

Leseprobe

Michael Knorrenschild

Numerische Mathematik

Eine beispielorientierte Einführung

ISBN (Buch): 978-3-446-45161-2

ISBN (E-Book): 978-3-446-45261-9

Weitere Informationen oder Bestellungen unter

<http://www.hanser-fachbuch.de/978-3-446-45161-2>

sowie im Buchhandel.

Vorwort

Numerische Mathematik gehört zu den Teilgebieten der Mathematik, die von Ingenieuren im beruflichen Alltag verwendet werden. Durch verstärkte Verwendung von Computer-Simulationen in allen Bereichen erhöht sich die Bedeutung dieses Themas, in dem Fragestellungen der Mathematik und der Informatik zusammenkommen, zunehmend.

Der vorliegende Band deckt die wichtigsten Themen der numerischen Mathematik für Studierende der Ingenieurwissenschaften ab und entspricht in etwa dem Umfang einer einsemestrigen Lehrveranstaltung. Das Anliegen ist dabei, die Ideen der wichtigsten numerischen Verfahren zu präsentieren und anhand einer Vielzahl von Beispielen deren charakteristische Eigenschaften zu illustrieren. Auf Beweise und längere Herleitungen wird dabei weitgehend verzichtet. Vorausgesetzt werden Vorkenntnisse zur elementaren Differenzial- und Integralrechnung sowie zur linearen Algebra im Umfang etwa einer Anfängervorlesung zu diesen Themen.

Die Darstellungsweise profitiert von Erfahrungen, die ich in Lehrveranstaltungen zur Numerischen Mathematik für Studierende der Ingenieurwissenschaften an der Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule Aachen, der Simon Fraser University in Burnaby (Kanada), der Eidgenössischen Technischen Hochschule Zürich und der Hochschule Bochum gesammelt habe. Die Anordnung der Themen folgt der bewährten Reihenfolge von Grundlagen der Gleitpunktarithmetik über die numerische Lösung von eindimensionalen Gleichungen, von linearen und nichtlinearen Gleichungssystemen, die Behandlung von Interpolations- und Ausgleichsproblemen bis hin zu numerischer Differenziation und Integration. Den Abschluss bildet ein Einblick in die numerische Lösung von Anfangswertaufgaben gewöhnlicher Differenzialgleichungen.

An dieser Stelle möchte ich mich bei Frau Christine Fritsch vom Fachbuchverlag Leipzig für die langjährige Zusammenarbeit sowie beim Herausgeber Prof. Dr. Bernd Engelmann für fachliche Ratschläge bedanken. Herrn Dr. Thomas Schenk gebührt Dank für die kritische Durchsicht weiterer Teile des Manuskripts. Für die Bearbeitung der Neuauflage bedanke ich mich bei Frau Mirja Werner und Frau Katrin Wulst für die angenehme Zusammenarbeit.

Für die sechste Auflage wurde ein neuer Abschnitt zur QR-Zerlegung eingefügt und es wurden wenige noch verbliebene Fehler behoben, dabei bin ich vielen aufmerksamen Leserinnen und Lesern dankbar. Hinweise und Anregungen aus dem Leserkreis sind auch weiterhin jederzeit willkommen.

Bochum, im Februar 2017

Michael Knorrenschild

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Rechnerarithmetik und Gleitpunktzahlen | 9 |
| 1.1 | Grundbegriffe und Gleitpunktarithmetik | 9 |
| 1.2 | Auslöschung | 16 |
| 1.3 | Fehlerrechnung | 17 |
| 1.3.1 | Fehlerfortpflanzung in arithmetischen Operationen . . | 17 |
| 1.3.2 | Fehlerfortpflanzung bei Funktionsauswertungen | 18 |
| 2 | Numerische Lösung von Nullstellenproblemen | 25 |
| 2.1 | Problemstellung | 25 |
| 2.2 | Das Bisektionsverfahren | 25 |
| 2.3 | Die Fixpunktiteration | 27 |
| 2.4 | Das Newton-Verfahren | 32 |
| 2.5 | Konvergenzgeschwindigkeit | 36 |
| 3 | Numerische Lösung linearer Gleichungssysteme | 39 |
| 3.1 | Problemstellung | 39 |
| 3.2 | Der Gauß-Algorithmus | 40 |
| 3.3 | Fehlerfortpflanzung beim Gauß-Algorithmus und Pivotisierung | 45 |
| 3.4 | Dreieckszerlegungen von Matrizen | 47 |
| 3.4.1 | Die LR-Zerlegung | 47 |
| 3.4.2 | Die Cholesky-Zerlegung | 49 |
| 3.4.3 | Die QR-Zerlegung | 52 |
| 3.5 | Fehlerrechnung bei linearen Gleichungssystemen | 59 |
| 3.6 | Iterative Verfahren | 64 |
| 4 | Numerische Lösung nichtlinearer Gleichungssysteme | 72 |
| 4.1 | Problemstellung | 72 |
| 4.2 | Das Newton-Verfahren für Systeme | 73 |

| | | |
|--------------|--|----------------|
| 5 | Interpolation | 78 |
| 5.1 | Problemstellung | 78 |
| 5.2 | Polynominterpolation | 79 |
| 5.2.1 | Das Neville-Aitken-Schema | 84 |
| 5.2.2 | Der Fehler bei der Polynominterpolation | 85 |
| 5.3 | Splineinterpolation | 89 |
| 5.3.1 | Problemstellung | 89 |
| 5.3.2 | Interpolation mit kubischen Splines | 91 |
| 6 | Ausgleichsrechnung | 98 |
| 6.1 | Problemstellung | 98 |
| 6.2 | Lineare Ausgleichsprobleme | 99 |
| 6.3 | Nichtlineare Ausgleichsprobleme | 106 |
| 6.4 | Das Gauß-Newton-Verfahren | 108 |
| 7 | Numerische Differenziation und Integration | 112 |
| 7.1 | Numerische Differenziation | 112 |
| 7.1.1 | Problemstellung | 112 |
| 7.1.2 | Differenzenformeln für höhere Ableitungen | 117 |
| 7.1.3 | Differenzenformeln für partielle Ableitungen | 118 |
| 7.1.4 | Extrapolation | 119 |
| 7.2 | Numerische Integration | 126 |
| 7.2.1 | Problemstellung | 126 |
| 7.2.2 | Interpolatorische Quadraturformeln | 130 |
| 7.2.3 | Der Quadraturfehler | 130 |
| 7.2.4 | Transformation auf das Intervall $[a, b]$ | 132 |
| 7.2.5 | Der Fehler der summierten Quadraturformeln | 134 |
| 7.2.6 | Newton-Cotes-Formeln | 136 |
| 7.2.7 | Gauß-Formeln | 136 |
| 7.2.8 | Extrapolationsquadratur | 139 |
| 7.2.9 | Praktische Aspekte | 143 |

| | | |
|----------|---|------------|
| 8 | Anfangswertprobleme gewöhnlicher Differenzialgleichungen | 145 |
| 8.1 | Problemstellung | 145 |
| 8.2 | Das Euler-Verfahren | 147 |
| 8.3 | Praktische Aspekte | 153 |
| 8.4 | Weitere Einschnittverfahren | 154 |
| 8.5 | Weitere Verfahren | 160 |
| | Lösungen | 162 |
| | Literaturverzeichnis | 181 |
| | Sachwortverzeichnis | 182 |

Zum Umgang mit diesem Buch:

Ziel des Buches ist es, dem Leser eine selbstständige Aufarbeitung des Stoffes, etwa anlässlich einer Prüfungsvorbereitung, zu ermöglichen. In die Darstellung eingestreut sind Aufgaben, in denen die in Beispielen vorgestellten Methoden einmal selbst angewandt werden sollen. In den ersten Kapiteln wurden darüber hinaus Thesen unter der Überschrift „wahr oder falsch?“ formuliert, die der Leser kritisch auf ihren Wahrheitsgehalt prüfen soll. Auf diese Weise kann das eigene Verständnis überprüft werden. Lösungen zu allen Aufgaben und die Auswertungen der Thesen finden sich am Ende des Bandes.

Aufgaben

- 1.4 Bestimmen Sie alle dualen 3-stelligen Gleitpunktzahlen mit einstelligem Exponenten sowie ihren dezimalen Wert. Hinweis: Sie sollten 9 finden.
- 1.5 Wie viele verschiedene Maschinenzahlen gibt es auf einem Rechner, der 20-stellige Gleitpunktzahlen mit 4-stelligen Exponenten sowie dazugehörige Vorzeichen im Dualsystem verwendet? Wie lautet die kleinste positive und die größte Maschinenzahl?

Auch sind die Maschinenzahlen ungleichmäßig verteilt. Bild 1.1 zeigt alle binären normalisierten Gleitpunktzahlen mit 4-stelliger Mantisse und 2-stelligem Exponenten.

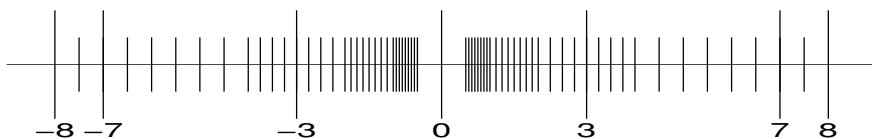


Bild 1.1 Alle binären Maschinenzahlen mit $n = 4$ und $0 \leq E \leq 3$

Unter den endlich vielen Maschinenzahlen gibt es zwangsläufig eine größte und eine kleinste:

Die größte Maschinenzahl ist $x_{max} = (1 - B^{-n}) B^M$,
die kleinste positive ist $x_{min} = B^{m-1}$.

x_{min} basiert auf der normalisierten Gleitpunktdarstellung. Sieht man von der Normalisierung $z_1 \neq 0$ in (1.1) ab, führt dies auf die *subnormalen Zahlen*, die bis hinunter zu B^{m-n} reichen (IEEE Standard 754). Führt eine Rechnung in den Zahlenbereich der subnormalen Zahlen, so bezeichnet man dies als *graduellen Unterlauf* (gradual underflow). Ein (echter) *Unterlauf* (underflow) tritt erst unterhalb der subnormalen Zahlen auf. In diesem Fall wird meist mit Null weitergerechnet.

Taucht im Verlauf einer Rechnung eine Zahl auf, die betragsmäßig größer als x_{max} ist, so bezeichnet man dies als *Überlauf* (overflow). Mit IEEE 754 konforme Systeme setzen diese Zahl dann auf eine spezielle Bitsequenz *inf* und geben diese am Ende aus.¹

¹Achtung: IEEE 754 regelt nicht die Rechnung mit integer-Größen. Ein overflow in einer integer-Variablen kann zu falschen Ergebnissen ohne jede Fehlermeldung führen. Hier ist also die besondere Aufmerksamkeit des Benutzers gefordert.

Jede reelle Zahl, mit der im Rechner gerechnet werden soll und die selbst keine Maschinenzahl ist, muss also durch eine Maschinenzahl ersetzt werden. Idealerweise wählt man diese Maschinenzahl so, dass sie möglichst nahe an der reellen Zahl liegt (Rundung).

Definition

Hat man eine Näherung \tilde{x} zu einem exakten Wert x , so bezeichnet $|\tilde{x} - x|$ den **absoluten Fehler** dieser Näherung.

Beispiel 1.1

Gesucht ist eine Näherung \tilde{x} zu $x = \sqrt{2} = 1.414213562\dots$ mit einem absoluten Fehler von höchstens 0.001.

Lösung: $\tilde{x}_1 = 1.414$ erfüllt das Verlangte, denn $|\tilde{x} - x| = 0.000213562\dots \leq 0.001$. Andere Möglichkeiten sind $\tilde{x}_2 = 1.4139$. \tilde{x}_1 stimmt auf 4 Ziffern mit dem exakten Wert überein, \tilde{x}_2 nur auf 3. Eine größere Anzahl an übereinstimmenden Ziffern bedeutet aber keinesfalls immer einen kleineren absoluten Fehler, wie das Beispiel $x = \sqrt{3} = 1.732050808\dots$ und $\tilde{x}_1 = 2.0$, $\tilde{x}_2 = 1.2$ zeigt: \tilde{x}_1 hat keine gültige Ziffer, \tilde{x}_2 hat eine gültige Ziffer, trotzdem besitzt \tilde{x}_1 den kleineren absoluten Fehler. ■

Beim Runden einer Zahl x wird eine Näherung $\text{rd}(x)$ unter den Maschinenzahlen gesucht, die einen minimalen absoluten Fehler $|x - \text{rd}(x)|$ aufweist. Dabei entsteht ein (unvermeidbarer) Fehler, der sog. *Rundungsfehler*.

Eine n -stellige dezimale Gleitpunktzahl $\tilde{x} = \pm(0.z_1z_2\dots z_n)_B \cdot 10^E = \text{rd}(x)$, die durch Rundung eines exakten Wertes x entstand, hat also einen absoluten Fehler von höchstens

$$|x - \text{rd}(x)| \leq 0.\underbrace{00\dots 00}_n 5 \cdot 10^E = 0.5 \cdot 10^{-n+E}.$$

Rechnet man mit diesen Maschinenzahlen weiter, so werden die entstandenen Rundungsfehler weiter durch die Rechnung getragen. Unter *n-stelliger Gleitpunktarithmetik* versteht man, dass jede einzelne Operation (wie z. B. +, -, *, ...) auf $n+1$ Stellen genau gerechnet wird und das Ergebnis dann auf n Stellen gerundet wird. Erst dann wird die nächste Operation ausgeführt. Jedes Zwischenergebnis wird also auf n Stellen gerundet, nicht erst das Endergebnis einer Kette von Rechenoperationen. Von nun an werden wir uns, wenn nichts anderes gesagt ist, auf dezimale Gleitpunktarithmetik beziehen.

Aufgabe

1.6 Bekanntlich ist $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$. Versuchen Sie damit auf Ihrem Rechner näherungsweise e zu berechnen, indem Sie immer größere Werte für n einsetzen. Erklären Sie Ihre Beobachtung.

Beispiel 1.2

Es soll $2590 + 4 + 4$ in 3-stelliger Gleitpunktarithmetik (im Dezimalsystem) gerechnet werden und zwar zum einen mit Rechnung von links nach rechts und zum anderen von rechts nach links.

Lösung: Alle 3 Summanden sind exakt darstellbar. Als Ergebnis erhält man, bei Rechnung von links nach rechts:

$$2590 + 4 = 2594 \xrightarrow{\text{runden}} 2590, \quad 2590 + 4 = 2594 \xrightarrow{\text{runden}} 2590.$$

Die beiden kleinen Summanden gehen damit gar nicht sichtbar in das Ergebnis ein. Rechnet man jedoch in anderer Reihenfolge

$$4 + 4 = 8 \xrightarrow{\text{runden}} 8, \quad 8 + 2590 = 2598 \xrightarrow{\text{runden}} 2600$$

so erhält man einen genaueren Wert, sogar den in 3-stelliger Gleitpunktarithmetik besten Wert (2598 wird bestmöglich durch die Maschinenzahl 2600 dargestellt). ■

Es kommt also bei n -stelliger Gleitpunktarithmetik auf die Reihenfolge der Operationen an, anders als beim exakten Rechnen. Man sieht, dass in der zweiten Rechnung die kleinen Summanden sich erst zu einem größeren Summanden finden, der sich dann auch in der Gesamtsumme auswirkt. Beginnt man die Rechnung mit dem größten Summanden, so werden die kleinen nacheinander vom größten verschluckt und spielen gar keine Rolle mehr. Als Faustregel kann man daher festhalten:

Beim Addieren sollte man die Summanden in der Reihenfolge aufsteigender Beträge addieren.

Dadurch erreicht man – bei gleicher Rechenzeit! – ein wesentlich genaueres Ergebnis. Ein eindrucksvolles Beispiel ist das folgende.

Beispiel 6.2

Stellen Sie die Normalgleichungen zu Beispiel 6.1 direkt mithilfe von (6.2) als lineares Gleichungssystem auf.

Lösung: Wir haben $f_1(x) = x$, $f_2(x) = 1$ und $n = 4$ verschiedene Wertepaare. Die Matrix \mathbf{A} ist also eine 4×2 -Matrix, nämlich:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} f_1(x_1) & f_2(x_1) \\ f_1(x_2) & f_2(x_2) \\ f_1(x_3) & f_2(x_3) \\ f_1(x_4) & f_2(x_4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(1) & f_2(1) \\ f_1(2) & f_2(2) \\ f_1(3) & f_2(3) \\ f_1(4) & f_2(4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathbf{A}^T \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & 10 \\ 10 & 4 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}^T \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 6.8 \\ 10 \\ 10.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 91.6 \\ 33.3 \end{pmatrix}$$

Damit stellt $\mathbf{A}^T \mathbf{A} \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{A}^T \mathbf{y}$ das gleiche lineare Gleichungssystem dar, das wir schon in Beispiel 6.1 erhalten hatten. ■

Aufgabe

6.1 Bestimmen Sie die Ausgleichsgeraden zu den folgenden Daten:

| | | | | | |
|-------|----|-----|---|-----|----|
| x_i | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| y_i | 1 | 3.5 | 6 | 8.5 | 10 |

| | | | | | |
|-------|----|-----|------|----|----|
| x_i | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| y_i | 1 | 0.5 | -0.5 | -2 | -4 |

| | | | | | |
|-------|----|---|---|-----|-----|
| x_i | -2 | 0 | 1 | 3 | 4 |
| y_i | 5 | 6 | 8 | 8.5 | 9.5 |

| | | | | | | |
|-------|----|---|---|---|----|----|
| x_i | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| y_i | 2 | 6 | 7 | 8 | 10 | 12 |

Beispiel 6.3

Gegeben sind die Daten

| | | | | | |
|-------|---|----|----|----|-----|
| x_i | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| y_i | 6 | 12 | 30 | 80 | 140 |

Bestimmen Sie eine Funktion der Form $f(x) = a e^x + b$, die diese Daten bestmöglich im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate approximiert.

Lösung: Wir haben hier die Ansatzfunktionen $f_1(x) = e^x$ und $f_2(x) = 1$ zu verwenden. Das Fehlergleichungssystem hat dann die folgende Form

$$\mathbf{A} \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{y} \iff \begin{pmatrix} 1.0 & 1.0 \\ 2.718281828 & 1.0 \\ 7.389056099 & 1.0 \\ 20.08553692 & 1.0 \\ 54.59815003 & 1.0 \end{pmatrix} \boldsymbol{\lambda} = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 30 \\ 80 \\ 140 \end{pmatrix}$$

Das zugehörige Normalgleichungssystem lautet dann

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{A}^T \mathbf{y} \iff \begin{pmatrix} 3447.373987 & 85.79102488 \\ 85.79102488 & 5.0 \end{pmatrix} \boldsymbol{\lambda} = \begin{pmatrix} 9510.875023 \\ 268.0 \end{pmatrix}$$

Dieses hat die Lösung $\boldsymbol{\lambda} = \begin{pmatrix} 2.486883919 \\ 10.92953597 \end{pmatrix}$, sodass die gesuchte Ausgleichsfunktion

$$f(x) = 2.486883919 e^x + 10.92953597$$

lautet. Bild 6.2 zeigt die Daten zusammen mit dieser Ausgleichsfunktion.

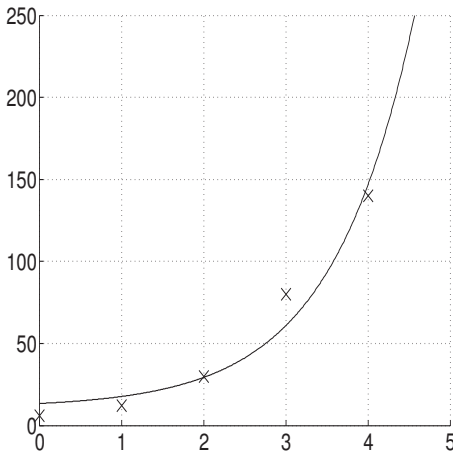


Bild 6.2 Lösung zu Beispiel 6.3

■

Aufgabe

6.2 Bestimmen Sie die Ausgleichsfunktionen zu den folgenden Daten entsprechend dem angegebenen Ansatz:

| | | | | | | |
|-------|----|---|---|----|----|----------------------------------|
| x_i | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | Ansatz: $f_1(x) = a + bx + cx^2$ |
| y_i | 3 | 2 | 9 | 21 | 49 | |

| | | | | | | |
|-------|----|---|----|----|----|-------------------------------------|
| x_i | -1 | 0 | 3 | 8 | 15 | Ansatz: $f_2(x) = a\sqrt{x+1} + bx$ |
| y_i | -1 | 3 | 10 | 27 | 42 | |

Beispiel 6.4

Gegeben sind die Daten

| | | | | | |
|-------|---|---|-----|-----|------|
| x_i | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| y_i | 3 | 1 | 0.5 | 0.2 | 0.05 |

Bestimmen Sie mit den bis hierhin behandelten Techniken eine Funktion der Form $f(x) = a e^{b \cdot x}$, die diese Daten möglichst gut approximiert.

Lösung: In dem Ansatz können wir nicht wie bisher Basisfunktionen identifizieren. Es handelt sich um einen nichtlinearen Ansatz. Wir können uns aber helfen, indem wir f logarithmieren, $\ln f(x) = \ln a + bx$, und so einen linearen Ansatz in Form einer Ausgleichsgerade erhalten. Diese Ausgleichsgerade müssen wir aber nicht an die gegebenen Daten, sondern an die logarithmierten anpassen. Wir müssen also anstelle von $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_5)^T$ in den Normalgleichungen $\mathbf{y}_{\ln} = (\ln y_1, \dots, \ln y_5)^T$ verwenden. Wir erhalten die Ausgleichsgerade

$$y = -0.9798127040 x + 1.119684393.$$

Daraus lesen wir die gesuchten Parameter $b = -0.979812704$ und $\ln a = 1.11968439$ ab. Die in der Aufgabenstellung gesuchte Funktion lautet also

$$f(x) = e^{1.11968439} e^{-0.9798127040 x} = 3.063887066 e^{-0.9798127040 x}.$$

Die Logarithmen der Daten, die einer Modellgleichung der Form $f(x) = a e^{b \cdot x}$ gehorchen, liegen also etwa auf einer Geraden. In der Praxis werden solche Daten häufig gleich auf einfach logarithmischem Papier aufgetragen, wo es dann augenfällig wird, dass sie auf einer Geraden liegen.

Man beachte aber, dass dieses Vorgehen kein echter nichtlinearer Ausgleich ist. Wir werden dieses Beispiel im nächsten Abschnitt noch einmal aufgreifen, siehe Beispiel 6.5. ■

Sachwortverzeichnis

- Ableitung, partielle 118
- Abschätzung
 - , a-posteriori- 31, 68
 - , a-priori- 31, 68
- Abschneidefehler 113
- Anfangswertproblem 145
- Ansatzfunktion 99
- Ausgleichsfunktion 99
- Ausgleichsgerade 99
- Ausgleichsproblem 98
 - , allgemeines 106
 - , lineares 101
- Auslöschung 16, 114

- Bisektion 25

- Cholesky-Zerlegung 49

- Determinante 44
- Dezimalzahl 9
- diagonaldominant 69
- Differenzen, dividierte 81
- Differenzenformel 112
- Differenzialgleichung, gewöhnl. 145
- direkte Verfahren 39
- Diskretisierung 147
- Diskretisierungsfehler 113
- Dreieckszerlegung 47
- Dualzahl 9

- Einschrittverfahren 154
- Einzelschrittverfahren 67
- Euler-Verfahren 147
 - , modifiziertes 155

- Extrapolation 119
- Extrapolation bei Anfangswertproblemen 160
- Extrapolation bei Quadratur 139

- Fehler
 - , absoluter 12
 - , bei Rundung 12
 - , globaler 151
 - , lokaler 151
 - , relativer 15
- Fehlerfortpflanzung 19
- Fehlerfunktional 98
- Fehlerordnung 113, 131
- Fehlerquadrate, kleinste 99
- Fehlerrechnung 17
- Fixpunkt 27
 - , abstoßender 30
 - , anziehender 30
- Fixpunktiteration 27, 28
- Fixpunktsatz, Banachscher 31
- Flop (floating point operation) 14

- Gauß-Algorithmus 40, 42
- Gauß-Formeln 136
- Gauß-Newton-Verfahren 108
- Gauß-Seidel-Verfahren 67
- Gesamtschrittverfahren 65
- Gitterpunkte 147
- Gleitpunkt
 - , -arithmetik 12
 - , -operation 14
 - , -zahl 9

- Householder-Matrix 53

- IEEE-Format 10, 11
 Implizite Verfahren 160
 Interpolationsfehler 85
 Interpolationspolynom 79
 –, Lagrangesches 80
 –, Newtonsches 82
 Interpolationsproblem 78
 Interpolierende 78

 Jacobi-Matrix 73
 Jacobi-Verfahren 65

 Konditionszahl 21, 61
 Konsistenzordnung 151
 Konvergenzgeschwindigkeit 36
 Konvergenzordnung 36, 151

 Laplace-Operator 118
 Linearisierung 32, 148
 Lipschitzbedingung 152
 LR-Zerlegung 48

 Mantisse 9
 Maschinengenauigkeit 15
 Maschinenzahl 10
 Matrix, orthogonale 52
 Mehrschrittverfahren 161
 Mittelpunktregel 128, 133, 155
 –, summierte 128, 135
 Momente 92

 Neville-Aitken-Schema 84
 Newton-Cotes-Formeln 136
 Newton-Verfahren 32, 73
 –, vereinfachtes 35
 Newton-Verfahren für Systeme 74
 –, vereinfachtes 76
 Norm 59, 60
 Normalgleichungen 102

 $O(h^k)$ 113
 orthogonal 52

 positiv definit 49
 Punktoperation 14

 QR-Zerlegung 52, 102
 Quadratmittelproblem 108
 Quadratur, adaptive 143
 Quadraturfehler 130
 Quadraturformel, interpolat. 130
 Quadraturverfahren 126

 Rückwärtseinsetzen 40
 Rechteckregel 128
 –, summierte 128, 135
 rechts-obere Dreiecksmatrix 40
 Regressionsgerade 99
 regula falsi 36
 Restglied, Taylorsches 112
 Richtungsfeld 146
 Romberg-Extrapolation 140
 Rundungsfehler 12
 Runge-Kutta-Verfahren
 –, allgemeines 158
 –, klassisches 157

 Satz von Taylor 112
 Schrittweite 147
 Schrittweitensteuerung 153
 Sekantenverfahren 35
 Simpson-Regel 130, 133
 –, summierte 135
 Spaltenpivotisierung 45
 Spaltensummenkriterium 69
 Spektralradius 60
 Spline
 –, interpolierender 91
 –, kubischer 90, 91
 –, natürlicher 91
 –, periodischer 91
 –, vollständiger 91
 Splinefunktion 90
 Splineinterpolation 89
 Stützstellen 78

Trapezregel 128, 133
–, summierte 128, 135

Verfahren von Heun 156

Zeilensummenkriterium 69

Zwischenwertsatz 25