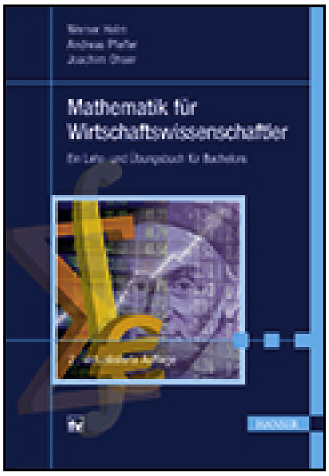
HANSER



Werner Helm, Andreas Pfeifer, Joachim Ohser

Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler

Ein Lehr- und Übungsbuch für Bachelors

ISBN (Buch): 978-3-446-44593-2

ISBN (E-Book): 978-3-446-44592-5

Weitere Informationen oder Bestellungen unter

http://www.hanser-fachbuch.de/978-3-446-44593-2

sowie im Buchhandel.

Vorwort

Der vorliegende Band richtet sich speziell an Studierende der Wirtschaftswissenschaften im weitesten Sinne, an Berufsakademien, Hochschulen oder Universitäten und ist geeignet als vorlesungsbegleitendes Lehr- und Übungsbuch, kann aber auch wegen der Vielzahl von Beispielen und Aufgaben zum Selbststudium verwendet werden.

Die Autoren sind sich dessen bewusst, dass Studierende der Volks- und Betriebswirtschaft, der Wirtschaftsinformatik oder des Wirtschaftsingenieurwesens sowie verwandter Disziplinen eine fachgerichtete Aufbereitung der Mathematik – auch der Grundlagen der Mathematik – erwarten. Daher sind grundlegende Begriffe der Mathematik wie z. B. der der Funktion von einer oder mehreren Variablen oder der Begriff des Differenzials aus Sicht des Wirtschaftswissenschaftlers dargestellt und mit fachspezifischen Beispielen versehen. Ausführlich dargestellt ist das Thema betriebswirtschaftliche Kostenfunktionen. Insofern ist dieser Band in sich abgeschlossen und kann auch als umfassendes Mathematik-Lehrbuch für Studierende der Wirtschaftswissenschaften dienen. Die Autoren lassen ihre jahrelange vielfältige Lehrerfahrung in dieses Buch einfließen. Vom Schwierigkeitsgrad zielt das Buch auf die Mitte: Da, wo in den Vorlesungen eine abstraktere Sicht auf die Mathematik betont wird, kann das Buch bei der unverzichtbaren praktischen Umsetzung helfen (Learning by Doing). An anderen Hochschulen mit einem geringen Stundenumfang in Mathematik kann das Buch als Universalreferenz dienen, deckt es doch einen sehr breiten Bereich an Inhalten ab, die auch für Lehrveranstaltungen relevant sind, die nicht die Bezeichnung Mathematik im Titel tragen, wie Kostenrechnung, Finanzierung oder Operations Research.

Das Vorgängerwerk *Lehr- und Übungsbuch MATHEMATIK in Wirtschaft und Finanzwesen* wurde gründlich überarbeitet, aktualisiert und an die Rahmenbedingungen der heutigen Bachelor-Studiengänge angepasst. Es bietet die **grundlegende Wirtschaftsmathematik komplett in einem Band**, geht an einigen Stellen leicht darüber hinaus und bildet Brücken aus zur praktischen Verwendung mathematischer Methoden auch in höheren Semestern. Ob Kostenfunktionen, Kundenwanderung, Lineare oder Nichtlineare Optimierung, Projektplanung oder Netzplantechnik – mit und ohne Computer – das Buch ist aus der Sicht der Nutzer und Anwender entwickelt, ohne dabei die mathematische Substanz zu opfern. Die kompakte und trotzdem vollständige Darstellung der klassischen Finanzmathematik vom Autor des in der fünften Auflage erschienenen Buches *Praktische Finanzmathematik* enthält zahlreiche Anwendungsbeispiele.

In den ersten fünf Kapiteln werden die Grundlagen der Mathematik für Volks- und Betriebswirte dargestellt und anhand von ökonomischen Problemen in einem praxisorientierten Zusammenhang erläutert. Dazu zählen Funktionen, Differenzial- und Integralrechnung und Lineare Algebra – Theorie eng verknüpft mit ökonomischen Anwendungen. Kapitel 6 enthält die Lineare Optimierung mit dem Simplex-Algorithmus. Kapitel 7 umfasst die gesamte Finanzmathematik von der Zinsrechnung bis zu den Abschreibungsarten auf aktuellem Stand und führt heran an die Begriffe *Rendite*, *Risiko*, *Call* und *Put*. In Kapitel 8 werden in knapper

Form weitere praktische Probleme und deren Lösungsmethoden dargestellt. Stichworte sind: Nichtlineare Programmierung, Optimierung eines Portfolios, Netzplantechnik (CPM, PERT) mit GANTT-Charts.

In allen Kapiteln enthalten sind viele praktische und zeitgemäße durchgerechnete Beispiele, die das Erlernen und Behalten der Begriffe wesentlich fördern. In vielen Fällen werden bei der Berechnung und Darstellung der Lösungen professionelle Softwaresysteme wie z. B. das System SAS verwendet. SAS gilt als die weltweit beste Analytics-Software, renommierte wie aufstrebende Fachbereiche *leisten* sich SAS. Damit wird eine Einführung in die Handhabung dieser auch in Wirtschaft und Industrie vielfach verwendeten Software gegeben. Das Buch enthält Hinweise auf Excel-Programme zur Finanzmathematik. Die zahlreichen Aufgaben, deren Lösungen am Ende des Buches zu finden sind, sollen dem Festigen der erworbenen Kenntnisse und natürlich auch der Prüfungsvorbereitung dienen.

Für die vorliegende 2. Auflage wurde der gesamte Text kritisch durchgesehen, Fehler wurden korrigiert, Ungenauigkeiten klargestellt und Anregungen von Studierenden eingearbeitet.

Autoren und Verlag hoffen, auch mit diesem Buch den Studierenden ein wertvolles Studienmaterial bereitzustellen. Hinweise, Erfahrungen und Anregungen seitens der Studierenden und der Lehrenden nehmen die Autoren und der Verlag gern entgegen.

Darmstadt, im Sommer 2015 — Die Autoren

Inhaltsverzeichnis

Für die Größen x und y einer Funktion (1.1b) werden folgende Namen synonym verwendet:

x **unabhängige Variable**, Urbildpunkt, **Argument**,
y **abhängige Variable**, Bildpunkt, **Funktionswert**.

Des Weiteren sind die Bezeichnungen Funktionsterm für $f(x)$ und Zuordnungsvorschrift oder Funktionsrelation für $y = f(x)$ gebräuchlich.

Hier werden nur reelle Funktionen betrachtet, und daher wird der Zusatz „reell“ künftig nicht angegeben.

Die Menge aller derjenigen Werte y, die sich für eine Funktion f aus ihrer Zuordnungsvorschrift $y = f(x)$ ergeben, wenn x den gesamten Definitionsbereich $D(f)$ durchläuft, wird **Wertebereich** genannt und mit $W(f)$ bezeichnet.

Zur Vorgabe einer Funktion gehören unbedingt die beiden Elemente „Zuordnungsvorschrift“ und „Definitionsbereich“ (siehe 1.1b) [1)]. Durch sie ist der Wertebereich eindeutig festgelegt, was jedoch nicht bedeutet, dass seine Ermittlung in jedem Falle elementar verläuft. Die Angabe des Definitionsbereiches einer Funktion ist besonders für angewandte Probleme von Bedeutung, weil die Ergebnisse wesentlich vom Definitionsbereich abhängen können.

BEISPIEL

1.2 Einfluss des Definitionsbereiches auf Eigenschaften von Funktionen

Die Funktion $y = f_1(x)$, $x \in [0, 10]$, mit $f_1(x) = (x - 3)^2 + 1$ hat wegen $(x - 3)^2 \geqq 0$ die Eigenschaft $f_1(x) \geqq 1$ für alle $x \in [0, 10]$. Dabei wird der kleinste Funktionswert für $x = 3$ angenommen: $f_1(3) = 1$.
Ändert man für f_1 den Definitionsbereich und betrachtet beispielsweise $y = f_2(x)$, $x \in [5, 10] = D(f_2)$, mit $f_2(x) = (x-3)^2 + 1$, so gilt hier $(x-3)^2 \geqq 2^2 = 4$ für alle $x \in D(f_2)$, und der kleinste Funktionswert wird für $x = 5$ angenommen:
$f_2(x) \geqq f_2(5) = 5$. ■

Aus den Argumenten x und den Funktionswerten y einer Funktion f können geordnete Wertepaare $(x; y)$ gebildet werden, bei denen immer x an erster und y an zweiter Stelle steht. Die Wertepaare $(x; y)$ lassen sich als Punkte in einem kartesischen Koordinatensystem darstellen. Die Gesamtheit aller Punkte $(x; y)$, die man erhält, wenn x alle Werte von $D(f)$ durchläuft, bildet den **Graphen** G_f der Funktion.

BEISPIEL

1.3 Darstellung von Funktionen mittels ihres Graphen

Der Graph der Funktion $y = 0{,}5x + 1$, $-3 \leqq x \leqq 6$, ist eine Strecke (s. *Bild 1.1*). Der Graph der Funktion $y = (x - 3)^2 + 1$, $0 \leqq x \leqq 5$, ist ein Parabelabschnitt (s. *Bild 1.2*).

[1)] Ausgenommen hiervon ist der Fall, dass die Funktion nur aus endlich vielen, aufgelisteten Wertepaaren $(x_i; y_i)$, $i = 1,2, \ldots n$, besteht.

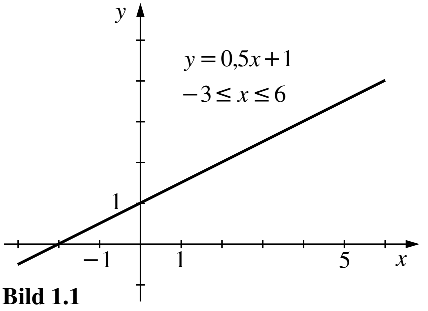


Bild 1.1

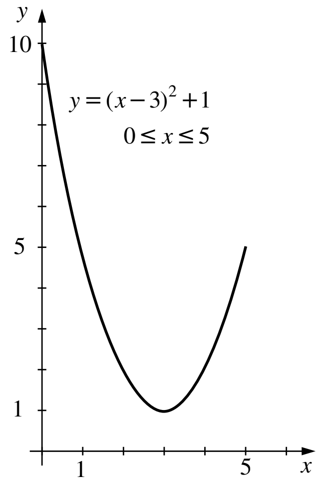


Bild 1.2 ■

Graphen von Funktionen können Strecken, Streckenzüge, Geraden, Kurven, Punktfolgen oder aus den genannten Elementen zusammengesetzt sein.

BEISPIEL

1.4 Punktfolgen und Streckenzüge als Graphen von Funktionen

Der Graph der Durchschnittskostenfunktion $k = k(P)$ aus *Tabelle 1.1* ist eine Punktfolge (s. *Bild 1.3*).

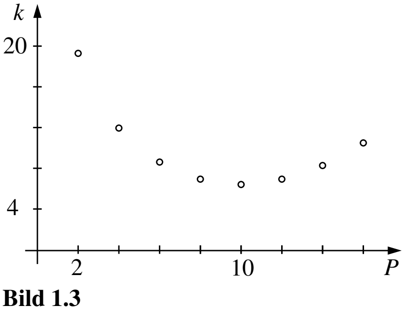


Bild 1.3

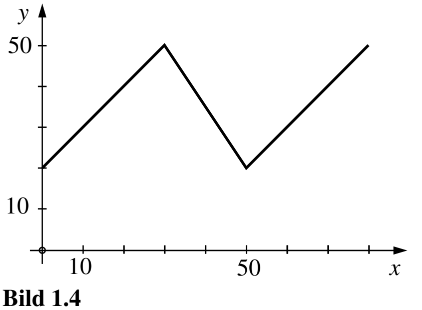


Bild 1.4

Bild 1.4 zeigt einen Streckenzug als Graphen. Er ist aus 3 Strecken zusammengesetzt. ■

Graphen von Funktionen besitzen eine charakteristische Eigenschaft: Jede Parallele zur vertikalen Achse des kartesischen Koordinatensystems schneidet den Graphen höchstens in einem Punkt. Ursache hierfür ist der Sachverhalt, dass jedem Argument x genau ein Funktionswert y zugeordnet ist. Man vergleiche hierzu die *Bilder 1.1* bis *1.4*. Deshalb muss durchaus nicht jede Kurve in einem kartesischen Koordinatensystem Graph einer Funktion sein. So stellen beispielsweise die Kurven in den *Bildern 1.5* und *1.6* keine Funktionen dar. Dagegen können

Die dargelegten Aussagen (2.99) und (2.100) spiegeln sich bei einer grafischen Darstellung von Gesamt-, Durchschnitts- und Grenzkosten wie folgt wider (vgl. *Bild 2.18*). Die Graphen von $K'(x)$ und $k(x)$ schneiden sich im Punkt $(x_D^*; k(x_D^*))$. Die Tangente an den Graphen von $K(x)$ im Punkt $(x_D^*; K(x_D^*))$ verläuft durch den Koordinatenursprung (vgl. mit (2.55) und *Bild 2.14* aus *Abschnitt 2.3*).

Die Bestimmungsgleichung für die Schwelle des Ertragsgesetzes lautet

$$K''(x_W) = 0. \tag{2.101}$$

Sie muss flankiert werden durch die hinreichenden Minimumbedingungen

$$K''(x) \begin{cases} < 0 & \text{für} \quad x_W - \delta < x < x_W \\ > 0 & \text{für} \quad x_W < x < x_W + \delta \end{cases}, \tag{2.102}$$

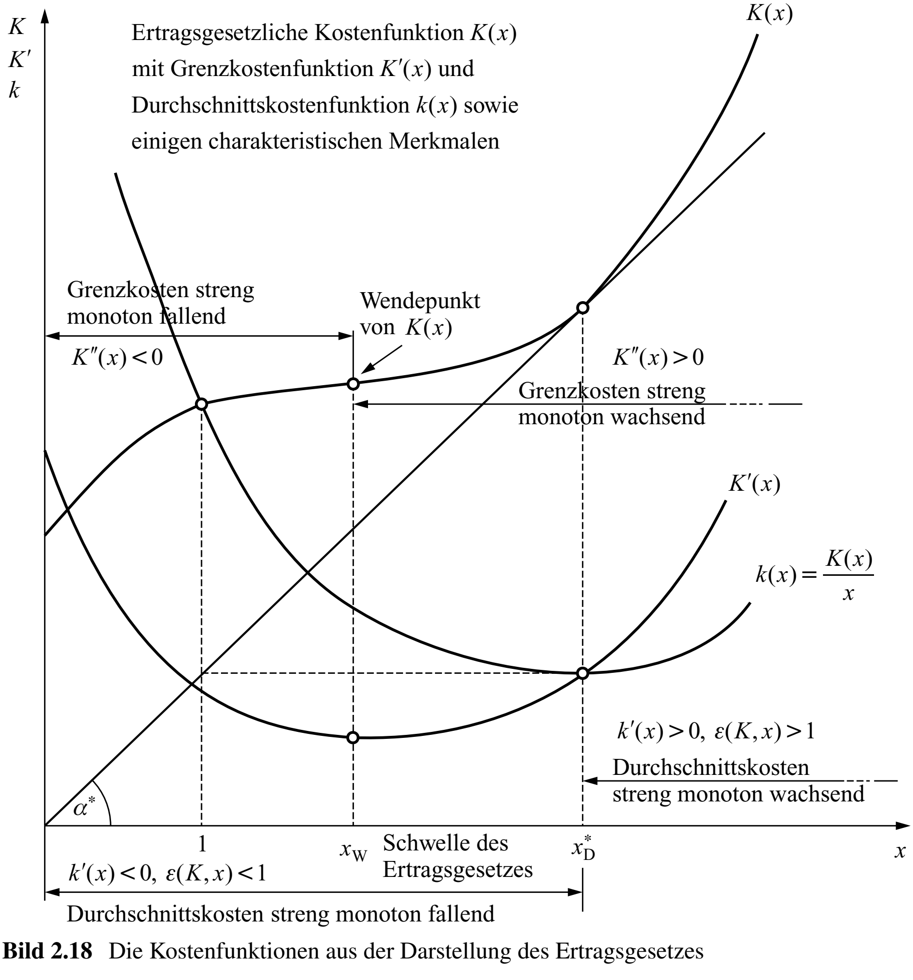


Bild 2.18 Die Kostenfunktionen aus der Darstellung des Ertragsgesetzes

wobei $\delta > 0$ eine hinreichend kleine positive Zahl ist. Damit wird klar, dass die Schwelle des Ertragsgesetzes mathematisch einen Wendepunkt der Kostenfunktion $K = K(x)$ darstellt. Die Schwelle x_W des Ertragsgesetzes trennt die anfängliche Rechtskrümmung von der nachfolgenden Linkskrümmung (vgl. *Bild 2.18*) des Graphen für $K = K(x)$.

Das *Bild 2.18* dient der *qualitativen* Darstellung der bisher erhaltenen Ergebnisse. Es ist ergänzt um die Aussagen $\varepsilon(K,x) < 1$ bzw. $\varepsilon(K,x) > 1$ für gewisse Intervalle. Ihr Nachweis beruht auf (2.97) (Einzelheiten siehe Aufgabe 2.42). Die im *Bild 2.18* gewählte Lage von x_W und x_D^* ist nicht zufällig. Es gilt nämlich die allgemeine **Aussage** (siehe Aufgabe 2.44):

> Für ertragsgesetzliche Kostenfunktionen ist die Schwelle x_W des Ertragsgesetzes immer kleiner als das Betriebsoptimum x_D^*
>
> $$x_W < x_D^*.$$

In der Kostentheorie hat es sich bewährt, eine bestimmte Klasse von Polynomen 3. Grades als ertragsgesetzliche Kostenfunktionen $K = K(x),\ 0 \leqq x_0 \leqq x \leqq x_1$, zu verwenden. Mit ihnen hat $K(x)$ die Darstellung

$$K(x) = a + bx - cx^2 + dx^3, \tag{2.103}$$

wobei $a, b, c, d > 0$ gewisse positive Zahlen sind, von denen b, c und d der Bedingung

$$c^2 < 3bd \tag{2.103a}$$

genügen müssen. Diese Bedingung garantiert, dass $K(x)$ streng monoton wächst (vgl. Aufgabe 2.43).

BEISPIEL

2.46 Minimum für Durchschnitts- und Grenzkosten (Betriebsoptimum und Schwelle des Ertragsgesetzes)

Gegeben ist die ertragsgesetzliche Kostenfunktion $K = K(x)$ mit

$$K(x) = 96 + 150x - 22{,}5x^2 + 1{,}5x^3, \quad 0 \leqq x \leqq 10,$$

wobei $K(x)$ die Gesamtkosten (in GE) in Abhängigkeit vom Output x (in ME) angibt.

a) Es ist die Funktion der Durchschnittskosten zu bilden und deren Minimum zu ermitteln.
b) Für $x = 6, 7, 8, 9$ und 10 sind die Elastizitäten $\varepsilon(K,x)$ zu berechnen, und die erhaltenen Werte sind in Relation zu *Bild 2.18* zu setzen.
c) Es sind die Grenzkosten sowie deren Minimum zu ermitteln.
d) Die Gesamtkosten sowie ihre Durchschnitts- und Grenzkosten sind unter Markierung charakteristischer Punkte und Intervalle darzustellen (vgl. *Bild 2.18*)!

Lösung:

a) Für die Durchschnittskosten ergibt sich die Darstellung

$$k(x) = \frac{96}{x} + 150 - 22{,}5x + 1{,}5x^2, \quad 0 < x \leqq 10.$$

Verwendet man (2.96) zur Bestimmung des Betriebsoptimums x_D^* (möglich wären auch (2.99) oder (2.100)), lautet die Bestimmungsgleichung für x_D^*

$$-\frac{96}{(x_D^*)^2} - 22{,}5 + 3x_D^* = 0.$$

Sie ist nichtlinear. Das NEWTON-Verfahren liefert $x_D^* = 8$.
Wegen $k''(x_D^*) = 192/(x_D^*)^3 + 3 > 0$ kann festgestellt werden: Die Durchschnittskosten nehmen für $x_D^* = 8$ ihren minimalen Wert $k^* = k(8) = 78$ GE/ME an, d. h., das Betriebsoptimum liegt beim Output $x = 8$ ME.

b) Wegen $K'(x) = 150 - 45x + 4{,}5x^2$ erhält man für die Elastizität die Darstellung

$$\varepsilon(K,x) = (150 - 45x + 4{,}5x^2)\frac{x}{96 + 150x - 22{,}5x^2 + 1{,}5x^3}.$$

Mit ihr sind die gesuchten Elastizitätswerte zu berechnen.

Tabelle der Elastizitätswerte

x	6	7	8	9	10
$\varepsilon(K,x)$	0,494	0,696	1	1,374	1,773

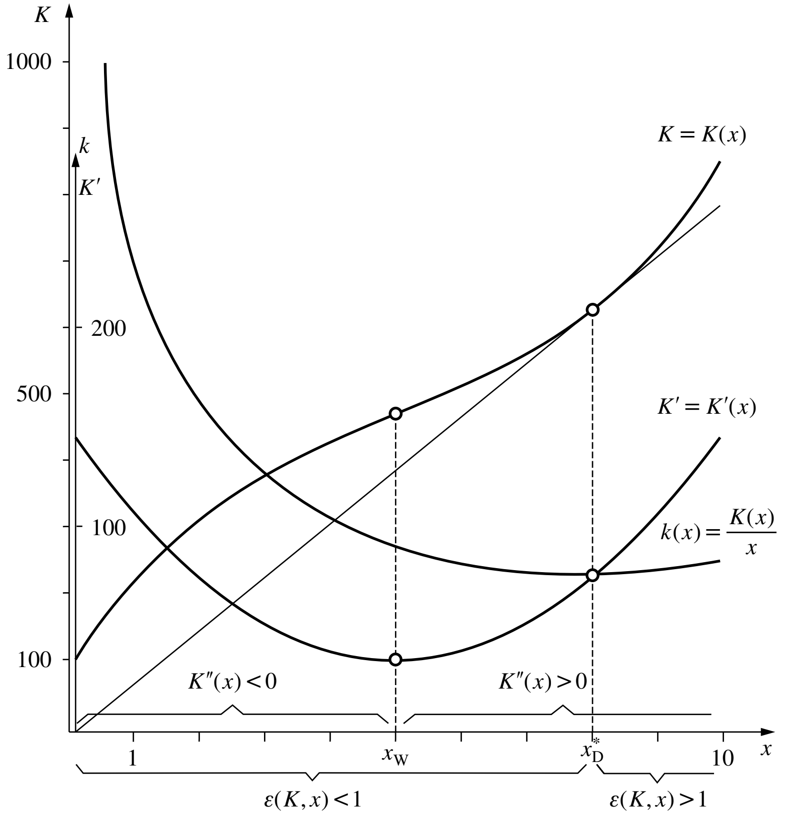


Bild 2.19 Kostenfunktionen und Elastizität

Startet man einen weiteren Versuch mit dem Pivotelement $\underline{a}_{31} = 2{,}75$, ausgehend von dem gerade berechneten Tableau, so erhält man die Lösung $\boldsymbol{x}_{\mathrm{E}} = (9{,}09, 6{,}73, 0, -6{,}36, 0)^{\mathrm{T}}$, nachdem man x_3 und x_5 gleich null gesetzt hat. Dies ist wohl eine Basislösung, aber keine zulässige, denn x_4 ist kleiner als null im Widerspruch zur Nichtnegativitätsbedingung. Es handelt sich hier um eine unzulässige kanonische Form des Problems.

Ein Versuch mit dem Pivotelement $\underline{a}_{21} = 1{,}25$, ebenfalls ausgehend von dem obigen Tableau, liefert dagegen:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z	RS
0	0	−4,80	−3,60	0	−1	−288
0	1	0,40	−0,20	0	0	8
1	0	−0,60	0,80	0	0	4
0	0	1,40	−2,20	1	0	14

Dieses Tableau stellt wieder eine zulässige kanonische Form des Problems dar: Wir setzen x_3 und x_4 gleich null und lesen eine neue Lösung ab: $\boldsymbol{x}_{\mathrm{E}} = (4, 8, 0, 0, 14)^{\mathrm{T}}$. Führen Sie die Probe durch!

Der zugehörige Wert der Zielfunktion ist 288 (-1 beachten!). Der Vergleich mit der grafischen Lösung zeigt uns, dass wir hier bereits die optimale Lösung des linearen Optimierungsproblems gefunden haben.

Wir könnten nun alle möglichen Kombinationen ausprobieren und zur Veranschaulichung die erhaltenen Lösungen in unsere grafische Lösung eintragen (Aufgabe 6.1).

Wir erkennen auf diesem Wege, dass offensichtlich alle Basislösungen mit Schnittpunkten von Restriktionsgeraden (einschl. der Koordinatenachsen) übereinstimmen und dass zulässige Basislösungen immer Eckpunkte des Lösungspolyeders sind. Dies ist allgemein so. Ein naheliegender Ansatz besteht darin, einfach *alle* Eckpunkte des Polyeders (sprich *alle* zulässigen Basislösungen) zu ermitteln. Derjenige Eckpunkt mit dem größten Zielfunktionswert löst dann die gestellte Optimierungsaufgabe. Wegen des enormen Rechenaufwandes ist dieser Ansatz aber nicht praktikabel. Denn bereits bei einem (kleinen) Problem in Standard-Maximum-Form mit $m = 50$ und $n = 50$ können wir auf

$$\binom{m+n}{n} = \binom{100}{50} \cong 10^{29}$$

verschiedene Arten n von $m + n$ Variablen herausgreifen und null setzen. Diese Formel verwendet die sogen. Binomialkoeffizienten. Also kann es bei diesem Problem bis zu 10^{29} unterschiedliche Basislösungen (Eckpunkte und andere Schnittpunkte) geben. An diesen riesigen Zahlen scheitern auch die schnellsten Computer. Es ist eine gewaltige Leistung, dass der Simplex-Algorithmus normalerweise nur ca. 75–150 Eckpunkte braucht, um bei einem solchen Problem eine optimale Lösung zu finden.

Bevor wir die Regeln des Simplex-Algorithmus formulieren, gehen wir zu einer etwas anderen Darstellungsform unseres Problems über, dem **Simplex-Tableau in Kurzform**.

Dieses ist unübertroffen gut zur schnellen manuellen Durchführung des Verfahrens geeignet und bietet sich auch als Visualisierungsinstrument über ein Makro an, welches am besten in einem Tabellenkalkulationssystem (z. B. MS-EXCEL) oder in einem Softwaresystem mit einer Matrixsprache (MATLAB, APL, GAUSS o. a.) realisiert wird.

Die bereits berechneten Langtableaus haben gezeigt, dass die z-Spalte immer unverändert bleibt und die Einheitsspalten nicht sehr viel Information liefern, eher das Ablesen der Lösung erschweren: Die Darstellung in dieser Form ist redundant. Kompakter und leichter lesbar ist das folgende Kurztableau. In diesem sind alle Einheitsspalten eliminiert, das Kernstück bildet die Koeffizientenmatrix $\boldsymbol{A}$, darüber steht die Zielfunktion ($-z$ beachten!), in der Kopfzeile stehen die zugehörigen Nichtbasisvariablen, in der linken Leiste die Basisvariablen genau in derjenigen Zeile, in der im Langtableau die zugehörige 1 stand, und rechts der negative Wert der Zielfunktion, $-z_0$, und die „rechte Seite“ des Problems, der Vektor $\boldsymbol{b}$.

Anfangs-Tableau:

	x_1	x_2	RS
$-z$	12	30	0
x_3	1	4	36
x_4	2	3	32
x_5	3	1	34

BV: x_3, x_4, x_5, NBV: x_1, x_2, BL: $(0, 0, 36, 32, 34)^{\mathrm{T}}$, $z = 0$

Zwischen-Tableau:

	x_1	x_3	RS
$-z$	4,50	−7,50	−270
x_2	0,25	0,25	9
x_4	1,25	−0,75	5
x_5	2,75	−0,25	25

BV: x_2, x_4, x_5, NBV: x_1, x_3, BL: $(0, 9, 0, 5, 25)^{\mathrm{T}}$, $z = 270$

Optimal-Tableau:

	x_4	x_3	RS
$-z$	−3,6	−4,8	−288
x_2	−0,2	0,4	8
x_1	0,8	−0,6	4
x_5	−2,2	1,4	14

BV: x_2, x_1, x_5, NBV: x_4, x_3, BL: $(4, 8, 0, 0, 14)^{\mathrm{T}}$, $z = 288$

Bei dieser Darstellung sind die jeweiligen Werte der BV sehr einfach abzulesen. Der durchgeführte Austausch-Schritt muss hierbei aber durch einen entsprechenden Platztausch dokumentiert werden ($x_2 \leftrightarrow x_3$ im ersten, $x_1 \leftrightarrow x_4$ im zweiten Schritt).

Für die Rechnung im Kurztableau empfiehlt sich die folgende schematische Vorgehensweise, die leicht zu lernen und zu üben ist.

7.1 Zinsrechnung

7.1.1 Einfache Zinsen und Zinseszinsen

Der **Zins** ist der Preis für die Überlassung von Geld oder Kapital. (7.1)

Wird Kapital auf Zeit angelegt und erhalten Sie beispielsweise 5 % Zinsen, wird 5 **Zinsfuß** genannt und allgemein mit p bezeichnet. $i = p/100$, also in diesem Beispiel $0{,}05 = 5\,\%$ heißt **Zinssatz**. Die Angabe des Zinssatzes bzw. des Zinsfußes ist grundsätzlich auf ein Jahr bezogen: 5 % **p. a.** (lat. per annum; pro Jahr). Die Angabe p. a. wird jedoch oft weggelassen.

Zinsen werden proportional auf den angelegten Betrag, das sogenannte **Kapital**, gezahlt. Das **Anfangskapital** wird meist mit K_0 bezeichnet. Gesucht ist das Kapital einschließlich Zinsen nach einem Jahr, nach zwei Jahren oder allgemein nach t Jahren, also K_t. Um dieses Kapital zu ermitteln, gibt es verschiedene Methoden. Bei **einfachen Zinsen** werden die Zinsen nicht mitverzinst. Von **Zinseszinsen** spricht man, wenn Zinsen auf nicht ausgezahlte Zinsen berechnet werden. Zinsen werden dabei dem Kapital hinzugefügt (= kapitalisiert) und dann mit diesem verzinst. Die Zeitpunkte, an denen die Zinsen zum Kapital hinzugerechnet und mitverzinst werden, heißen **Zinskapitalisierungszeitpunkte**.

Einfache Zinsen

BEISPIEL

7.2 Sie legen 400 € an. Bei $i = 5\,\%$ und einfachen Zinsen erhalten Sie jährlich 20 € (= 400 € · 0,05) Zinsen. Das Kapital nach einem Jahr beträgt somit 420 €. Das Kapital nach vier Jahren, bezeichnet mit K_4, ist 480 €. ■

Bei einfachen Zinsen sind die Zinsen für jedes Jahr gleich hoch, nämlich $K_0 \cdot i$. Nach einem Jahr ist somit das Kapital mit Zinsen angewachsen auf: $K_1 = K_0(1+i)$. Nach zwei Jahren auf: $K_2 = K_0(1 + 2i)$. Deshalb gilt

Das Kapital K_0 wächst bei einem Zinssatz von i bei **einfachen Zinsen** in t Jahren auf

$$K_t = K_0(1 + t\,i). \tag{7.2}$$

K_0 **Anfangskapital**, auch **Barwert** genannt
K_t **Endkapital** (Kapital nach t Jahren), auch **Endwert** genannt
i **Zinssatz**
t **Laufzeit** (in Jahren)

BEISPIELE

7.3 Ein Betrag von 200 € wird mit einem Zinssatz von 4 % verzinst. Das Kapital ist dann nach zwei Jahren bei einfachen Zinsen auf 216 € angewachsen, denn mit $K_0 = 200$; $i = 0{,}04$; $t = 2$ ergibt sich:

$K_2 = 200(1 + 2 \cdot 0{,}04) = 216.$

7.4 Wenn Sie nach acht Jahren bei 6 % einfachen Zinsen ein Kapital von 1.000 € besitzen, wie hoch ist das Kapital zu Beginn, d. h., wie hoch ist der Barwert?

Lösung: Mit $K_8 = 1.000$, $i = 0{,}06$ und $t = 8$ ergibt sich

$$K_0 = \frac{K_t}{(1 + ti)} = \frac{1.000}{(1 + 8 \cdot 0{,}06)} = 675{,}68. \qquad \blacksquare$$

Die Formel (7.2) für einfache Zinsen wird selten für Laufzeiten (t) größer als ein Jahr verwendet. Meist wird sie angewandt, wenn t ein Bruchteil eines Jahres ist. Beispielsweise wird für eine Verzinsungsdauer von einem halben Jahr $t = \frac{1}{2}$ eingesetzt. Die Laufzeit muss also keine ganze Zahl sein. In der Praxis werden die Zinsen bei Laufzeiten, die kleiner als ein Jahr sind, nach Tagen berechnet. Die Laufzeit t wird folgendermaßen ermittelt:

$$t = \frac{\text{Zinstage}}{\text{Basistage}} \tag{7.3}$$

Dabei hängt die Berechnung der Zinstage und der Basistage (= Jahreslänge in Tagen) von der gewählten Berechnungsmethode ab. Folgende Berechnungsmethoden (Usancen) sind gebräuchlich:

A: 30 E/360
B: 30/360
C: tatsächliche Laufzeittage/365 (auch englische Usance genannt)
D: tatsächliche Laufzeittage/360 (auch internationale Usance genannt)
E: tatsächliche Laufzeittage/tatsächliche Jahreslänge in Tagen (auch actual/actual oder kalendergenau/kalendergenau genannt).

Bei der Berechnungsmethode A (Methode 30 E/360) wird unabhängig von der tatsächlichen Länge der Monat immer mit 30 Tagen und das Jahr mit 360 Tagen angesetzt. Bei Monaten mit 31 Tagen ist der 31. kein Zinstag.

Viele Taschenrechner und EDV-Programme rechnen jedoch, wenn der 31. der Endtag ist, als wäre das Enddatum der 1. des Folgemonats. Dies ist die Methode 30/360.

Bei der Berechnungsmethode C kommt bei der Ermittlung der Laufzeittage die exakte kalendarische Laufzeit zur Anwendung. Die Basistage betragen 365.

Bei der Methode D hat eine kalendergenaue Tagezählung bei 360 Basistagen zu erfolgen.

Bei der Berechnungsmethode E werden sowohl die Laufzeittage als auch das zugrunde gelegte Basisjahr mit kalendergenauen Werten berücksichtigt.

Je nachdem, welche Berechnungsmethode angewandt wird, können die Zinsbeträge unterschiedlich sein.

BEISPIELE

7.5 Bei Sparbüchern und Sparkonten wird im Verlauf eines Kalenderjahres in Deutschland die Formel für einfache Zinsen meist mit der Berechnungsmethode A verwendet. Sie legen ihr Geld vom 1.7.2011 bis zum 1.8.2011 – also den ganzen Juli – an. Das sind

BEISPIEL

7.37 Sie zahlen zehn Jahre lang jedes Jahr 100 € auf ein Sparkonto. Ein anderes Beispiel: Sie heben zwei Jahre lang von ihrem Sparkonto jeden Monat genau 50 € ab. Beide Beispiele sind Zeitrenten. Der Begriff Rente wird immer für regelmäßige Zahlungen verwendet, unabhängig davon, ob es sich um Ein- oder Auszahlungen handelt.
Ein Beispiel für eine Leibrente sind die Zahlungen aus der gesetzlichen Rentenversicherung. Wie viele Jahre die Zahlungen aus dieser Rente geleistet werden, steht nämlich im Vorhinein nicht fest. ■

Es wird nun ermittelt, zu welchem Kapital – dem **Rentenendwert** – die jährlichen Zahlungen bei einer Rente führen. Dazu müssen alle Zahlungen auf den Endzeitpunkt aufgezinst werden. Der **Rentenbarwert** oder Gegenwartswert bezieht sich auf den Wert zum heutigen Zeitpunkt.

Bei einer nachschüssigen Rente wird die erste Rate ein Jahr nach dem Bezugszeitpunkt des Barwertes und die letzte Rate genau am Bezugszeitpunkt des Rentenendwertes geleistet, vgl. *Bild 7.3*.

Um den Rentenendwert zu berechnen, ist das Folgende zu beachten: Die erste Rate r wird $n-1$ Jahre verzinst, die zweite Rate noch $n-2$ Jahre. Die letzte Rate wird am Ende der Laufzeit eingezahlt, also nicht mehr verzinst.

Deshalb gilt für den Rentenendwert: $R_n = rq^{n-1} + rq^{n-2} \ldots + rq^0$.

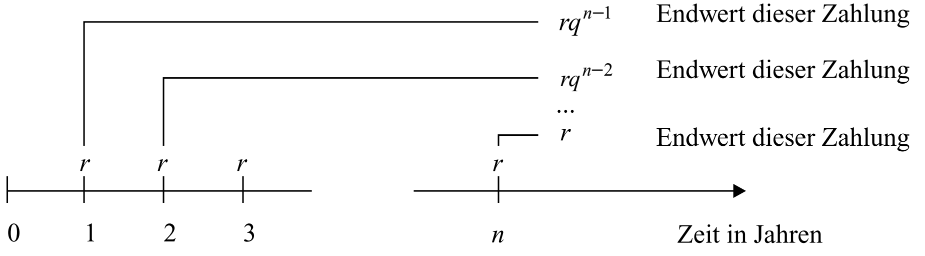


Bild 7.3 Zahlungen der Höhe r bei einer nachschüssigen Rente

Fassen Sie diese Summanden (geometrische Summe) zusammen, erhalten Sie

$$R_n = r\frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Der Rentenbarwert ergibt sich durch Diskontierung um n Jahre. Die Laufzeiten ergeben sich nach Auflösung der Formeln für den Rentenendwert bzw. den Rentenbarwert nach der Unbekannten n. Insgesamt erhalten Sie somit

Welche der beiden Anlagen ist die bessere? Der Erwartungswert der Rendite, also die mit den Wahrscheinlichkeiten gewichtete Rendite beträgt bei den Aktien

$$\begin{aligned} E(R_\mathrm{A}) &= 0{,}64 \cdot 10\,\% + 0{,}18 \cdot (-10\,\%) + 0{,}18 \cdot 30\,\% \\ &= 6{,}4\,\% - 1{,}8\,\% + 5{,}4\,\% = 10\,\%. \end{aligned}$$

Bei den Aktien sind also 10 % Rendite zu erwarten, bei der Festgeldanlage ist $E(R_\mathrm{F})$ nur 5 %. Im Schnitt ist die Anlage in Aktien günstiger. Aber – wie Sie sicherlich sofort erkennen – hat die Aktienanlage ein größeres Risiko. Das Risiko wird in der Finanzmathematik als Standardabweichung oder Wurzel aus der Varianz berechnet:

$$Var(R_\mathrm{A}) = 0{,}18(-10-10)^2 + 0{,}64(10-10)^2 + 0{,}18(30-10)^2 = 144.$$

Das Risiko bei der Aktienanlage ist die Wurzel aus 144, also $\text{Risiko}_\mathrm{A} = 12\,\%$.
Das Risiko bei der Festgeldanlage ist natürlich null: $\text{Risiko}_\mathrm{F} = 0\,\%$.
Welches die beste Anlage ist, kann nicht angegeben werden. Es hängt davon ab, wie risikobereit Sie sind. Vielleicht ist es auch günstig, eine Aufteilung des Anlagebetrages auf beide Anlagen zu tätigen. Eine solche Aufteilung, auch mit **Diversifikation** bezeichnet, ist sinnvoll, wenn nicht nur ausschließlich die Rendite oder ausschließlich das Risiko betrachtet wird. Die Auswahl, genannt **Portfolio-Selection**, und ihre Eigenschaften werden in Büchern über Wertpapieranalyse ausführlich beschrieben. Zum Abschluss nur noch ein Beispiel.

7.94 Gegeben seien folgende zwei Anlagemöglichkeiten: Möglichkeit A hat eine erwartete Rendite von $\mu_\mathrm{A} = 12\,\%$ bei einem erwarteten Risiko von $\sigma_\mathrm{A} = 25\,\%$. Anlage B bringt dagegen nur eine erwartete Rendite von $\mu_\mathrm{B} = 7\,\%$. Das Risiko ist aber mit $\sigma_\mathrm{B} = 4\,\%$ sehr niedrig. Die Korrelation zwischen den beiden Anlagen sei $r_\mathrm{AB} = -0{,}4$.
Tragen Sie die beiden Anlagemöglichkeiten in ein Risiko-Rendite-Diagramm ein, erhalten Sie die beiden mit Kreisen gekennzeichneten Punkte im *Bild 7.13*. Der Kreis links unten repräsentiert Anlage B, rechts oben Anlage A.

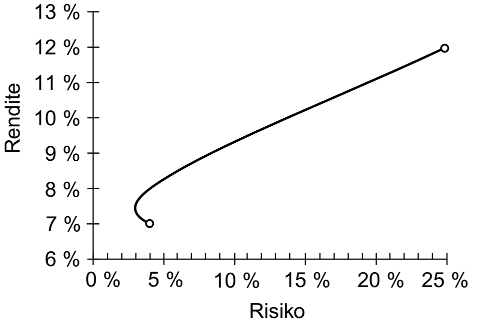


Bild 7.13 Risiko-Rendite-Diagramm für *Beispiel 7.94*

Auch für Anlagemischungen aus diesen beiden Anlagen können Sie die Rendite und das Risiko ausrechnen. Ist a der Anteil an Anlage A und $1-a$ der Anteil an Anlage B, gilt für den Erwartungswert und das Risiko der Rendite R_M der Anlagemischung:

$$\begin{aligned} E(R_\mathrm{M}) &= a \cdot \mu_\mathrm{A} + (1-a) \cdot \mu_\mathrm{B}, \\ \text{Risiko}(R_\mathrm{M}) &= \sqrt{a^2\sigma_\mathrm{A}^2 + (1-a)^2\sigma_\mathrm{B}^2 + 2a(1-a)r_\mathrm{AB}\sigma_\mathrm{A}\sigma_\mathrm{B}}. \end{aligned}$$

leichter erkennen zu können, weil in solchen Programmen keine Lücken zwischen den Ziffern gelassen werden können.

PRODUKTIONSPLANUNGS-BEISPIEL 6.1 3-7

L I N E A R P R O G R A M M I N G P R O C E D U R E

Variable Summary						
Col	Variable Name	Status	Type	Price	Activity	Reduced Cost
1	X1	BASIC	NON−NEG	12	4	0
2	X2	BASIC	NON−NEG	30	8	0
3	X3(Ma_1)		SLACK	0	0	−4.8
4	X4(Ma_2)		SLACK	0	0	−3.6
5	X5(Ma_3)	BASIC	SLACK	0	14	0

Constraint Summary						
Row	Constraint Name	Type	S/S Col	Rhs	Activity	Dual Activity
1	z(Ziel)	OBJECTVE	.	0	288	.
2	X3(Ma_1)	LE	3	36	36	4.8
3	X4(Ma_2)	LE	4	32	32	3.6
4	X5(Ma_3)	LE	5	34	20	0

Current Tableau			
	INV(B)*R	X3(Ma_1)	X4(Ma_2)
R_COSTS	.	−4.8	−3.6
X2	8	0.4	−0.2
X1	4	−0.6	0.8
X5(Ma_3)	14	1.4	−2.2
PHASE_1_	0	0	0
z(Ziel)	288	4.8	3.6

RHS Range Analysis						
Row	Minimum Phi			Maximum Phi		
	Rhs	Leaving	Objective	Rhs	Leaving	Objective
X3(Ma_1)	26	X5(Ma_3)	240	42.666667	X1	320
X4(Ma_2)	27	X1	270	38.363636	X5(Ma_3)	310.90909
X5(Ma_3)	20	X5(Ma_3)	288	INFINITY	.	.

Price Range Analysis							
Col	Variable Name	Minimum Phi			Maximum Phi		
		Price	Entering	Objective	Price	Entering	Objective
1	X1	7.5	X4(Ma_2)	270	20	X3(Ma_1)	320
2	X2	18	X3(Ma_1)	192	48	X4(Ma_2)	432
3	X3(Ma_1)	−INFINITY	.	288	4.8	X3(Ma_1)	288
4	X4(Ma_2)	−INFINITY	.	288	3.6	X4(Ma_2)	288
5	X5(Ma_3)	−3.428571	X3(Ma_1)	240	1.63636	X4(Ma_2)	310.909

Sachwortverzeichnis