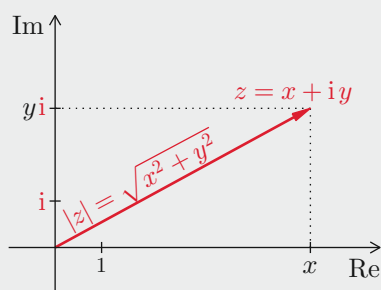
Definition 13.3 (Betrag einer komplexen Zahl)

Der **Betrag** der komplexen Zahl z ist der Abstand von z zum Ursprung. In kartesischer Form

$$z = x + iy$$

gilt

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

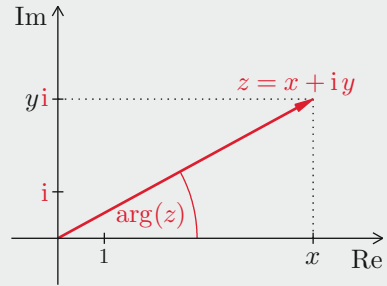


Wenn man zusätzlich zum Betrag auch noch einen Winkel für eine komplexe Zahl festlegt, dann ist die Zahl dadurch eindeutig beschrieben. Bei komplexen Zahlen wird der Winkel bezüglich der positiven reellen Achse gemessen.

Definition 13.4 (Argument einer komplexen Zahl)

Das **Argument** der komplexen Zahl $z = x + iy$ mit $z \neq 0$ ist der Winkel von z . Es gilt:

$$\arg(z) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{für } x > 0, y \text{ bel.} \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & \text{für } x < 0, y \geq 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \pi & \text{für } x < 0, y < 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{für } x = 0, y > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{für } x = 0, y < 0. \end{cases}$$



Der Arkustangens liefert Werte zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$. Abhängig vom Quadranten, in dem die komplexe Zahl liegt, muss man deshalb bei der Winkelberechnung π addieren oder subtrahieren. Die Formel zur Berechnung des Winkels in *Definition 13.4* liefert dadurch Werte im Intervall von $(-\pi, \pi]$. Zahlen auf der positiven reellen Achse haben das Argument 0, auf der positiven imaginären Achse das Argument $\frac{\pi}{2}$, auf der negativen reellen Achse das Argument π und auf der negativen imaginären Achse das Argument $-\frac{\pi}{2}$.

Bei der komplexen Zahl Null liegt eine Ausnahmesituation vor. Der Zahl Null ist kein eindeutiger Winkel zugeordnet. Meistens umgeht man dieses Problem, indem man der Zahl Null den Winkel null zuordnet.

Bei praktischen Problemstellungen wird man oft mit Winkelberechnungen konfrontiert. In vielen Programmiersprachen gibt es deshalb eine erweiterte Arkustangensfunktion, die in der Regel mit `atan2` bezeichnet wird:

$$\arg(x + iy) = \text{atan2}(y, x).$$

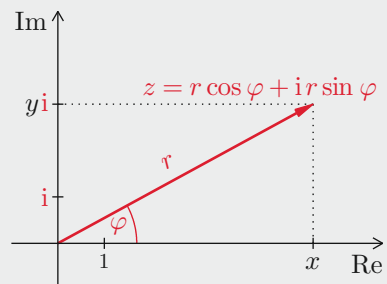
Die Winkelzuordnung bei den komplexen Zahlen hat einen Schönheitsfehler. Beim Wechsel über die negative reelle Achse springen die Winkelwerte um 2π . Dieser Schönheitsfehler lässt sich genau so wenig beseitigen wie die Datumsgrenze entlang des 180. Längengrads.

Definition 13.5 (Polarform, Polarkoordinaten)

Die Darstellung einer komplexen Zahl z mit Betrag r und Winkel φ in der Form

$$z = \underbrace{r \cos \varphi}_{\text{Re}(z)} + i \underbrace{r \sin \varphi}_{\text{Im}(z)}$$

nennt man **Polarform**. Man bezeichnet r und φ als **Polarkoordinaten** von z .



In Polarkoordinaten sind auch Winkel außerhalb des Intervalls $(-\pi, \pi]$ zulässig. Dabei ist zu beachten, dass Winkel, die sich um ein ganzzahliges Vielfaches von 2π unterscheiden, bei gleichem Radius dieselbe komplexe Zahl darstellen.

13.1.4 Exponentialform

Mitte des 18. Jahrhunderts hat *Leonhard Euler* einen verblüffenden Zusammenhang zwischen der Kreiszahl π , der Eulerschen Zahl e und der imaginären Einheit i entdeckt:

$$e^{i\pi} = -1.$$

Durch die imaginäre Einheit i entsteht also eine mathematische Verbindung zwischen der Wachstumskonstante e und der trigonometrischen Konstante π . Dieser Zusammenhang lässt sich auf die e -Funktion und die trigonometrischen Funktionen Sinus und Kosinus erweitern.

Satz 13.1 (Eulersche Identität)

Für jede reelle Zahl φ gilt die **Eulersche Identität**

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi.$$

Diese Beziehung wird auch als **Satz von Euler** oder **Euler-Formel** bezeichnet. Außerdem gilt stets $|e^{i\varphi}| = 1$.

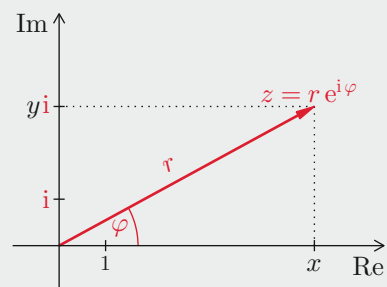
Die Eulersche Identität lässt sich mithilfe von Potenzreihen beweisen, siehe *Kapitel 10*. Durch die Eulersche Identität und durch Polarkoordinaten ergibt sich die sogenannte Exponentialform einer komplexen Zahl.

Definition 13.6 (Exponentialform)

Die Darstellung einer komplexen Zahl z mithilfe der Eulerschen Zahl e

$$z = r e^{i\varphi}$$

nennt man **Exponentialform**. Dabei sind der Betrag $|z| = r$ und das Argument $\arg(z) = \varphi$ die Polarkoordinaten der komplexen Zahl z .



Die Exponentialform ist beim Arbeiten mit komplexen Zahlen sehr hilfreich. Insbesondere werden wir die Potenzgesetze aus *Satz 1.4* verwenden, um Potenzen und Wurzeln von komplexen Zahlen zu berechnen.

Beispiel 13.2 (Komplexe Zahlen)

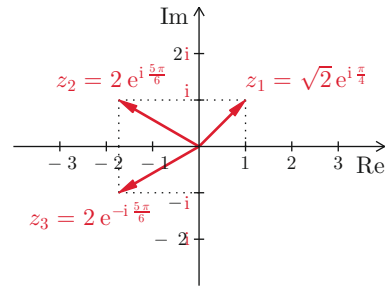
Die komplexe Zahl $z_1 = 1 + i$ lässt sich von der kartesischen Form in die Exponentialform umrechnen:

$$|z_1| = \sqrt{2}, \quad \arg(z_1) = \arctan \frac{1}{1} = \frac{\pi}{4}.$$

Die Zahl $z_2 = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$ lautet in kartesischer Form

$$z_2 = 2 \cos \frac{5\pi}{6} + 2i \sin \frac{5\pi}{6} = -\sqrt{3} + i.$$

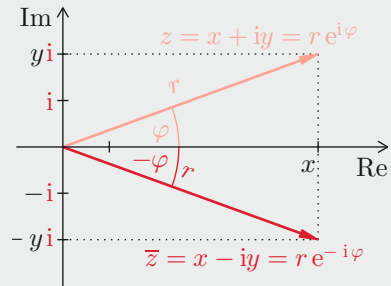
Die Zahl $z_3 = 2e^{-i\frac{5\pi}{6}}$ liegt im dritten Quadranten.

**Definition 13.7 (Konjugiert komplexe Zahl)**

Die **konjugiert komplexe Zahl** \bar{z} einer komplexen Zahl z erhält man durch Spiegeln an der reellen Achse:

$$\blacktriangleright z = x + iy \implies \bar{z} = x - iy$$

$$\blacktriangleright z = r e^{i\varphi} \implies \bar{z} = r e^{-i\varphi}$$



Manchmal verwendet man auch die Bezeichnung z^* für die konjugiert komplexe Zahl von z . Die Eulersche Identität besagt, dass man eine e -Funktion mit imaginärem Exponenten mithilfe von Sinus und Kosinus ausdrücken kann. Umgekehrt lassen sich Sinus und Kosinus auch mit e -Funktionen mit imaginären Exponenten darstellen. Dazu betrachten wir die Eulersche Identität einmal für den Winkel φ und einmal für den Winkel $-\varphi$. Durch Addition bzw. Subtraktion der beiden Identitäten ergibt sich

$$\begin{aligned} e^{i\varphi} &= \cos \varphi + i \sin \varphi \\ e^{-i\varphi} &= \cos \varphi - i \sin \varphi \\ \hline e^{i\varphi} + e^{-i\varphi} &= 2 \cos \varphi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e^{i\varphi} &= \cos \varphi + i \sin \varphi \\ e^{-i\varphi} &= \cos \varphi - i \sin \varphi \\ \hline e^{i\varphi} - e^{-i\varphi} &= 2i \sin \varphi \end{aligned}$$

Satz 13.2 (Darstellung von Sinus und Kosinus durch komplexe e -Funktionen)

Der Sinus und der Kosinus lassen sich für jede reelle Zahl φ mithilfe von e -Funktionen mit imaginären Exponenten darstellen:

$$\blacktriangleright \cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}$$

$$\blacktriangleright \sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$$

21 Elementare Zahlentheorie

Mit Teilbarkeitseigenschaften ganzer Zahlen, wie etwa der Modulo-Rechnung, hat sich die Mathematik schon in der Antike beschäftigt. Man bezeichnet dieses Teilgebiet als elementare oder arithmetische Zahlentheorie. Durch den Einsatz von Computern besitzt die elementare Zahlentheorie heute vielfältige praktische Anwendungen. Dabei spielen oft Primzahlen eine entscheidende Rolle. Beispiele sind Codes mit sogenannten Prüfziffern, wie etwa die ISBN-Nummern im Buchhandel, die EAN-Barcodes zur Produktkennzeichnung, die IBAN-Kontonummern der Banken und die Personalausweisnummern. Diese Prüfziffern helfen, die Eingabe- und Übertragungsfehler dieser Codes zu reduzieren.

21.1 Teilbarkeit

Einige Begriffe der elementaren Zahlentheorie sind so nahe liegend, dass wir uns schwer tun, die Notwendigkeit einer mathematischen Definition zu akzeptieren. Ein typisches Beispiel ist der Begriff der Teilbarkeit.

Definition 21.1 (Teilbarkeit)

Man nennt eine ganze Zahl m einen **Teiler** der ganzen Zahl n , falls n ein ganzzahliges Vielfaches von m ist:

$$m \mid n \iff \text{es gibt eine Zahl } q \in \mathbb{Z} \text{ mit } n = q \cdot m.$$

Beispiel 21.1 (Teilbarkeit)

- a) $7 \mid 91$, denn $91 = 13 \cdot 7$.
 b) $13 \mid -1963$, denn $-1963 = -151 \cdot 13$. ■

Satz 21.1 (Rechenregeln für Teilbarkeit)

Für beliebige ganze Zahlen ℓ , m und n gilt:

- | | |
|---|---|
| ▶ $m \mid 0$ | ▶ $m \mid m$ |
| ▶ $m \mid n \implies m \mid \ell \cdot n$ | ▶ $m \mid n \implies m \mid -n$ |
| ▶ $m \mid n$ und $m \mid \ell \implies m \mid (n + \ell)$ | ▶ $m \mid n$ und $m \mid \ell \implies m \mid (n - \ell)$ |

Die Division zweier ganzer Zahlen geht in der Regel nicht ohne Rest auf. Diesen Divisionsrest bezeichnet man als Modulo.

Definition 21.2 (Modulo)

Den Rest r , der beim Teilen einer ganzen Zahl n durch eine ganze Zahl m entsteht, bezeichnet man als **Modulo**:

$$r = n \pmod{m} \iff \text{es gibt eine Zahl } q \in \mathbb{Z} \text{ mit } n = q \cdot m + r.$$

Der Rest r liegt in der Menge $\mathbb{Z}_m = \{0, 1, \dots, |m| - 1\}$.

Für den Divisionsrest hat man eine Art normierten Bereich festgelegt. Bei der Rechnung modulo m besteht dieser Bereich aus den Zahlen von 0 bis maximal $|m| - 1$, der mit \mathbb{Z}_m bezeichnet wird. Durch das Betragszeichen wird auch der Fall $m < 0$ berücksichtigt.

Beispiel 21.2 (Modulo)

- a) $30 \pmod{13} = 4$, denn $30 = 2 \cdot 13 + 4$.
- b) $-30 \pmod{13} = 9$, denn $-30 = -3 \cdot 13 + 9$.
- c) $12345 \pmod{13} = 8$, denn $12345 = 949 \cdot 13 + 8$.
- d) Für $n > 1$ gilt: $2n - 1 \pmod{n} = n - 1$, denn $2n - 1 = 1 \cdot n + n - 1$. ■

Es gibt eine Reihe von Zahlen m , für die der Modulo-Rest r einfach zu bestimmen ist. Beispielsweise ist bei $m = 2$ der Modulo-Rest einer geraden Zahl 0 und der Modulo-Rest einer ungeraden Zahl 1. Bei $m = 10$ ist der Modulo-Rest die letzte Ziffer und bei $m = 5$ muss man nur die letzte Ziffer durch 5 teilen, um den Modulo-Rest zu erhalten. Bei $m = 3$ oder $m = 9$ kann man den Modulo-Rest über die iterierte Quersumme bestimmen.

Beispiel 21.3 (Iterierte Quersumme)

Zur Bestimmung von

$$27051963 \pmod{9}$$

bilden wir zunächst die Quersumme, also die Summe der einzelnen Ziffern

$$2 + 7 + 0 + 5 + 1 + 9 + 6 + 3 = 33.$$

Da die Quersumme einen Wert größer als 9 hat, bilden wir die Quersumme der Quersumme $3 + 3 = 6$. Dieses Prinzip bezeichnet man als iterierte Quersumme. Es liefert einen Wert, der nicht mehr größer als 9 ist und damit unser gesuchtes Ergebnis $27051963 \pmod{9} = 6$. ■

Beispiel 21.4 (Mikroprozessor)

Die Ganzzahlarithmetik bei einem Mikroprozessor mit 16 Bit entspricht der Rechnung modulo $m = 2^{16}$. Ein solcher Prozessor kann die Zahlen aus

$$\mathbb{Z}_{65536} = \{0, 1, 2, \dots, 65535\}$$

darstellen. ■

Die größte Zahl, die gleichzeitig ein Teiler von zwei ganzen Zahlen ist, nennt man den größten gemeinsamen Teiler dieser beiden Zahlen.

Definition 21.3 (Größter gemeinsamer Teiler, teilerfremd)

Der **größte gemeinsame Teiler** m der beiden ganzen Zahlen n_1 und n_2 ist die größte natürliche Zahl m , die beide Zahlen teilt:

$$m = \text{ggT}(n_1, n_2) \iff m \text{ ist größte natürliche Zahl mit } m \mid n_1 \text{ und } m \mid n_2.$$

Zwei Zahlen n_1 und n_2 mit $\text{ggT}(n_1, n_2) = 1$ bezeichnet man als **teilerfremd**.

Für Berechnungen mit dem größten gemeinsamen Teiler gibt es ein paar einfache Regeln.

Satz 21.2 (Rechenregeln für ggT)

Für beliebige ganze Zahlen n , n_1 und n_2 gilt:

- ▶ $\text{ggT}(n, 0) = |n|$
- ▶ $\text{ggT}(n, 1) = 1$
- ▶ $\text{ggT}(n, n) = |n|$
- ▶ $\text{ggT}(n_1, n_2) = \text{ggT}(n_2, n_1)$
- ▶ $n_1 \mid n_2 \implies \text{ggT}(n_1, n_2) = n_1$
- ▶ $\text{ggT}(n_1, n_2) = \text{ggT}(n_1, n_2 \bmod n_1)$

Die Rechenregel

$$\text{ggT}(n_1, n_2) = \text{ggT}(n_1, n_2 \bmod n_1)$$

schaun wir uns genauer an. Wenn m der größte gemeinsame Teiler von n_1 und n_2 ist, dann gilt:

$$m = \text{ggT}(n_1, n_2) \implies m \mid n_1 \text{ und } m \mid n_2.$$

Mit r bezeichnen wir n_2 modulo n_1 . Nach *Definition 21.2* gibt es dann eine ganze Zahl q so, dass:

$$r = n_2 \bmod n_1 \implies n_2 = q \cdot n_1 + r.$$

Da m sowohl n_1 als auch n_2 teilt gilt:

$$m \mid n_2 - q \cdot n_1 = r.$$

Somit ist m auch ein Teiler von n_2 modulo n_1 . Dieses Prinzip war bereits dem griechischen Mathematiker *Euklid* bekannt. Gegen Ende des 4. Jahrhunderts vor Christus formuliert er in seinem 7. Buch der Elemente „Teilbarkeit und Primzahlen“ den nach ihm benannten Algorithmus zur Bestimmung des größten gemeinsamen Teilers.

Euklidischer Algorithmus

„Es seien AB und CD die beiden gegebenen Zahlen, sodass die größere, AB , von der kleineren, CD , nicht genau gemessen werde. Nimm immer die kleinere von der größeren weg, bis ein Rest kommt, welcher die nächst vorgehende Zahl genau misst. Dieser Rest ist das größte gemeinschaftliche Maß der beiden gegebenen Zahlen.“

Die Schreibweise von Euklid ist sicherlich gewöhnungsbedürftig. Wenn man sich jedoch vor Augen hält, dass zur damaligen Zeit Zahlen nur in Form von Strecken zwischen zwei Punkten betrachtet wurden, dann lassen sich die Operationen „genau messen“ und „die kleinere von der größeren weg nehmen“ mit Holzstöcken nachvollziehen.

Beispiel 21.5 (Euklidischer Algorithmus)

- a) Wir berechnen den größten gemeinsamen Teiler von 35 und 21. Nach dem Euklidischen Algorithmus bilden wir zunächst die Differenz der beiden Zahlen

$$\text{ggT}(35, 21) \rightarrow 35 - 21 = 14 \rightarrow \text{ggT}(21, 14).$$

Im zweiten Schritt betrachten wir die beiden Zahlen 21 und 14, die Differenz ergibt

$$\text{ggT}(21, 14) \rightarrow 21 - 14 = 7 \rightarrow \text{ggT}(14, 7).$$

Im nächsten Schritt bilden wir

$$\text{ggT}(14, 7) \rightarrow 14 - 7 = 7 \rightarrow \text{ggT}(7, 7) = 7.$$

- b) Die einzelnen Schritte zur Bestimmung des größten gemeinsamen Teilers von 81 und 18 sind:

$$\text{ggT}(81, 18) = \text{ggT}(63, 18) = \text{ggT}(45, 18) = \text{ggT}(27, 18) = \text{ggT}(18, 9) = \text{ggT}(9, 9) = 9. \quad \blacksquare$$

Definition 21.4 (Kleinstes gemeinsames Vielfaches)

Das **kleinste gemeinsame Vielfache** n der beiden ganzen Zahlen m_1 und m_2 ist die kleinste natürliche Zahl n , die ein Vielfaches beider Zahlen ist:

$$n = \text{kgV}(m_1, m_2) \iff n \text{ ist kleinste natürliche Zahl mit } m_1 \mid n \text{ und } m_2 \mid n.$$

Das kleinste gemeinsame Vielfache ist das Gegenstück zum größten gemeinsamen Teiler. Das Produkt aus ggT und kgV zweier Zahlen ergibt stets das Produkt der beiden Zahlen.

Satz 21.3 (Zusammenhang von ggT und kgV)

Zwischen dem größten gemeinsamen Teiler und dem kleinsten gemeinsamen Vielfachen besteht der Zusammenhang

$$\text{ggT}(m, n) \cdot \text{kgV}(m, n) = |m \cdot n|.$$

Zur Berechnung des kleinsten gemeinsamen Vielfachen greifen wir auf den größten gemeinsamen Teiler zurück, den wir ja mit dem Euklidischen Algorithmus ermitteln können.

Beispiel 21.6 (Kleinstes gemeinsames Vielfaches)

Wir ermitteln das kleinste gemeinsame Vielfache von 39 und 65. Dazu bestimmen wir zunächst den größten gemeinsamen Teiler mit dem Euklidischen Algorithmus:

$$\text{ggT}(65, 39) = \text{ggT}(39, 26) = \text{ggT}(26, 13) = \text{ggT}(13, 13) = 13.$$

Daraus erhalten wir dann

$$\text{kgV}(65, 39) = \frac{65 \cdot 39}{\text{ggT}(65, 39)} = \frac{65 \cdot 39}{13} = 195. \quad \blacksquare$$

21.2 Kongruente Zahlen

Berechnungen modulo m erzeugen Zahlen in \mathbb{Z}_m . Zwei Zahlen, die modulo m denselben Rest haben, bezeichnet man als kongruent modulo m .

Definition 21.5 (Kongruente Zahlen)

Man nennt zwei natürliche Zahlen n_1 und n_2 **kongruent modulo m** , falls der Rest modulo m beider Zahlen gleich ist:

$$n_1 \equiv n_2 \pmod{m} \iff n_1 \bmod m = n_2 \bmod m.$$

Beispiel 21.7 (Kongruente Zahlen)

Modulo $m = 2$ sind alle geraden Zahlen kongruent zu 0:

$$\dots, \quad -2 \equiv 0 \pmod{2}, \quad 0 \equiv 0 \pmod{2}, \quad 2 \equiv 0 \pmod{2}, \quad 4 \equiv 0 \pmod{2}, \quad \dots$$

Die ungeraden Zahlen sind modulo $m = 2$ kongruent zu 1:

$$\dots, \quad -3 \equiv 1 \pmod{2}, \quad -1 \equiv 1 \pmod{2}, \quad 1 \equiv 1 \pmod{2}, \quad 3 \equiv 1 \pmod{2}, \quad \dots$$

Somit ist jede Zahl modulo $m = 2$ entweder kongruent zu 0 oder zu 1. ■

Satz 21.4 (Eigenschaften der Kongruenz)

Die Kongruenz ist

- ▶ reflexiv: $n \equiv n \pmod{m}$,
- ▶ symmetrisch: $n_1 \equiv n_2 \pmod{m} \implies n_2 \equiv n_1 \pmod{m}$,
- ▶ transitiv: $n_1 \equiv n_2 \pmod{m}$ und $n_2 \equiv n_3 \pmod{m} \implies n_1 \equiv n_3 \pmod{m}$.

Satz 21.5 (Rechenregeln für kongruente Zahlen)

Für beliebige ganze Zahlen $\ell, \ell_1, \ell_2, m, n_1$, und n_2 gilt:

- ▶ $n_1 \equiv n_2 \pmod{m} \implies n_1 \cdot \ell \equiv n_2 \cdot \ell \pmod{m}$
- ▶ $n_1 \equiv n_2 \pmod{m}$ und $\ell_1 \equiv \ell_2 \pmod{m} \implies n_1 + \ell_1 \equiv n_2 + \ell_2 \pmod{m}$
- ▶ $n_1 \equiv n_2 \pmod{m}$ und $\ell_1 \equiv \ell_2 \pmod{m} \implies n_1 \cdot \ell_1 \equiv n_2 \cdot \ell_2 \pmod{m}$

Beispiel 21.8 (Rechenregeln für kongruente Zahlen)

- a) Die beiden Zahlen 8 und 3 sind kongruent modulo $m = 5$. Multipliziert man diese Zahlen mit demselben Faktor 7, so ergeben sich wieder kongruente Zahlen:

$$8 \equiv 3 \pmod{5} \implies \underbrace{8 \cdot 7}_{56 \equiv 1 \pmod{5}} \equiv \underbrace{3 \cdot 7}_{21 \equiv 1 \pmod{5}} \pmod{5}$$

- b) Aus den Kongruenzen von 8 und 3 sowie 4 und 9 modulo $m = 5$ folgt die Kongruenz der Summen

$$8 \equiv 3 \pmod{5} \quad \text{und} \quad 9 \equiv 4 \pmod{5} \implies \underbrace{8+9}_{17 \equiv 2 \pmod{5}} \equiv \underbrace{3+4}_{7 \equiv 2 \pmod{5}} \pmod{5}$$

und der Produkte

$$8 \equiv 3 \pmod{5} \quad \text{und} \quad 9 \equiv 4 \pmod{5} \implies \underbrace{8 \cdot 9}_{72 \equiv 2 \pmod{5}} \equiv \underbrace{3 \cdot 4}_{12 \equiv 2 \pmod{5}} \pmod{5}. \quad \blacksquare$$

Durch die Rechenregeln für kongruente Zahlen ist sichergestellt, dass eine Addition oder eine Multiplikation modulo m für kongruente Zahlen dasselbe Ergebnis ergibt. Es ist also nahe liegend, dass man für Berechnungen modulo m möglichst einfache Zahlen verwendet. Das sind die Zahlen aus \mathbb{Z}_m . Zu jeder dieser m Zahlen sind unendlich viele Zahlen kongruent modulo m . Alle diese kongruenten Zahlen bezeichnet man als Restklasse.

Definition 21.6 (Restklasse)

Die Menge der ganzen Zahlen, die zu einer ganzen Zahl r modulo m kongruent sind, bezeichnet man als **Restklasse modulo m** :

$$[r]_m = [r] = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \equiv r \pmod{m}\}.$$

Beispiel 21.9 (Restklassen)

- a) Die Restklasse modulo 5 der Zahl 1 besteht aus

$$[1]_5 = \{\dots, -14, -9, -4, 1, 6, 11, 16, \dots\}.$$

- b) Die Restklasse modulo 7 der Zahl 2 besteht aus

$$[2]_7 = \{\dots, -19, -12, -5, 2, 9, 16, 23, \dots\}.$$

Sachwortverzeichnis

Symbole

\prod 35

\sum 35

e 250

i 452

π 42

∞ 26

A

Abbildung,

 kreistreue 477

 winkeltreue 477

abgeschlossenes Intervall 31

abhängige Variable 176

Ableitung 272

 gemischte partielle 432

 höherer Ordnung 281

 logarithmische 288

 partielle 420, 422

 partielle höherer Ordnung 432

 Richtungs- 426

 Umkehrfunktion 287

 vektorwertige 443

 verallgemeinerte 606

Ableitungsfunktion 277

 partielle 422

abschnittsweise definierte Funktion 181

absolute Konvergenz 375

absoluter Fehler 311

Absolutglied 62

Abtastzeit 675

Achsensymmetrie 188

achsensymmetrische Funktion 188

Addition,

 Matrix- 136

 Vektor- 87

Additionstheorem,

 Kosinus 222

 Kotangens 224

 Sinus 222

 Tangens 224

ähnliche Matrizen 165

Ähnlichkeitsdifferenzialgleichung 493

Ähnlichkeitstransformation 165

Algorithmus von Gauß 67

allgemeine Kettenregel 429

allgemeine Kosinusfunktion 224

allgemeine Lösung 482

alternierende Folge 248

alternierende Reihe 374

Amplitude 224, 621

Amplitudenfrequenzgang 524 f.

Amplitudenmodulation 625

Anfangswert,

 Differenzgleichung 558

 Rekursionsgleichung 558

Anfangswertproblem 484

antiparallel 86

Äquivalenz 20

Äquivalenzumformung 45, 64

Archimedische Spirale 391

Areakosinus Hyperbolicus 239

Areakotangens Hyperbolicus 240

Areasinus Hyperbolicus 239

Areatangens Hyperbolicus 240

Argument 454

Arkuskosinus 226

Arkuskosinuswerte 231

Arkuskotangens 229

Arkuskotangenswerte 231

Arkussinus 226

Arkussinuswerte 231

Arkustangens 229

Arkustangenswerte 231

Asymptote,

 schiefe 263

 senkrechte 258

 waagrechte 262

asymptotisch stabiles System 539, 570

asymptotische obere Schranke 252

asymptotische Stabilität 539, 570

aufzählende Form 22

Ausgleichsfunktion 440
 Ausgleichsgerade 436
 Ausgleichspolynom 436
 äußere Funktion 187
 AWP 484

B

Basisvektor 103
 Bernstein-Polynom 406
 beschränkte Folge 248
 beschränkte Funktion 194
 beschreibende Form 22
 bestimmt divergente Folge 251
 bestimmtes Integral 324
 Betrag,
 komplexe Zahl 453
 Vektor 85
 Zahl 33
 Betragsspektrum 587
 Bézier-Kurve 406
 bijektive Funktion 175
 Bild 159
 Bildbereich 648, 674
 Binomialkoeffizient 39
 binomische Formel 40
 binomischer Satz 40
 Bisektionsverfahren 266
 Bogenlänge,
 Funktion 354
 Kurve 404
 Parametrisierung 405
 Bogenmaß 42
 Brennpunkt 394 ff.

C

Cauchy-Produkt 382
 charakteristische Gleichung 162, 505
 charakteristisches Polynom 162
 Chinesischer Restsatz 697
 Cramersche Regel 144, 147, 151

D

Dämpfung 518
 Dämpfungsgrad 524
 Definitionslücke 177
 Definitionsmenge 174, 176, 413, 442
 Determinante 144 f., 149
 Dezimalzahl 27

Diagonalmatrix 133
 Differenzengleichung 558
 Fixpunkt 569
 Gleichgewichtspunkt 569
 homogen 558, 565
 inhomogen 558, 565
 linear 558
 System 565
 Differenzengleichungssystem,
 asymptotisch stabiles 570
 Differenzenmenge 23
 Differenzenquotient 272
 Rückwärts- 306
 Vorwärts- 306
 zentraler 306
 Differenzial 275
 totales 428
 Differenzialgleichung 481
 allgemeine Lösung 482
 explizite Form 484
 Fundamentallösung 498
 gewöhnliche 481
 Gleichgewichtspunkt 487
 homogene lineare 494
 implizite Form 484
 inhomogene lineare 494
 lineare 494, 505
 Lösung 482
 Schwingungs- 518
 separierbare 490
 Singularität 487
 Störfunktion 494
 Trajektorie 482
 triviale Lösung 494
 Variation der Konstanten 499
 Differenzialgleichungssystem 526
 asymptotisch stabiles 539
 instabiles 539
 konstante Koeffizienten 531
 lineares 531
 stabiles 539
 Differenzialquotient 273, 421
 Differenziation,
 implizite 290, 430
 logarithmische 288
 differenzierbare Funktion 272, 423
 Dimensionsformel 159
 dimensionslose Frequenz 524

- dimensionsloser Frequenzgang,
 - Amplituden- 525
 - Phasen- 525
 - Dirac-Distribution 603
 - Diskriminante 47, 467
 - divergente Folge 249
 - divergentes uneigentliches Integral 349
 - Divergenz,
 - bestimmte 251
 - Folge 249
 - unbestimmte 251
 - uneigentliches Integral 349
 - Doppelwinkelformel,
 - Kosinus 223
 - Sinus 223
 - Drehstreckung 474
 - Dreieck 40
 - Hypotenuse 40
 - Kathete 40
 - Dreiecksmatrix 134
 - Dreiecksungleichung 34, 88, 461
 - dyadisches Produkt 140
- E**
- e-Funktion 233
 - Ebene 416
 - Normalenform 117
 - Phasen- 529
 - Tangential- 425
 - Zustands- 529
 - echt gebrochenrationale Funktion 214
 - Eigenfunktion 506
 - Eigenvektor 160
 - Eigenwert 160, 506
 - Eindeutigkeit 44
 - Einheitsmatrix 133
 - Einheitssprungfunktion 601
 - Einheitsvektor 86
 - Einheitswurzel 463
 - einseitige Faltung 609
 - Element 23
 - Linien- 487
 - Eliminationsverfahren 67
 - Ellipse 393 f.
 - Brennpunkt 394
 - Halbachse 394
 - Entwicklungspunkt 376
 - Entwicklungssatz 149
 - Erregeramplitude 521
 - Erregerkreisfrequenz 521
 - erzwungene Schwingung 518
 - Euler-Formel 455
 - Euler-Polygonzugverfahren 543
 - Euler-Verfahren 543
 - Eulersche Identität 455
 - Eulersche Zahl 250
 - Existenz 44
 - explizite Folge 246
 - explizite Form 484
 - Exponentialform 455
 - Exponentialfunktion 231
 - Extremwert,
 - Maximum 433
 - Minimum 433
 - Extremwertaufgabe 312
- F**
- Faktorregel 282, 332
 - Fakultät 38
 - Falk-Schema 143
 - Faltung 607, 680
 - diskrete 680
 - einseitige 609
 - Fehler,
 - absoluter 311
 - prozentualer 311
 - relativer 311
 - Fehlerquadrate 436
 - Fibonacci-Folge 684
 - Fixpunkt 569
 - Fläche,
 - Ebene 416
 - Sombrero 418
 - Folge 246
 - alternierende 248
 - beschränkte 248
 - bestimmt divergente 251
 - divergente 249
 - explizite 246
 - Fibonacci 684
 - konvergente 249
 - monoton fallende 248
 - monoton wachsende 248
 - nach oben beschränkte 248
 - nach unten beschränkte 248
 - Nullfolge 249
 - rekursive 247
 - streng monoton fallende 248

Folge

- streng monoton wachsende 248
- unbestimmt divergente 251
- Vorwärtsdifferenz 679

Folglied 246

Form,

- aufzählende 22
- beschreibende 22
- explizite 484
- implizite 484

Fourier-Koeffizient,

- komplexer 584
- reeller 577

Fourier-Reihe 577

- Betragsspektrum 587
- komplexe 584
- Phasenspektrum 587

Fourier-Transformation 614

- Frequenzbereich 614
- inverse 628
- Zeitbereich 614

Fourier-Transformierte 614

freie Schwingung 518

Frequenz 192

- dimensionslose 524
- Kreis- 518

Frequenzbereich 614

Frequenzgang,

- Amplituden- 524
- Phasen- 524

Fundamentallösung 498, 502

Fundamentallösungsvektoren 532

Fundamentalsatz der Algebra 466

Fundamentalsystem 502

Funktion 174

$$\sqrt{x} \quad 203$$

$$A \cos(\omega t + \varphi) \quad 224$$

$$a^x \quad 231$$

$$\arccos x \quad 226$$

$$\operatorname{arccot} x \quad 229$$

$$\operatorname{arcosh} x \quad 239$$

$$\operatorname{arcoth} x \quad 240$$

$$\arcsin x \quad 226$$

$$\arctan x \quad 229$$

$$\operatorname{arsinh} x \quad 239$$

$$\operatorname{artanh} x \quad 240$$

$$\cos x \quad 220$$

$$\cosh x \quad 238$$

$$\cot x \quad 221$$

Funktion

$$\coth x \quad 239$$

$$e^x \quad 233$$

$$\ln x \quad 234$$

$$\log_a x \quad 234$$

$$\sigma(t) \quad 601$$

$$\sin x \quad 220$$

$$\operatorname{sinc} x \quad 292$$

$$\sinh x \quad 237$$

$$\tan x \quad 221$$

$$\tanh x \quad 239$$

$$x^n \quad 202$$

abschnittsweise definierte 181

achsensymmetrische 188

äußere 187

beschränkte 194

bijektive 175

differenzierbare 272, 423

echt gebrochenrationale 214

Eigen- 506

Exponential- 231

ganzrationale 204

gebrochenrationale 212

gerade 188

Heaviside- 601

injektive 175

innere 187

inverse 195

komplexwertige 469

lineare Ausgleichs- 440

Logarithmus- 234

mit mehreren Variablen 413

mit zwei Variablen 413

monoton fallende 192

monoton wachsende 192

nach oben beschränkte 194

nach unten beschränkte 194

natürliche Exponential- 233

natürliche Logarithmus- 234

periodische 191

Potenz- 202

punktsymmetrische 189

reelle 176

Spektral- 614

stetige 255, 419

streng monoton fallende 192

streng monoton wachsende 192

surjektive 175

Treppen- 675

Funktion

- Übertragungs- 641
- Umkehr- 195
- umkehrbare 195
- unecht gebrochenrationale 214
- ungerade 189
- vektorwertige 442
- verkettet 187
- Wertemenge 175
- Wurzel- 203
- Ziel- 312

Funktionsgrenzwert 253, 419

Funktionsschar 183

G

ganze Zahl 26

ggT 691

kgV 692

kongruent 693

Modulo 690

Primzahl 698

Restklasse 694

Teiler 689

teilerfremd 691

ganzzrationale Funktion 204

Gauß-Algorithmus 67

Gauß-Seidel-Iteration 80

Gaußsche Zahlenebene 453

Gaußsches Eliminationsverfahren 67

gebrochenrationale Funktion 212

Gegenvektor 87

geometrische Reihe 373

gerade Funktion 188

gewöhnliche Differenzialgleichung 481

ggT 691

Gibbssches Phänomen 582

Gleichanteil 574

Gleichgewichtspunkt 487, 569

Gleichheit,

komplexe Zahlen 457

Matrizen 136

Vektoren 86

Zahlen 30

Gleichung,

Äquivalenzumformung 45

charakteristische 162, 505

Diskriminante 47

lineare 45

Normalen- 438, 440

Gleichung

Potenz- 46

quadratisch ergänzen 47

quadratische 47

Gleichungssystem,

Absolutglied 62

homogenes 75

inhomogenes 75

Koeffizient 62

lineares 62

überbestimmtes 74

unterbestimmtes 73

größer 30

größer oder gleich 31

Gradient 426

Gradientenverfahren 446

Graph 178

Grenzstabilität 540

Grenzwert 249, 419

Folge 249

Funktion 253, 419

linksseitiger 255

rechtsseitiger 255

uneigentlicher 251

Grenzwertsätze 659

Grundschiwingung 581

Guldinsche Regel 366

H

Halbachse 394

Halbkugel 417

halboffenes Intervall 31 f.

Harmonische 581

harmonische Reihe 372

harmonische Schwingung 470

Hauptachsentransformation 165

Hauptsatz,

Teil I 326

Teil II 329

Heaviside-Funktion 601

hebbare Unstetigkeitsstelle 257

Heron-Verfahren 265

Hesse-Matrix 433

Hessesche Normalenform 117

Hochpunkt 299

Höhenlinie 416

homogen 565

homogene lineare DGL 494

homogenes Gleichungssystem 75

Horner-Schema 212

Hyperbel 393, 395

hyperbolisches Paraboloid 417

Hypotenuse 40

I

Im 452

imaginäre Achse 453

imaginäre Einheit 452

Imaginärteil 452

Implikation 20

implizite Differenziation 290, 430

implizite Form 484

Impulsantwort 641

inhomogen 565

inhomogene lineare DGL 494

inhomogenes Gleichungssystem 75

injektive Funktion 175

innere Funktion 187

instabiles Differenzialgleichungssystem 539

Instabilität 539

Integral 321

bestimmtes 324

unbestimmtes 327

uneigentliches 348

Integralfunktion 325

Integralsymbol 321

Integrand 321

Integration 327

Interpolation 197

Intervall 31

abgeschlossenes 31

halboffenes 31

offenes 31

unendliches 32

unendliches, halboffenes 32

unendliches, offenes 32

Inverse,

multiplikative 695

inverse Fourier-Transformation 628

inverse Funktion 195

inverse Matrix 153

Inversion 475

invertierbare Matrix 153

irrationale Zahl 29

J

Jacobi-Iteration 79

Jacobi-Matrix 443

K

kartesische Form 453

kartesisches Koordinatensystem 112

Katenoide 238

Kathete 40

Kegel 424

Kegelschnitt 393

Kegelschnittgleichung 397

Kern 159

Kettenlinie 238

Kettenregel 285

allgemeine 429

kgV 692

kleiner 30

kleiner oder gleich 31

Klothoide 409

Koeffizient 62

Binomial- 39

konstanter 505, 531

Koeffizientenvergleich 205

Komplement 24

komplexe Fourier-Reihe 584

komplexe Zahl 452

Argument 454

Betrag 453

Einheitswurzel 463

Exponentialform 455

Gaußsche Zahlenebene 453

Gleichheit 457

imaginäre Achse 453

imaginäre Einheit 452

Imaginärteil 452

kartesische Form 453

konjugiert 456

Ortskurve 469

Polarform 454

Polarkoordinaten 454

Realteil 452

reelle Achse 453

Wurzel 463

komplexer Fourier-Koeffizient 584

komplexwertige Funktion 469

Komponente 103

Komponentenzerlegung 99 f.

Komposition 187

kongruent 693

konjugiert komplexe Zahl 456

Kontrollpunkt 406

Konturlinie 416

konvergente Folge 249
 konvergentes uneigentliches Integral 349
 Konvergenz 373
 absolute 375
 Folge 249
 uneigentliches Integral 349
 Konvergenzradius 376
 Koordinate 103, 112
 Koordinatensystem 112
 Korrespondenzsymbol 614, 628, 648, 674
 Kosinus 41, 220
 Additionstheorem 222
 allgemeiner 224
 amplitudenmodulierter 625
 Doppelwinkelformel 223
 Kosinus Hyperbolicus 238
 Kosinus-Fourier-Transformation 617
 Kosinussatz 43
 Kosinuswerte 43
 Kotangens 42, 221
 Additionstheorem 224
 Kotangens Hyperbolicus 239
 Kreis 393
 Mittelpunkt 393
 Radius 393
 Kreisfrequenz 224, 518
 Kreisgleichung 41
 kreistreue Abbildung 477
 Kreiszyylinder 355
 Kreuzprodukt 94
 Krümmung 401 f.
 Krümmungskreis 402
 Krümmungskreisradius 402
 Kurve,
 Bogenlänge 404
 Bogenlängenparametrisierung 405
 Ellipse 393 f.
 Hyperbel 393, 395
 Kegelschnitt 393
 Kreis 393
 Krümmung 401 f.
 Krümmungskreis 402
 Krümmungskreisradius 402
 Parabel 393, 396
 Parameterdarstellung 389
 Phasen- 529
 Polarkoordinaten 391
 singulärer Punkt 400

Kurve
 Tangente 398
 Tangentenvektor 398
 Umkehrpunkt 400
 Zustands- 529

L
 Landau-Symbol 252
 Länge 85
 Laplace-Transformation 648
 Bildbereich 648
 Korrespondenzsymbol 648
 Zeitbereich 648
 Leibniz-Kriterium 374
 Leitlinie 396
 linear abhängige Vektoren 98
 linear unabhängige Vektoren 98
 lineare Abbildung 159
 Bild 159
 Kern 159
 Rang 159
 lineare Ausgleichsfunktion 440
 lineare Differenzialgleichung 494
 mit konstanten Koeffizienten 505
 lineare Gleichung 45
 lineare Interpolation 197
 lineares Gleichungssystem 62
 lineares zeitinvariantes System 640
 Linearfaktor 209
 Linienelement 487
 linksseitiger Grenzwert 255
 logarithmische Differenziation 288
 logarithmisches Ableiten 288
 logarithmisches Differenzieren 288
 Logarithmusfunktion 234
 logisches Oder 20
 logisches Und 20
 lokales Maximum 433
 lokales Minimum 433
 Lösung,
 allgemeine 482
 Differenzialgleichung 482
 Eindeutigkeit 44
 Existenz 44
 partikuläre 486
 spezielle 486
 Lösungsmenge 44

M

Majorante 375
 Mantelfläche 358
 Rotationskörper 358
 Matrix 131
 ähnliche 165
 Bild 159
 charakteristische Gleichung 162
 Diagonal- 133
 Dreiecks- 134
 dyadisches Produkt 140
 Eigenvektor 160
 Eigenwert 160
 Einheits- 133
 Gleichheit 136
 Hesse- 433
 inverse 153
 invertierbare 153
 Jacobi- 443
 Kern 159
 Null- 133
 orthogonale 155
 Produkt 138 f.
 quadratische 132
 Rang 159
 reguläre 153
 singuläre 153
 Spaltenvektor 132
 symmetrische 135
 transponierte 135
 Vandermondesche 437
 Zeilenvektor 132
 Matrixaddition 136
 Matrixmultiplikation 138 f.
 Matrixprodukt 138 f.
 dyadisches 140
 Maximum,
 globales 304
 lokales 299, 433
 mehrdimensionales Newton-Verfahren 444
 Menge,
 Definitions- 174, 176, 413, 442
 Differenz- 23
 Element 23
 Komplement 24
 leere 23
 Lösungs- 44
 Schnitt- 23
 Teil- 23

Menge
 Vereinigungs- 23
 Ziel- 174, 176, 413, 442
 Methode,
 der kleinsten Fehlerquadrate 436
 Potenz- 167
 Minimum,
 globales 304
 lokales 299, 433
 Minorante 375
 Mittel,
 arithmetisches 330
 quadratisches 330
 Mittelpunkt 393
 Mittelwert 330, 574
 Mittelwertsatz 279, 331
 Möbius-Transformation 476
 Modulo 690
 Moment 365
 monoton fallende Folge 248
 monoton fallende Funktion 192
 monoton wachsende Folge 248
 monoton wachsende Funktion 192
 Monotonie,
 Folge 248
 Funktion 192
 Multiplikation,
 skalare 89, 136

N

Nahtstelle 181
 natürliche Exponentialfunktion 233
 natürliche Logarithmusfunktion 234
 natürliche Zahl 25
 Negation 20
 Neigungswinkel 295
 Newton-Iteration 308
 Newton-Verfahren 308
 Niveaulinie 416
 Normalenform 117
 Normalengleichungen 438, 440
 normierter Vektor 86
 Nullfolge 249
 Nullmatrix 133
 Nullstelle 179
 p -fache 210
 doppelte 210
 mehrfache 210
 Vielfachheit 210

Nullstellensatz 260
Nullvektor 86

O

obere Dreiecksmatrix 134
Oberschwingung 581
Obersumme 322
offenes Intervall 31 f.
Ordnung,
 Differenzgleichung 558
 Differenzialgleichung 483
 Differenzialgleichungssystem 531
 lineare Differenzialgleichung 494
 Rekursionsgleichung 558
orthogonale Matrix 155
orthogonale Vektoren 100
Orthogonalisierungsverfahren 102
Orthogonalsystem 100
Orthogonaltrajektorie 488
Orthonormalsystem 100
Ortskurve 469
Ortsvektor 112

P

Parabel 393, 396
 Brennpunkt 396
 Leitlinie 396
parallele Vektoren 86
Parallelepiped 97
Parameterdarstellung 389
Parametrisierung nach der Bogenlänge 405
Parsevalsche Gleichung 592, 635
Partialbruchzerlegung 216 ff., 347 f.
Partialsomme 373
partielle Ableitung 420, 422, 432
partielle Ableitungsfunktion 422
Partielle Integration 343
partikuläre Lösung 486
Periode 191
periodische Funktion 191
 Frequenz f 192
 Gleichanteil 574
 Mittelwert m 574
 Schwingungsdauer T 192
periodischer Prototyp 637
Periodizität 191
Phase 621
Phasenebene 529

Phasenfrequenzgang 524 f.
Phasenkurve 529
Phasenspektrum 587
Phasenverschiebung 224
Phasenwinkel 224
Pi 42
Pol 258
Polarform 454
Polarkoordinaten 391, 454
Polstelle 258
Polygonzugverfahren von Euler 543
Polynom 204
 charakteristisches 162
 Koeffizientenvergleich 205
 Linearfaktor 209
 trigonometrisches 576
Polynomdivision 207
Potenz 36
Potenzfunktion 202
Potenzgesetz 37
Potenzgleichung 46
Potenzmethode 167
Potenzreihe 376
 Konvergenzradius 376
 Taylor-Restglied 378
Primzahl 698
Problem,
 Anfangswert- 484
 Randwert- 485
Produkt,
 Cauchy- 382
 komplexe Zahlen 459
 Kreuz- 94, 108
 Matrizen 138
 Skalar- 91, 106
 Spat- 97, 109
 Vektor- 94, 108
 Zahlen 35
Produktregel 283
Produktzeichen 35
Projektion 101
Prototyp 637
prozentualer Fehler 311
Punkt,
 Gleichgewichts- 487
 singulärer 400
 Umkehr- 400
Punktsymmetrie 189
punktsymmetrische Funktion 189

Q

quadratische Ergänzung 47
 quadratische Gleichung 47
 quadratische Matrix 132
 Quotientenkriterium 375
 Quotientenregel 284

R

Re 452
 Radius 393
 Randwertproblem 485
 Rang 159
 rationale Zahl 27
 Realteil 452
 Rechte-Hand-Regel 94
 Rechteckimpuls 602
 rechtsseitiger Grenzwert 255
 Rechtssystem 94
 reelle Achse 453
 reelle Funktion 176
 reelle Zahl 29
 reeller Fourier-Koeffizient 577
 Regel,
 Bernoulli-de l'Hospital 292
 Sarrus 146
 reguläre Matrix 153
 Reihe,
 alternierende 374
 Entwicklungspunkt 376
 Fourier- 577
 geometrische 373
 harmonische 372
 Konvergenz 373
 Majorante 375
 Minorante 375
 Partialsumme 373
 Potenz- 376
 Quotientenkriterium 375
 unendlich 372
 Wurzelkriterium 375
 Rekursionsgleichung 558
 rekursive Folge 247
 Relation 173
 relativer Fehler 311
 Resonanz 514
 Restklasse 694
 Richtung 85
 Richtungsableitung 426
 Richtungsfeld 487

Richtungsfeld
 Gleichgewichtspunkt 487
 Singularität 487
 Richtungskosinus 107
 Richtungswinkel 107
 Romberg-Verfahren 362
 Rotation 474
 Rotationskörper,
 Mantelfläche 358
 Volumen 356 f.
 Rotationsparaboloid 423
 Rückwärtsdifferenzenquotient 306
 RWP 485

S

sinc-Funktion 292
 Sattelpunkt 304, 434
 Satz des Pythagoras 40
 Satz von Euler 455
 Satz von Fourier 578
 Satz von Rolle 280
 Satz von Schwarz 432
 Schar 183
 Schaubild 178
 Schnittmenge 23
 Schnittwinkel 296
 Schranke 252
 Schraubenlinie 392
 Schwingung,
 Dämpfungsgrad 524
 dimensionslose Frequenz 524
 Erregeramplitude 521
 Erregerkreisfrequenz 521
 erzwungene 518
 freie 518
 harmonisch angeregte 521
 harmonische 470
 überkritische 523
 unterkritische 523
 Verstärkungsfaktor 524
 Schwingungsdauer 192
 Schwingungsdifferenzialgleichung 518
 Sekante 272
 Sekantenverfahren 310
 senkrechte Asymptote 258
 senkrechter Kreiszylinder 355
 Separation der Variablen 491
 separierbare Differenzialgleichung 490
 Signum 35

singuläre Matrix 153
 singulärer Punkt 400
 Singularität 487
 Sinus 41, 220
 Additionstheorem 222
 Doppelwinkelformel 223
 Sinus Hyperbolicus 237
 Sinus-Fourier-Transformation 617
 Sinussatz 43
 Sinuswerte 43
 skalare Multiplikation 89, 136
 Skalarprodukt 91, 139
 Skalierung 474
 x -Richtung 185
 y -Richtung 185
 Sombbrero 418
 Spaltenvektor 132
 Spat 97
 Spatprodukt 97
 Spektralfunktion 614
 Spektrum,
 Betrags- 587
 Phasen- 587
 spezielle Lösung 486
 Spiegelung an der x -Achse 185
 Spirale 391
 Sprungstelle 258
 stabiles Differenzialgleichungssystem 539
 Stabilität 539
 asymptotische 539
 grenzwertige 540
 Stabilitätskriterium 539
 Stammfunktion 327
 statisches Moment 365
 Stelle,
 Naht- 181
 Null- 179
 Unstetigkeits- 257 f.
 stetige Funktion 255, 419
 Störfunktion 494, 531
 streng monoton fallende Folge 248
 streng monoton fallende Funktion 192
 streng monoton wachsende Folge 248
 streng monoton wachsende Funktion 192
 Strenge Monotonie,
 Folge 248
 Funktion 192
 Substitution 337, 492 f.

Summe,
 komplexe Zahlen 458
 Vektoren 87, 104
 Zahlen 35
 Summenregel 282, 333
 Summenzeichen 35
 Superposition 503
 surjektive Funktion 175
 symmetrische Matrix 135
 System,
 Differenzialgleichungs- 526
 gewöhnliche DGL 526
 lineares Gleichungs- 62

T

Tangens 42, 221
 Additionstheorem 224
 Tangens Hyperbolicus 239
 Tangente 273, 398
 Tangentenvektor 398
 Tangentialebene 425
 Taylor-Polynom 377
 Taylor-Reihe 378
 Taylor-Restglied 378
 Teiler 689
 teilerfremd 691
 Teilmenge 23
 Terrassenpunkt 304
 Tiefpunkt 299
 totales Differenzial 428
 Trajektorie 482, 529
 Transformation,
 z - 674
 Ähnlichkeits- 165
 Fourier- 614
 Hauptachsen- 165
 inverse Fourier- 628
 Laplace- 648
 Möbius- 476
 Translation 184, 474
 transponierte Matrix 135
 Trapez 360
 Trapezregel 361
 Treppenfunktion 675
 trigonometrisches Polynom 576
 triviale Lösung 77, 494

U

überbestimmtes Gleichungssystem 74
 überkritische Schwingung 523
 Übertragungsfunktion 641
 umkehrbare Funktion 195
 Umkehrfunktion 195
 Ableitung 287
 Umkehrpunkt 400
 unabhängige Variable 176
 unbestimmt divergente Folge 251
 unbestimmtes Integral 327
 unecht gebrochenrationale Funktion 214
 uneigentlicher Grenzwert 251
 uneigentliches Integral 348
 divergentes 349
 konvergentes 349
 unendliche Reihe 372
 unendliches Intervall 32
 Unendlichkeit 26
 ungerade Funktion 189
 Unstetigkeitsstelle,
 1. Art 258
 2. Art 258
 hebbare 257
 unterbestimmtes Gleichungssystem 73
 untere Dreiecksmatrix 134
 unterkritische Schwingung 523
 Untersumme 322
 Ursprung 112

V

Vandermondesche Matrix 437
 Variable,
 abhängige 176
 unabhängige 176
 Variation der Konstanten 499
 Vektor 85
 antiparallel 86
 Basis- 103
 Betrag 85
 Einheits- 86
 Gegen- 87
 Gleichheit 86
 Komponente 103
 Koordinate 103
 Länge 85
 linear abhängig 98

Vektor

 linear unabhängig 98
 normierter 86
 Null- 86
 orthogonal 100
 Orts- 112
 parallel 86
 Parallelepipiped 97
 Projektion 101
 Rechte-Hand-Regel 94
 Rechtssystem 94
 Richtung 85
 Skalarprodukt 91
 Spalten- 132
 Verbindungs- 112
 Zeilen- 132
 Vektoraddition 87
 Vektoriteration 167
 Vektorprodukt 94
 vektorwertige Funktion 442
 Definitionsmenge 442
 verallgemeinerte Ableitung 606
 Verbindungsvektor 112
 Vereinigungsmenge 23
 Verfahren,
 Bisektions- 266
 Euler- 543
 Gauß-Seidel- 80
 Gradienten- 446
 Jacobi- 79
 mehrdimensionales Newton- 444
 Newton- 308
 Orthogonalisierungs- 102
 Potenzmethode 167
 Romberg- 362
 Sekanten- 310
 verkettete Funktion 187
 Verkettung 187
 Verschiebung 184
 Verstärkungsfaktor 524
 Vielfachheit einer Nullstelle 210
 Volumen,
 Rotationskörper 356 f.
 Spat 97
 Vorwärtsdifferenz 679
 Vorwärtsdifferenzenquotient 306
 Vorzeichen 35
 Vorzeichenwechsel 258

W

waagrechte Asymptote 262
Wendepunkt 303
Wertemenge 175
Winkel,
 Neigungs- 295
 Schnitt- 296
winkeltreue Abbildung 477
Wronski-Kriterium 502
Wurfparabel 407
Wurzel 38, 463
Wurzelfunktion 203
Wurzelkriterium 375

Z

z -Transformation 674
 Bildbereich 674
 Korrespondenzsymbol 674
 Zeitbereich 674
Zahl,
 e 250
 i 452
 π 42
 Abstand 34
 Betrag 33, 453
 Binomialkoeffizient 39
 Dezimal- 27
 Einbettung 29
 Eulersche 250
 Fakultät 38
 ganze 26
 ggT 691
 Gleichheit 30
 größer 30
 größer oder gleich 31
 irrationale 29

Zahl

kgV 692
kleiner 30
kleiner oder gleich 31
komplexe 452
kongruent 693
Modulo 690
natürliche 25
Ordnung 30
Pascalsches Dreieck 39
Potenz 36
Primzahl 698
Produkt 35
rationale 27
reelle 29
Restklasse 694
Signum 35
Summe 35
Teiler 689
teilerfremd 691
Vorzeichen 35
Wurzel 38
Zahlenfolge 246
Zeiger 472
Zeigerdarstellung 472
Zeilenvektor 132
Zeitbereich 614, 648, 674
zentraler Differenzenquotient 306
Zielfunktion 312
Zielmenge 174, 176, 413, 442
Zustandsebene 529
Zustandsgröße 528
Zustandskurve 529
Zustandsvariable 528
Zwischenwertsatz 260
Zykloide 408
Zylinder 355