DUDEN

ABI GENIAL

# MATHEMATIK

DAS SCHNELL-MERK-SYSTEM

Mit **Originalprüfungen** und **Musterlösungen** online auf www.lernhelfer.de

## So funktioniert Abi genial

**Wissen einprägen mit dem Schnell-Merk-System**

- **Kapitelstarter:** Basiswissen zu jedem Kapitel
- **Klar gegliederter Stoff:** schnelles Auffinden und gute Orientierung durch Merkwissen (▶) und Infokästen
- **Topthemen:** Vertiefung des zentralen Lernstoffs
- **Prüfungsratgeber und Prüfungsaufgaben:** alles über Anforderungsbereiche und Operatoren in einem Extrakapitel sowie typische Prüfungsaufgaben zu allen Unterrichtsthemen

**Prüfungstraining mit Abitur-Originalklausuren**

- **Originalprüfungen mit Lösungen passend zum Buch:** Auf **www.lernhelfer.de/abigenial** gibt es das exklusive Abi-Genial-Lernpaket für nur 1,- Euro. Darin enthalten sind vier Originalprüfungen mit ausführlichen Musterlösungen als Pdf.

# Meilensteine der Mathematik

**um 325 v. Chr.**
Euklid von Alexandria entwickelt einen axiomatischen Aufbau der Geometrie

**287 – 212 v. Chr.**
Archimedes von Syrakus bestimmt Flächeninhalte an Parabeln und Kreisen, die Oberfläche und das Volumen der Kugel

**1636**
Pierre de Fermat konzipiert grundsätzlich die analytische Geometrie

**1637**
René Descartes führt Koordinatensysteme zur algebraischen Behandlung geometrischer Probleme ein

**1654**
Anfänge der Wahrscheinlichkeitsrechnung mit dem Briefwechsel zwischen Chevalier de Méré und Blaise Pascal zum Glücksspiel

**1664 – 1666**
Isaac Newton entwickelt seine Fluxionsrechnung

**1673 – 1676**
Gottfried Wilhelm Leibniz entwickelt die Grundlagen der Infinitesimalrechnung

**1755**
Funktionen werden zum Gegenstand der Differenzialrechnung bei Leonard Euler

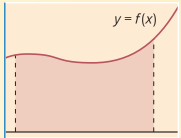
**1794**
Carl Friedrich Gauß verwendet die mittlere quadratische Abweichung als Streuungsmaß

**1812**
Pierre Simon Laplace veröffentlicht die Hauptsätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung

**1831**
Carl Friedrich Gauß führt den Begriff der komplexen Zahl ein

**1837**
Siméon Denis Poisson gibt Formeln für Erwartungswert und Varianz einer Binomialverteilung an

**1843**
William Roward Hamilton definiert das Skalarprodukt



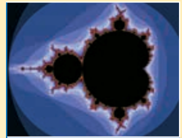

**1854**
Neufassung des Begriffs des Integrals durch Georg Friedrich Bernhard Riemann

**1888**
Giuseppe Peano gibt eine axiomatische Definition des Vektorraums

**1899**
David Hilbert stellt ein Axiomensystem der Geometrie ohne explizite Definition der Begriffe Punkt und Gerade auf

**1918**
Richard von Mises entwickelt eine statistische Wahrscheinlichkeitstheorie

**1933**
Andrej Nikolajewitsch Kolmogoroff formuliert endgültig ein Axiomensystem zum Aufbau der Wahrscheinlichkeitsrechnung



**1975**
Benoît Mandelbrot entdeckt universelle Strukturen in nicht linearen dynamischen Systemen


**1995**
Andrew Wiles gelingt der Beweis der fermatschen Vermutung

Duden

# ABI GENIAL

# MATHEMATIK

DAS SCHNELL-MERK-SYSTEM

**Dudenverlag**
Berlin

# Inhaltsverzeichnis

# 1 Funktionen

## Wichtige Definitionen

### Abbildungen

Eine **Abbildung** ordnet den Elementen einer Menge D durch eine Vorschrift Elemente einer Menge W zu. Eine solche Abbildung (Zuordnung) nennt man

- **mehrdeutig**, wenn mindestens einem $x \in D$ **mehr als ein** $y \in W$ zugeordnet wird,
- **eindeutig**, wenn jedem $x \in D$ **genau ein** $y \in W$ zugeordnet wird,
- **eineindeutig**, wenn außerdem noch zu jedem $y \in W$ **genau ein** $x \in D$ gehört.

*Mehrdeutige Abbildung $f_1$:*
Jeder ganzen Zahl wird die Zahl zugeordnet, für die sie Teiler ist, also $1 \rightarrow 1$; $1 \rightarrow 2$; $2 \rightarrow 2$; …
*Eindeutige Abbildung $f_2$:*
Jeder ganzen Zahl wird ihr Quadrat zugeordnet, also $0 \rightarrow 0$; $\pm 1 \rightarrow 1$; $\pm 2 \rightarrow 4$; $\pm 3 \rightarrow 9$; ….
*Eineindeutige Abbildung $f_3$:*
Jeder reellen Zahl wird ihr Doppeltes zugeordnet, also $0 \rightarrow 0$; $1 \rightarrow 2$; $0{,}5 \rightarrow 1$; $\pi \rightarrow 2\pi$ usw. Zu jeder reellen Zahl gehört auch *genau eine* reelle Zahl, die halb so groß ist.

### Produktmengen

Eine Abbildung ist beschreibbar als Teilmenge der Produktmenge $D \times W$.
Die **Produktmenge** $D \times W$ ist die Menge aller geordneten Paare, deren erste Komponente ein Element aus D und deren zweite Komponente ein Element aus W ist.

$D = \mathbb{Z}$; $W = \mathbb{N}$
$D \times W = \{(0; 0), (0; 1), \ldots, (-1; 0), (-1; 1), (-1; 2), \ldots, (1; 0), (1; 1), (1; 2), \ldots, (-2; 0), (-2; 1), (-2; 2), \ldots\}$.
Abbildung $f_2$ von oben ist eine Teilmenge von $D \times W$.
$f_2 = \{(0; 0), (-1; 1), (1; 1), (-2; 4\}, (2; 4), \ldots\}$

## Funktionen

Eine **Funktion** $f$ ist eine eindeutige Zuordnung (Abbildung) der Elemente zweier Mengen. Jedem Element $x$ aus der Definitionsmenge $D_f$ (dem **Definitionsbereich**) wird dabei genau ein Element $y$ aus einer Wertemenge $W_f$ (dem **Wertebereich**) zugeordnet.
Kurzform:
$f: x \mapsto y$ oder $f: x \mapsto f(x)$
Die Elemente $x \in D_f$ heißen **Argumente** von $f$, die zugeordneten Elemente $y \in W_f$ bzw. $f(x) \in W_f$ heißen **Funktionswerte**.
Die Gleichung $y = f(x)$ heißt Funktionsgleichung der Funktion $f$.

Messung der Lufttemperatur T zu bestimmten Uhrzeiten

| **Uhrzeit** | 4 | 6 | 8 | 20 | 22 | 24 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **T in °C** | –3 | –2 | 0 | 0 | –1 | –2 |

Hier gilt:
$D_f = \{4; 6; 8; 20; 22; 24\}$ $W_f = \mathbb{Z}$
(bei ganzzahliger Messung)
$f = \{(4; -3), (6; -2), (8; 0), (20; 0), (22; -1), (24; -2)\}$

Jeder reellen Zahl wird ihre dritte Potenz zugeordnet.
Hier gilt:
$D_f = \mathbb{R}$; $W_f = \mathbb{R}$
$f = \{(x; y) \mid y = x^3 \text{ und } x \in \mathbb{R}\}$,
also $f = \{(0; 0), (-2; -8), (0{,}5; 0{,}125), \ldots\}$, $f \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

## Reelle Funktionen

Sind Definitions- und Wertebereich Mengen reeller Zahlen, so spricht man von **reellen Funktionen**.
Eine Funktion kann auch zwei oder mehr unabhängige Variablen besitzen.
Bei zwei unabhängigen Variablen besteht der Definitionsbereich aus geordneten Paaren reeller Zahlen und der Wertebereich ist $\mathbb{R}$ oder eine Teilmenge von $\mathbb{R}$. Man schreibt dann z. B. $z = f(x, y)$.

Für den Flächeninhalt A eines Rechtecks mit den Seitenlängen a und b (jeweils auf Maßzahlen bezogen) gilt:
$A(a, b) = a \cdot b$.
Der Definitionsbereich von A ist die Menge $\{(a; b) \mid a, b \in \mathbb{R}^+\}$, der Wertebereich ist $\mathbb{R}^+$. Jedem Paar von Seitenlängen wird eindeutig ein Flächeninhalt zugeordnet.

## 1.1 Darstellung und Beschreibung

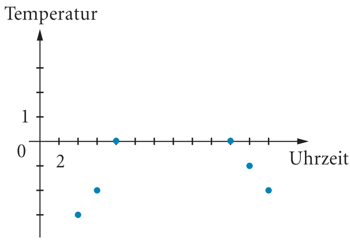
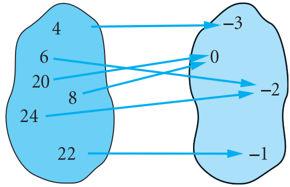
Für die Darstellung und Beschreibung reeller Funktionen kommen vor allem folgende Varianten in Frage:

- Angabe der (geordneten) **Paare** einander zugeordneter Elemente aus Definitions- und Wertebereich (nur möglich bei endlicher Paaranzahl);
- Beschreibung der Zuordnungsvorschrift in Worten (**Wortvorschrift**; verbale Beschreibung);
- Angabe einer die Zuordnung vermittelnden **Funktionsgleichung** $y = f(x)$ ($f(x)$ heißt dann **Funktionsterm**);
- Darstellung der einander zugeordneten Elemente in einer **Wertetabelle** (bei endlicher Paarzahl);
- Beschreibung durch **grafische Darstellungen**, z. B. durch ein Pfeildiagramm oder durch Deuten der Zahlenpaare als die Koordinaten von Punkten in einem Koordinatensystem, wodurch man einen Graphen der Funktion erhält.

**Darstellung und Beschreibung von Funktionen**

| Variante | Beispiel Temperaturmessung |
|---|---|
| Paarangabe | (4; –3), (6; –2), (8; 0), (20; 0), (22; –1), (24; –2) |
| Wortvorschrift | Jedem Messzeitpunkt wird die gemessene Lufttemperatur zugeordnet |
| Funktionsgleichung | (Angabe ist in diesem Falle nicht möglich) |
| Wertetabelle | siehe unten |

| **Uhrzeit** | 4 | 6 | 8 | 20 | 22 | 24 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **T in °C** | –3 | –2 | 0 | 0 | –1 | –2 |

| Darstellung und Beschreibung von Funktionen (Forts.) | |
|---|---|
| grafische Darstellung |   |
| Pfeildiagramm |   |

## Parameterdarstellung

Bei der Parameterdarstellung von Funktionen wird sowohl die Variable x als auch die Variable y jeweils durch eine Gleichung beschrieben, die einen (gemeinsamen) Parameter t als unabhängige Variable enthält. Es gilt also: $x = f_1(t)$ und $y = f_2(t)$.

*Beispiel:* Es sei $x = f_1(t) = \frac{t}{3}$ und $y = f_2(t) = 6t$ mit $D_{f_1} = D_{f_2} = ]-\infty; \infty[$ bzw. $-\infty < t < \infty$. Dann erhält man folgende Wertetabellen:

| **Wertetabelle für $f_1$ und $f_2$** | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **t** | **–9** | **–6** | **–3** | **0** | **3** | **6** |
| $x = f_1(t) = \frac{t}{3}$ | –3 | –2 | –1 | 0 | 1 | 2 |
| $y = f_2(t) = 6t$ | –54 | –36 | –18 | 0 | 18 | 36 |

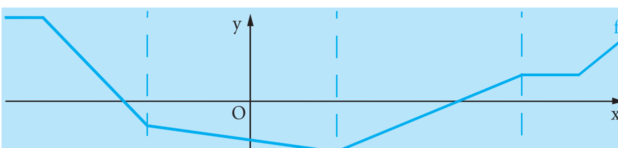
# 1.2 Eigenschaften

## Monotonie

**Definition**

Eine Funktion f heißt in einem Intervall I von $D_f$

| | |
|---|---|
| **monoton fallend,** | **monoton wachsend,** |
| wenn für beliebige $x_1, x_2 \in I$ gilt: | |
| $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$ | $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ |
| Gilt sogar | |
| $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ | $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ |
| so heißt f | |
| **streng monoton fallend.** | **streng monoton wachsend.** |




## Beschränktheit

**Definition**

Eine Funktion f heißt

| | |
|---|---|
| **nach oben beschränkt,** | **nach unten beschränkt,** |
| wenn es eine Zahl $s_o \in \mathbb{R}$ gibt, | wenn es eine Zahl $s_u \in \mathbb{R}$ gibt, |
| sodass für alle $x \in D_f$ gilt: | |
| $f(x) \leq s_o$ | $f(x) \geq s_u$ |
| Man nennt dann | |
| $s_o$ **obere Schranke** von f. | $s_u$ **untere Schranke** von f. |

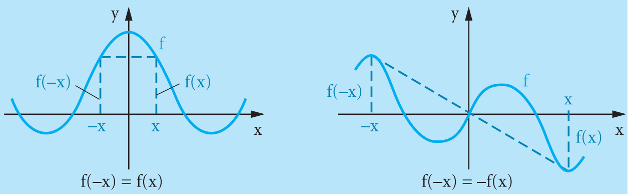
# Symmetrie

## Gerade und ungerade Funktionen

Eine Funktion $f$ heißt

| **gerade Funktion,** | **ungerade Funktion,** |
|---|---|
| wenn mit der Zahl $x$ stets auch $-x$ zum Definitionsbereich $D_f$ von $f$ gehört und wenn gilt: | |
| $f(-x) = f(x)$ | $f(-x) = -f(x)$ |

- Der Graph einer geraden Funktion ist achsensymmetrisch zur y-Achse.
- Der Graph einer ungeraden Funktion ist punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung.




*Beispiele:* $f_1(x) = x^2$ ist eine gerade Funktion, denn
$f_1(-x) = (-x)^2 = x^2 = f_1(x)$.
$f_2(x) = x^3$ ist eine ungerade Funktion, denn
$f_2(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f_2(x)$.
$f_3(x) = x^2 - x$ ist weder gerade noch ungerade, denn
$f_3(-x) = (-x)^2 - (-x) = x^2 + x$, also verschieden von $f_3(x)$ und $-f_3(x)$.

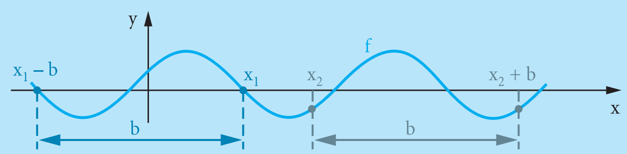
# Periodizität

## Definition

Eine Funktion $f$ heißt **periodisch**, wenn es eine Zahl $b > 0$ gibt, sodass für jedes $x \in D_f$ gilt: $f(x + b) = f(x)$ $(x + b \in D_f)$. Die kleinste derartige Zahl $b$ wird **Periode** von $f$ genannt.

Für eine periodische Funktion f mit $f(x + b) = f(x)$ gilt also:

- Im Abstand b wiederholen sich die Funktionswerte.
- Die Abschnitte des Graphen von f über den Intervallen $[x; x + b]$, $[x + b; x + 2b]$, $[x - 3b; x - 2b]$, ... aus $D_f$ sind kongruent.




## Umkehrbarkeit und Umkehrfunktionen

**Definition**

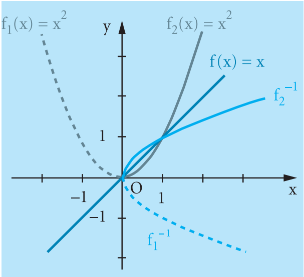
Eine Funktion $y = f(x)$ heißt umkehrbar, wenn die durch sie vermittelte Zuordnung f **umkehrbar eindeutig** ist.

Zu jedem Element $y \in W_f$ gehört also auch genau ein $x \in D_f$. Das heißt: Für alle $x_i \in D_f$ folgt aus $x_1 \neq x_2$ stets $f(x_1) \neq f(x_2)$. Die Umkehrfunktion von f (auch inverse Funktion genannt) wird mit $f^{-1}$ bezeichnet. Es ist $D_{f^{-1}} = W_f$ und $W_{f^{-1}} = D_f$.

Die **Gleichung der Umkehrfunktion** von f gewinnt man, indem man die Gleichung $y = f(x)$ nach x auflöst (so dies möglich ist) und die Bezeichnungen y und x vertauscht. Die Graphen einer Funktion $y = f(x)$ und ihrer Umkehrfunktion $y = f^{-1}(x)$ liegen spiegelbildlich zur Geraden $y = x$.

*Beispiel:* Die Funktion g mit der Gleichung $y = 3x - 5$, $D_g = \mathbb{R}$ ist umkehrbar und hat die Gleichung $g^{-1}: y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$. Die Funktion $f(x) = x^2$ vermittelt hingegen keine eineindeutige Zuordnung: Jedem y-Wert (Ausnahme: 0) sind zwei x-Werte zugeordnet. Zerlegt man jedoch f in die beiden Funktionen $f_1: y = x^2$, $D_{f_1} = ]-\infty; 0]$, und $f_2: y = x^2$, $D_{f_2} = [0; \infty[$,

dann existieren deren Umkehrungen. Aus $y = x^2$ folgt $|x| = \sqrt{y}$, woraus man $-x = \sqrt{y}$ bzw. $x = \sqrt{y}$ erhält. Vertauschen von x und y liefert die Gleichungen der Umkehrfunktionen
$f_1^{-1}\colon\ y = -\sqrt{x},\ f_2^{-1}\colon\ y = \sqrt{x}.$




## Nullstellen

**Definition**

Eine Zahl $x_0 \in D_f$ heißt **Nullstelle von f**, wenn $f(x_0) = 0$ gilt.

In der grafischen Darstellung ist eine Nullstelle einer Funktion die Abszisse eines Schnittpunkts des Funktionsgraphen mit der x-Achse. Eine Funktion kann genau eine, mehrere oder keine Nullstelle bzw. Schnittpunkte mit der x-Achse besitzen.

## Abschnittsweise definierte Funktionen

**Definition**

**Abschnittsweise definierte Funktionen** werden in den Abschnitten ihres Definitionsbereiches durch unterschiedliche Zuordnungsvorschriften bzw. Funktionsterme definiert.

*Beispiel:* Die Zuordnung „Briefgewicht (m in g) → Beförderungsgebühr (p in Euro)" stellt eine Funktion p = f(m) dar:

$$p(m) = \begin{cases} 0{,}55 \text{ für } & 0 < m \le 20 \\ 0{,}90 \text{ für } & 20 < m \le 50 \\ 1{,}45 \text{ für } & 50 < m \le 500 \\ 2{,}20 \text{ für } & 500 < m \le 1\,000 \end{cases}$$

# 1.3 Verknüpfen und Verketten

## Verknüpfen

Aus bekannten Funktionen können durch **Verknüpfen** der entsprechenden Funktionsgleichungen (kurz: der Funktionen) mithilfe der Grundrechenoperationen Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division neue Funktionen gebildet werden.

**Summe, Differenz, Produkt, Quotient**

Die Funktionen f mit $y = f(x)$ und g mit $y = g(x)$ auf den Definitionsmengen $D_f$ und $D_g$ bilden folgende Verknüpfungen:

| | |
|---|---|
| Summe | $s = f + g$ mit $s(x) = f(x) + g(x)$, $D_s = D_f \cap D_g$ |
| Differenz | $d = f - g$ mit $d(x) = f(x) - g(x)$, $D_d = D_f \cap D_g$ |
| Produkt | $p = f \cdot g$ mit $p(x) = f(x) \cdot g(x)$, $D_p = D_f \cap D_g$ |
| Quotient | $q = \frac{f}{g}$ mit $q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, $D_q = D_f \cap D_g \setminus \{x \mid g(x) = 0\}$ |

Der Definitionsbereich einer durch Verknüpfung entstandenen Funktion ist in Abhängigkeit von den Definitionsbereichen der Ausgangsfunktion und der Verknüpfungsart zu bestimmen.

*Beispiel:* Für die Funktionen $f(x) = x^2$ und $g(x) = x - 1$ mit $D_f = D_g = \mathbb{R}$ wird das Produkt $f \cdot g$ beschrieben durch $p(x) = x^2 \cdot (x - 1)$, $x \in \mathbb{R}$. Für den Quotienten $\frac{f}{g}$ erhält man $q(x) = \frac{x^2}{x-1}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

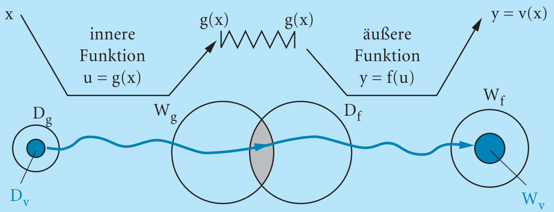
## Verketten

Eine weitere Möglichkeit, aus gegebenen Funktionen neue Funktionen zu bilden, stellt das **Nacheinanderausführen** bzw. **Verketten** zweier Zuordnungsvorschriften dar.

## Verkettung, äußere und innere Funktion

Die Funktion $v$ mit $v(x) = f(g(x))$ heißt **Verkettung** von $f$ und $g$. Man schreibt $v = f \circ g$ (gesprochen: *f* nach *g*). Die Funktion $f$ nennt man **äußere Funktion**, die Funktion $g$ **innere Funktion** der verketteten Funktion $v$. Die Verkettung $v$ ist definiert für alle $x$, für welche die Funktionswerte von $g$ (also $g(x)$) zum Definitionsbereich von $f$ gehören.

Eine Verkettung der äußeren Funktion f mit der inneren Funktion g zur Funktion $v = f \circ g$ bedeutet demnach, dass man Funktionswerte g(x) der inneren Funktion g zu Argumenten der äußeren Funktion f macht. Eine Verkettung ist nur dann möglich, wenn die Schnittmenge aus dem Definitionsbereich von f und dem Wertebereich von g nicht leer ist.




$$D_v = \{x \mid x \in D_g \text{ und } g(x) \in D_f\}$$

*Beispiel:* Betrachtet werden die Funktionen $f(x) = \sin x$ und $g(x) = 2x$. Um die Verknüpfung $f \circ g$ zu erhalten, wendet man in einem ersten Schritt auf einen Wert x aus dem Definitionsbereich von g die Zuordnungsvorschrift g „Verdopple!“ an und erhält so den Funktionswert $g(x) = 2x$.

In einem zweiten Schritt wird auf den Wert g(x) die Zuordnungsvorschrift f „Sinuswert bilden!“ angewendet. Man erhält: $f(2x) = \sin 2x$.

Durch die Verknüpfung $f \circ g$ ist somit die neue Funktion v mit $v(x) = \sin 2x$ entstanden.

- $\boxed{\text{CAS}}$ Die Ecken A(5/5/0), B(–5/5/0), C(–5/–5/0) und D(5/–5/0) bilden die Grundfläche eines Würfels. Verbindet man die Kantenmitten der Deckfläche des Würfels mit den Ecken der Grundfläche, so entsteht ein Würfelstumpf. Stellen Sie zwei angrenzende Seitenflächen des Würfelstumpfes grafisch dar und zeigen Sie, dass für deren Schnittwinkel $\psi = 131{,}8\,°$gilt. (↑S. 135)

**Anforderungsbereich III**

- Im Rahmen einer Flughafenerweiterung muss eine neue Startbahn gebaut werden, für die eine Schar von geradlinigen Flugrouten durch die Gleichung

$$g_k : \vec{x} = \begin{matrix} -10 \\ 2 \\ 0 \end{matrix} + \lambda \begin{matrix} 5 \\ 5-k \\ 1 \end{matrix} ;k\ \mathbb{N}, 1 \le k \le 9, r\ \mathbb{R}^{\ge 0}$$

  zur Verfügung steht. Ein Turm und ein Sendemast mit A(–10/2/0) und B(–6/–3,5/0) müssen in der Einflugschneise berücksichtigt werden. Zeigen Sie, dass alle Geraden der Schar $g_k$ in einer Ebene E liegen, und bestimmen Sie deren Gleichung. Berechnen Sie den Winkel zwischen der Ebene E und der Erdoberfläche, die als $x_1$-$x_2$-Ebene anzusetzen ist. Interpretieren Sie die Aufstiegswinkel der einzelnen Flugrouten. (↑S. 135)
- Gegeben seien im $\mathbb{R}^3$ der Punkt P(3/1/–1) sowie die Ebene

  $E : \vec{x} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 4$ und die Kugel $K : \vec{x}^{\,2} - \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + 23 = 0.$

  Berechnen Sie die Gleichung der Tangentialebene T, die K in P berührt. (↑S. 145)
- $\boxed{\text{CAS}}$ Zwei Lautsprecher, die als bauidentisch angenommen werden, erzeugen in der x-y-Ebene zwei Felder von

Kreiswellen, die sich überlagern und deren Erregerpunkte $F_1$ und $F_2$ sind. Mit $r_1 = \overline{PF_1}$, $r_2 = \overline{PF_2}$ und der Wellenlänge $\lambda$ gilt für die Zonen der Wellenauslöschung $|r_1 - r_2| = (2n+1)\frac{\lambda}{2}; n \in \mathbb{N}$, für die maximalen Wellenamplituden gilt $|r_1 - r_2| = n\lambda; n \in \mathbb{N}$. Veranschaulichen Sie die Hyperbeln und ermittlen Sie die Hyperbelgleichungen in kartesischen Koordinaten für die maximalen Wellenamplituden. (↑S. 136 ff.)

## 3.8 Prüfungsaufgaben zur Wahrscheinlichkeitsrechnung

### Anforderungsbereich I

- Ein Glückskreisel mit 12 gleich großen Sektoren wird um die eigene Achse gedreht und bleibt genau auf einer Sektorkante stehen. Benennen Sie die Art des Zufallsexperiments, geben Sie die Ereignismenge $\Omega$ an und geben Sie die Wahrscheinlichkeit der Ergebnisse an. (↑S. 146, 153)
- In einem Lager wird die Ware stichprobenartig überprüft. Mit einem Lieferanten besteht der Vertrag, dass die Ware ohne weitere Untersuchung zurückgeschickt werden kann, wenn bei der Kontrolle von 8 beliebig ausgewählten Stücken 3 oder mehr nicht in Ordnung sind. Geben Sie an, auf wie viele Weisen Prüfstücke entnommen werden können, wenn 65 Produkte geliefert werden. (↑S. 156)
- CAS Zeichnen Sie die Graphen der gaußschen Integralfunktion $\Phi$ im Intervall $[-3;3]$ und die Punkte der standardisierten kumulierten Binomialverteilung mit $n = 1000$ und $p = 0{,}4$. (↑S. 174)
- Was versteht man unter einer „Zufallsgröße“? (↑S. 161)
- Bestimmen Sie den Erwartungswert der Augenzahl beim einfachen Würfeln mit einem Hexaeder. (↑S. 163)

## Anforderungsbereich II

- Drei Lokalzeitungen A, B, C haben insgesamt einen Marktanteil von 35 %, 20 % und 45 %, der Abonnementanteil liegt bei Zeitung A bei 15 %. Zeitung B mit 55 % und Zeitung C mit 65 % sind hier allerdings viel stärker. Ermitteln Sie den Anteil der Abonnenten unter den Zeitungslesern. (↑S. 154)
- CAS Bei einem Fußballspiel sind 60 % der Zuschauer im Stadion Fans der Heimmannschaft. Unter diesen Fans werden etwa 4 % als gewaltbereit eingeschätzt, bei den Fans der gegnerischen Mannschaft gilt der Anteil als doppelt so hoch. Ermitteln Sie die Erwartungswerte und den Graphen der Wahrscheinlichkeitsverteilung, wenn die Zufallsvariable die Zugehörigkeit zu einer Fußballmannschaft bei einer Kontrollgruppengröße von 70 Fans beschreibt. (↑S. 162 f.)

## Anforderungsbereich III

- In einer Untersuchung soll festgestellt werden, ob Personen, die sich an Wahlen nicht beteiligt haben, dies auch zugeben. Die Wahlbeteiligung bei der letzten Wahl betrug 87 %. Es wird eine Stichprobe vom Umfang 1350 durchgeführt. Ermitteln Sie, mit welchem Stichprobenergebnis Sie rechnen können. (↑S. 168)
- Begründen Sie, dass standardisierte Binomialverteilungen näherungsweise standard-normalverteilt sind. (↑S. 174)
- CAS Interpretieren Sie zur Fragestellung „Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass unter 28 Schülern in einer Klasse mindestens zwei denselben Geburtstag haben?“ das Ergebnis Ihrer Simulation und der theoretischen Wahrscheinlichkeit. (↑S. 171 ff.)
- Beweisen Sie mithilfe der Ungleichung
  $P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a};\ a > 0$ die Ungleichung von Tschebyscheff.
  (↑S. 164)

## 3.9 Prüfungsaufgaben zu beschreibender und beurteilender Statistik

### Anforderungsbereich I

- Bei einer Warenkontrolle können Fehler unterlaufen: Die produzierte Ware kann den verlangten Qualitätsbedingungen genügen oder nicht. Beschreiben Sie Fehler 1. und 2. Art. (↑S. 182)
- Bei einem verdeckt laufenden Glücksrad sind entweder 8 Sektoren weiß und 12 schwarz oder umgekehrt. Nennen Sie geeignete Entscheidungsregeln für $p = 0{,}4$ und $n = 100$ und geben Sie $\alpha$ und $\beta$ an.
- CAS Erfassen Sie die Daten des Reaktionstests „Fallendes Lineal“ in einer Matrix, beschreiben Sie die Ausgänge des Versuchs mithilfe von Lageparametern und nutzen Sie ein Histogramm zur grafischen Veranschaulichung. (↑S. 178 f.)

### Anforderungsbereich II

- Bestimmen Sie den Annahmebereich der Nullhypothese $H_0: p = \frac{1}{5}$ mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 0{,}02$ bei einem Stichprobenumfang $n = 100$. (↑S. 182)
- Ein Autohersteller wirbt für seine Fahrzeuge damit, dass mehr als die Hälfte auf den Straßen von dieser Marke produziert würden. Während einer Testfahrt werden 102 Autos gezählt, von denen 87 von der betreffenden Firma produziert wurden. Erläutern Sie, ob dieses Testergebnis die Firmenwerbung unterstützt. (↑S. 185)
- CAS Ein Liebespaar steht in stockdunkler Nacht vor einer Waldhütte. Die Verliebten wählen blindlings Schlüssel an ihrem Schlüsselbund aus, um die Hütte aufzuschließen, da sie abgelenkt sind, und merken sich nicht, welche Schlüssel sie bereits ausprobiert haben. Ermitteln Sie, wie oft das Paar im Mittel probieren muss, bis es den passenden Schlüssel

gefunden hat, indem Sie ein entsprechendes Programm schreiben. (↑S. 179)

### Anforderungsbereich III

- Eine repräsentative Umfrage ergab für einen Politiker einen Sympathiewert von 42 %. Kann man mit der Irrtumswahrscheinlichkeit $a = 0{,}05$ damit rechnen, dass unter 100 zufällig befragten anderen Personen der Sympathieanteil auf 25 % sinkt? (↑S. 185)
- Bei einem Würfel bestehen Zweifel, ob es sich um einen Laplace-Würfel handelt. Es wird ein Test mit 250 Würfen durchgeführt, bei dem 49-mal die Zahl 1 fällt. Kann man daraus mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 5 % schließen, dass der Würfel kein Laplace-Würfel ist? (↑S. 185)
- CAS Schreiben Sie ein Programm, dass zu einer Zufallsstichprobe vom Umfang n einer Population die empirische Varianz $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$ berechnet und die Treffsicherheit von $s^2$ untersucht. (↑S. 180)

| Zeichen | Bedeutung |
|---|---|
| **Mengen** | |
| $\mathbb{N}$ | Menge der natürlichen Zahlen $\{0; 1; 2; 3; \ldots\}$ |
| $\mathbb{N}^+$ | Menge der natürlichen Zahlen ohne Null |
| $\mathbb{Z}$ | Menge der ganzen Zahlen |
| $\mathbb{Q}$ | Menge der rationalen Zahlen |
| $\mathbb{R}$ | Menge der reellen Zahlen |
| $\mathbb{C}$ | Menge der komplexen Zahlen |
| $\{a; b; \ldots\}$ | Menge mit den Elementen a, b, ... |
| $(a_1, \ldots, a_n)$ | geordnetes n-Tupel |
| $\{x \mid x = \ldots\}$ | Menge aller x, für die gilt ... |
| $[a; b]$ | abgeschlossenes Intervall von a bis b |
| $]a; b[$ | offenes Intervall von a bis b |
| $]a; b]$ | linksoffenes Intervall von a bis b<br>(ohne a, mit b) |
| $[a; b[$ | rechtsoffenes Intervall von a bis b<br>(mit a, ohne b) |
| $\emptyset$, $\{\}$ | leere Menge |
| $\in$ | Element von |
| $\notin$ | nicht Element von |
| $\subseteq$ | Teilmenge von |
| $\subset$ | echte Teilmenge von |
| $A \cup B$ | A vereinigt mit B (Vereinigungsmenge) |
| $A \cap B$ | A geschnitten B (Durchschnittsmenge) |
| $A \setminus B$ | A ohne B (Differenzmenge) |
| $A \times B$ | A kreuz B (Produktmenge) |
| $\overline{A}$ | Komplementärmenge zu A |
| $\mathcal{P}(A)$ | Potenzmenge von A |

| Zeichen | Bedeutung |
|---|---|
| **Spezielle Zahlen** | |
| $i$ | imaginäre Einheit ($i^2 = -1$) |
| $e$ | eulersche Zahl $e = 2{,}71828...$ |
| $\pi$ | Kreiszahl $\pi = 3{,}14159...$ |

| | |
|---|---|
| **Analysis** | |
| $f, g, ...$ | Funktionssymbol |
| $D_f$ | Definitionsbereich von f |
| $W_f$ | Wertebereich von f |
| $f(x), g(a)$ | Funktionswertsymbol |
| $(a_n)$ | Zahlenfolge (mit dem allgemeinen Glied $a_n$) |
| $\Delta x, \Delta y, ...$ | „Delta x“, „Delta y“, ... (Differenz zweier Werte) |
| $dy$ | Differenzial |
| $\frac{dy}{dx}$ | „dy nach dx“ (Differenzialquotient von f) |
| $\frac{d^2y}{dx^2}$ | „d zwei y nach dx Quadrat“ (zweiter Differenzialquotient von f) |
| $f'(x), f''(x), ..., f^{(4)}(x)$ | „f Strich“, „f zwei Strich“, ..., „f vier Strich von x“ (Ableitungen 1., ..., 4. Ordnung) |
| $\lim\limits_{x \to \ldots} \ldots$ | Limes von ... für x gegen ... (Grenzwert) |
| $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ | Summe aller $a_k$ für k gleich 1 bis n |
| $\int f(x)dx$ | (unbestimmtes) Integral (über) f(x) dx |
| $\int\limits_a^b f(x)dx$ | (bestimmtes) Integral von a bis b (über) f(x) dx |
| $F(x)\Big\vert_b^a$ | Stammfunktion F(x) von a bis b |

| Zeichen | Bedeutung |
|---|---|
| **Lineare Algebra** | |
| **A, B, …** | Matrix **A**, Matrix **B**, … |
| $\mathbf{A}^{-1}$ | inverse Matrix zu **A** |
| $\mathbf{A}^{T}$ | transponierte Matrix zu **A** |
| det **A**, $\lvert\mathbf{A}\rvert$ | Determinante von A |
| $\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}$ | Vektoren |
| $\lvert\vec{a}\rvert$ | Betrag von $\vec{a}$ |
| $\vec{a} \circ \vec{b}$ | Skalarprodukt von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ |
| $(\vec{a} \times \vec{b})$ | Vektorprodukt von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ |
| $\sphericalangle\ (\vec{a};\ \vec{b})$ | Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ |
| $\vec{a}^{\,0}$ | Einheitsvektor von $\vec{a}$ |

| Stochastik | |
|---|---|
| n! | n Fakultät |
| $\binom{n}{p}$ | n über p (Binomialkoeffizient) |
| $\Omega$ | Ergebnismenge |
| $\overline{A}$ | Gegenereignis (komplementäres Ereignis) zu A |
| $2^{\Omega}$ | Ereignisraum von $\Omega$ |
| $H_n(A)$ | absolute Häufigkeit von A |
| $h_n(A)$ | relative Häufigkeit von A |
| P(A) | Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A |
| $P_B(A)$ | bedingte Wahrscheinlichkeit von A unter der Bedingung B |
| EX | Erwartungswert der Zufallsgröße X |
| $D^2X$ | Streuung der Zufallsgröße X |
| $B_{n;p}$ | Binomialverteilung mit den Parametern n und p |

**Bildquellen (Abbildungen Umschlag innen)**
Bibliographisches Institut, Berlin (Fermatsche Vermutung, Mandelbrot, Euler, Gauß, ); Bibliographisches Institut, Berlin/Archiv Waldmann (Romanesco); Floramedia (Passionsblume); MEV Verlag, Augsburg (Basketball); NASA,ESA, S.Beckwith and The Hubble Heritage Team (Whirlpool-Galaxie); Öffentliche Bibliothek der Universität Basel (Euklid); picture-alliance/Bildarchiv Okapia (logarithmische Spirale, Symmetrie); picture-alliance/Bildarchiv Okapia/Richard Thom (Primzahlen); picture-alliance/akg-images (Minimalfläche); picture-alliance/dpa (Binomialverteilung, Hexagonal); picture-alliance/Keystone Schweiz (Hilbert); picture-alliance/Picture Press (Zufall)

**Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek**
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.dnb.de abrufbar.



**4., aktualisierte Auflage**

D C B A
Bibliographisches Institut GmbH, Mecklenburgische Straße 53, 14197 Berlin

*Redaktionelle Leitung* David Harvie
*Redaktion* Dr. Ulrich Kilian (redaktionsbüro science & more)
*Autoren* Prof. Dr. Karlheinz Weber, Michael Bornemann

*Herstellung* Uwe Pahnke
*Typografisches Konzept* Horst Bachmann
*Umschlaggestaltung* Büroecco, Augsburg
*Satz* Dr. Ulrich Kilian, Stefan Hergenröder (Elstersatz, Wildflecken)
*Druck und Bindung* Heenemann GmbH & Co. KG,
Bessemerstraße 83–91, 12103 Berlin
Printed in Germany

ISBN 978-3-411-70664-8
Auch als E-Book erhältlich unter: ISBN 978-3-411-91205-6

www.lernhelfer.de

# Mathematische Strukturen in Natur und Alltag

Die Whirlpoolgalaxie – eine fast perfekte Spirale.

Eine in der Tierwelt eher selten vorkommende Form der Symmetrie ist die fünfzählige Symmetrie des Seesterns.

Die Blumenkohlzüchtung *Romanesco* zeigt eine fraktale Struktur.

Hexagonale Strukturen wie Bienenwaben oder die Basaltsäulen von Giant's Causeway sind in der Natur ein besonders häufig anzutreffendes Muster.

Singzikaden der Gattung *Magicicada* sind Primzahl-spezialisten: Sie vermehren sich genau alle 13 oder 17 Jahre massenhaft.

Die Passionsblume weist eine komplexe Symmetrie auf.

Das Gehäuse des Nautilus wächst so, dass im Inneren eine fast perfekte logarithmische Spirale entsteht.

Die Dächer des Olympiastadions in München sind ein Beispiel für Minimalflächen in der Architektur. Solche Flächen haben zu einer gegebenen Randkurve den kleinsten Flächeninhalt und werden in der Mathematik im Rahmen der Differenzialgeometrie behandelt.

## Mathematik – Topthemen

DUDEN

**Die geniale Kombination für das erfolgreiche Abitur in Mathematik!**

Effektives Lernen mithilfe des „Schnell-Merk-Systems“

**und**

Gezieltes Prüfungstraining mit passenden Originalprüfungen

- Kompakt zusammengefasster Lernstoff
- Topthemen zur Vertiefung
- Extrakapitel mit Prüfungsratgeber
- Prüfungsfragen aus allen Anforderungsbereichen
- Originalprüfungen mit Lösungen zum Download für 1,– €

Angepasst auf Grund- und Leistungskursthemen.
Für alle Bundesländer geeignet.

ISBN 978-3-411-70664-8
9,99 € (D) · 10,30 € (A)

www.lernhelfer.de