

Peter M. Higgins

Das kleine Buch der Zahlen

Vom Abzählen bis zur Kryptographie

Aus dem Englischen von Thomas Filk

Anaconda

Peter M. Higgins
Department of Mathematical Sciences
University of Essex
Colchester
Großbritannien

Titel der englischen Originalausgabe:
Number Story. From Counting to Cryptography (2008)

Das kleine Buch der Zahlen
Vom Abzählen bis zur Kryptographie

von Peter M. Higgins

Copyright © Springer Spektrum | Springer Fachmedien Wiesbaden 2013

Springer ist Teil von Springer Nature

Die eingetragene Gesellschaft ist Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH

Alle Rechte vorbehalten

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet unter <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Lizenzausgabe mit freundlicher Genehmigung

© dieser Ausgabe 2017 Anaconda Verlag GmbH, Köln

Alle Rechte vorbehalten.

Umschlaggestaltung: Harald Braun, Berlin

Printed in Czech Republic 2017

ISBN 978-3-7306-0444-1

www.anacondaverlag.de

info@anacondaverlag.de

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Vorwort

Zahlen sind etwas Einzigartiges, und sie lassen sich mit nichts vergleichen. In diesem Buch möchte ich einige ihrer Geheimnisse aufdecken. Zahlen sind uns allen vertraut; sie scheinen uns Halt zu geben, wenn wir den Eindruck haben, wir müssten Ordnung in ein Chaos bringen. In unserer Vorstellung verkörpern sie eine messbare Rationalität, und sie sind der Schlüssel, mit dem wir das zum Ausdruck bringen. Doch gibt es sie wirklich? Es gibt sie sicherlich nicht in dem Sinn, wie es Katzen oder Fußballmannschaften gibt, und noch nicht einmal so, wie es Farben oder Gefühle gibt, vielleicht gibt es sie eher, wie es Worte gibt. Worte haben eine Bedeutung, und die Bedeutung einer Zahl – was eine Zahl „ist“ – bezieht sich auf das Gemeinsame, mit dem wir allgemein Dinge, die ansonsten nur wenig gemein haben, messen und vergleichen: den Wert von Öl, von einem Taxi oder von der Dienstleistung seines Fahrers.

Zahlen sind das Einzige auf dieser Welt, das nichts kostet und gleichzeitig in unerschöpflicher Menge vorhanden ist. Daher ist es nur natürlich, wenn wir sie verstehen wollen, so gut es eben geht.

Die Eröffnungskapitel dieses Buches machen den Leser mit Eigenschaften der Zahlen vertraut, die meist schon bekannt sind. Wir werden bestimmte Zahlen als Objekte betrachten, aber auch die Menge aller Zahlen insgesamt. Während der ersten vier Kapitel beschränken wir uns im Allgemeinen auf die gewöhnlichen natürlichen Zahlen, die wir zum Zählen verwenden. Das fünfte Kapitel beleuchtet einige praktische Aspekte im Zusammenhang mit Zahlen. Wir werden sehen, wie uns die bekannten Rechenvorschriften aus der vertrauten Umgebung der natürlichen Zahlen herausführen, in der es nur fest vorgegebene diskrete Einheiten gibt.

Kapitel 6 erläutert, wie wir mit den gewöhnlichen Zahlenoperationen zu neuen Zahlenarten gelangen, einschließlich der irrationalen Zahlen. Anschließend kommen wir zu unendlichen Zahlenmengen, und wir werden sehen, wie sich diese miteinander vergleichen lassen und wie die Menge der sogenannten reellen Zahlen sich zu der Zahlengeraden zusammenfügen. Später werden wir diesen Punkt nochmals mit einer mathematischen Lupe untersuchen.

Die historische Entwicklung des Zahlenbegriffs ist ebenso wie jede andere historische Entwicklung eine komplexe Geschichte. Sie scheint jedoch an einen Punkt gelangt zu sein, wo sich die Mathematiker über ihre Rolle einig sind, und sie ist mit Sicherheit eine jener zentralen Säulen, auf denen unser Verständnis der Welt beruht. Wir werden für den Leser immer wieder historische Nebenbemerkungen einfließen lassen, die mit der Entwicklung des Themas zusammenhängen, und wir werden auch gelegentlich

auf einzelne Pioniere der Zahlentheorie zu sprechen kommen. Das wird besonders in den Kap. 9 und 10 der Fall sein, in denen wir die Entwicklung in Europa während der wichtigen Zeit vom 16. bis zum Ende des 19. Jahrhunderts zusammenfassen.

Es wird auch um unmittelbare Anwendungen der Zahlen gehen, besonders in Kap. 8, das dem Thema Zufall gewidmet ist, und ebenfalls in Kap. 12, in dem es um die geheime Welt der Codes und Geheimschriften geht, die sich als die wichtigste moderne Anwendung der Ideen der reinen Zahlentheorie erwiesen haben.

Jeder interessierte Leser sollte das Buch einfach durchlesen können, doch es kann sich auch lohnen, an manchen Stellen etwas tiefer einzutauchen und dafür andere Passagen eher zu überfliegen. Es gibt allerdings ein letztes Kapitel – für Kenner und mathematische Feinschmecker –, in dem einige der wichtigen Behauptungen und Beispiele aus dem Text in mathematischer Sprache ausgearbeitet sind, sodass diejenigen davon profitieren, die eine vollständige Erklärung wünschen. Ein Stern (*) im Text deutet an, dass über dieses Thema in dem abschließenden Kapitel mehr gesagt wird. Dieses letzte Kapitel ist das einzige, in dem von der mathematischen Schreib- und Sprechweise etwas großzügiger Gebrauch gemacht wird. Der Schwierigkeitsgrad ist unterschiedlich und hängt vom betrachteten Material ab, doch jeder Leser sollte in der Lage sein, von den Bemerkungen am Ende dieses Buches etwas mitnehmen zu können. Abschließend folgt noch ein kurzer Abschnitt, der auf andere gute Bücher und Internetseiten hinweist, an denen Sie Ihre Freude haben könnten.

Ich hoffe, dieses Büchlein ermöglicht es dem Leser, einen kleinen Einblick in ein sehr bedeutendes Gebiet zu bekommen: die Geschichte der Zahlen.

Inhaltsverzeichnis

1	Die ersten Zahlen	1
	Wie sollen wir von Zahlen denken?	5
	Der Aufbau der Zahlen	9
2	Die Entdeckung der Zahlen	19
	Zählen und was daraus werden kann	26
3	Zahlentricks	35
	Welches Domino?	38
	Die Neunerprobe	39
	Teilbarkeitstests	44
	1 und 10, 2 und 5	45
	4, 8 und 16	46
	3, 6, 9, 12 und 15	48
	7, 11 und 13	52
	Magische Muster	55
	Weitere magische Zahlenmuster	61
4	Trickreiche Zahlen	65
	Catalan'sche Zahlen	69
	Fibonacci-Zahlen	71
	Stirling- und Bell-Zahlen	76
	Hagelkörner-Zahlen	80
	Die Primzahlen	81
	Glückliche Zahlen	89

5	Nützliche Zahlen	91
	Prozente, Verhältnisse und Wahrscheinlichkeiten . . .	91
	Die wissenschaftliche Schreibweise	94
	Die Bedeutung von Mittelwerten	96
	Statistischer Mittelwert	96
	Mathematische Mittelwerte	101
6	Auf der Suche nach neuen Zahlen	107
	Plus und Minus	110
	Brüche und rationale Zahlen	112
7	Ein Blick in die Unendlichkeit	125
	Hilberts Hotel	128
	Cantors Vergleiche	130
	Die Struktur der Zahlengeraden	137
	Unendlich plus eins	141
8	Anwendungen: Der Zufall	147
	Einige Beispiele	151
	Einige Sammlerstücke von Wahrscheinlichkeits- problemen	159
	Unschlagbare Mannschaften	159
	Das Auszählungsproblem	161
	Das Geburtstagsproblem	163
	Russisches Roulette	163
	Weshalb kommen Busse immer im Konvoi?	165
	Das St. Petersburger Paradox	168
	Buffons Nadelproblem	171
	Bertrands Paradox	173
9	Die komplexe Geschichte des Imaginären	177
	Die Algebra und ihre Geschichte	180

	Die Lösung der kubischen Gleichung	186
10	Vom Imaginären zum Komplexen	197
	Die Welt des Imaginären wird betreten	201
	Polarkoordinaten	207
	Gauß'sche Zahlen	211
	Ein kurzer Blick auf weitere Folgerungen	213
11	Die Zahlengerade unter dem Mikroskop	223
	Rückkehr nach Ägypten	226
	Münzen, Summen und Differenzen	230
	Fibonacci-Zahlen und Brüche	235
	Die Cantor'sche Menge	239
12	Anwendungen der Zahlentheorie:	
	Codes und Public-Key-Kryptographie	245
	Historische Beispiele	245
	Nicht zu knackende Geheimschriften	254
	Neue Verschlüsselungsverfahren für eine Neue Welt der Verschlüsselung	258
	Die gleichzeitige Schlüsselerstellung	260
	Die Falltür wird geöffnet: Public-Key-Verschlüsselung .	268
	Alice und Bob besiegen Eve mit modularer Arithmetik	272
13	Für Kenner und Feinschmecker	281
	Kapitel 1	281
	Kapitel 3	286
	Kapitel 4	290
	Kapitel 5	303
	Kapitel 6	304
	Kapitel 7	311
	Kapitel 8	319

XII Das kleine Buch der Zahlen

Kapitel 9	324
Kapitel 10	327
Kapitel 11	333
Kapitel 12	337
Literaturempfehlungen	341
Sachverzeichnis	347

1

Die ersten Zahlen

„Alles ist Zahl“, sagte vor über 2500 Jahren Pythagoras. Damit meinte er, dass die Natur in ihren Grundlagen von mathematischem Charakter ist und sich durch Zahlen und Zahlenverhältnisse beschreiben lässt. Hatte er Recht? Die knappe Antwort lautet „Nein“, wie er angeblich selbst herausgefunden haben soll.

Tatsächlich haben die Anhänger von Pythagoras entdeckt, wie sich bestimmte Aspekte der Welt durch Zahlen beschreiben lassen. Pythagoras ist am ehesten wegen seines berühmten Satzes bekannt, der die Seitenlängen eines rechteckigen Dreiecks zueinander in Beziehung setzt. In moderner Sprechweise würde man sagen, dass sich die genaue Distanz zwischen zwei Punkten aus ihren Koordinaten berechnen lässt. Diese Entdeckung machte es möglich, den räumlichen Abstand aus anderen Messgrößen exakt zu bestimmen, und war damit ein wichtiger Fortschritt. Etwas weniger bekannt ist vielleicht, dass Pythagoras auch angeblich die einfachen Zahlenverhältnisse gefunden hat, die reinen musikalischen Akkorden zugrunde liegen. Von ihrem Erfolg geblendet muss es den Pythagoräern so vorgekommen sein, als ob sich jeder Aspekt der Welt durch Zahlen beschreiben ließe, denn ihre Entdeckungen waren wirklich erstaunlich. Die Klarheit und Einfachheit, die in den pythagoräischen Gesetzen zum Ausdruck kamen, waren von einer noch nie zuvor gekannten Form.

Daher muss es wie ein Schock gewesen sein, als Pythagoras herausfand, dass sich die Zahlen selbst seiner Regel widersetzen, denn ihm wird auch die Entdeckung zugeschrieben, dass

sich bestimmte Längen in seiner Geometrie nicht durch einfache Zahlenverhältnisse ausdrücken lassen, wie es von seiner Philosophie gefordert wurde. Insbesondere fand er heraus, dass sich die Diagonale eines Quadrats nicht mit denselben Einheiten messen lässt, mit denen man die Seiten messen kann. Egal wie fein man die Skala auch unterteilt, die Spitze der Diagonale liegt immer zwischen zwei solchen Markierungen. Das hängt mit einer fundamentalen Eigenschaft der Zahlen zusammen und hat nichts mit irgendwelchen Einschränkungen zu tun, die sich vielleicht aus der Genauigkeit des Lineals oder der Schärfe der Augen ergeben. Es handelt sich um eine mathematische Tatsache. Doch was für uns vielleicht eine ärgerliche Besonderheit ist, wurde von den Pythagoräern als eine Katastrophe empfunden. Es untergrub ihre gesamte Weltanschauung, mit der sie die Natur durch einfache Zahlenverhältnisse erklären wollten. Schon in diesen klassischen Zeiten gab es also Probleme mit der Vorstellung, es ließe sich alles auf Zahlen zurückführen.

Trotz dieser Einschränkungen haben die Zahlen nichts an Bedeutung verloren, im Gegenteil, sie sind immer weiter in unser Leben vorgedrungen. Schon zu Beginn des 17. Jahrhunderts vertrat Galileo die Meinung, man solle alles vermessen, was sich ausmessen lässt, und man sollte lernen auch solche Dinge zu messen, die bislang noch nicht vermessen wurden. Diese Einstellung führte zu einer Fülle an neuen Erkenntnissen, und durch die Forderung nach Messung sind wir gezwungen, mit einer Zahl aufzuwarten.

Wird diese Einstellung zu weit getrieben, regt sich aber auch ein natürlicher Widerstand. Versuche, die Erfahrung von Musik oder Dichtung durch Zahlen zu erfassen, treffen oft auf Ablehnung und Spott. Schon allein die Vorstellung zerstört den Zauber, und da ist es nur natürlich, dass man sich darüber lustig macht und auf ein Scheitern hofft. Diese Einstellung scheint auch immer noch gerechtfertigt, denn im künstlerischen Bereich verlieren Zahlen schnell ihre Autorität. Um nicht missverstanden

zu werden: Die Musik hat eine mathematische Seite, wie Pythagoras entdeckt hat, und es lohnt sich, diesen Aspekt genauer zu verstehen. Doch ein rein analytischer Zugang zu den Künsten führt nur zu schwachen Ergebnissen. Gute Musik ist nicht das Ergebnis von Berechnungen, und je mehr dieser Weg beschritten wird, umso erbärmlicher sind die Resultate.

Missverständnisse in dieser Richtung sind aber alles andere als neu. Quer durch die Geschichte und unterschiedliche Kulturen stoßen wir immer wieder auf Beispiele, wo numerische Vorstellungen in unangebrachter Form angewandt wurden und schließlich scheiterten. Einfache Behauptungen der Art, die geraden Zahlen seien weiblich und die ungeraden Zahlen männlich oder auch das Umgekehrte, führen zu nichts. Künstliche Versuche, die Naturgesetze abzuleiten, haben noch nie gefruchtet. Sie sagen meist mehr über die menschliche Psyche aus als über die Welt: Einfache Ideen, die in erster Linie unserer Vorstellungskraft genehm sind, mögen etwas Beruhigendes und vielleicht sogar Amüsantes haben, doch in den seltensten Fällen sind sie wahr.

Als Gegenreaktion auf den unablässigen Ruf nach Zahlen und Prozenten beobachtet man heute auf künstlerischem Gebiet eine oft aggressive Tendenz, jedes systematische oder wissenschaftliche Denken abzulehnen. Einige der größten Künstler, beispielsweise Leonardo da Vinci, hätten diese Einstellung sicherlich sehr befremdlich gefunden. Ich frage mich manchmal, ob diese Sehnsucht, sich der Zwangsjacke des logischen Denkens entziehen zu wollen, nicht vielleicht ein Zeichen von Frustration ist und eigentlich auf fehlender Kreativität beruht, für die man die Zahlen gerne verantwortlich machen möchte, die in unserem heutigen Leben eine so vorherrschende Rolle zu spielen scheinen. Das ständige Ausmessen von Dingen scheint der Spontaneität entgegenzustehen und führt zu einer Abneigung gegen die Zahlen, die als langweilig und einschränkende Last empfunden werden. Vielleicht wurden unsere Art zu denken, unsere Gedankenfrei-