2 Geschwindigkeit

Der mechanische Begriff *Geschwindigkeit* hängt mit dem mathematischen Begriff *Ableitung einer Vektorfunktion* zusammen. Aus diesem Grund beginnen wir dieses Kapitel mit einem mathematischen Exkurs, als Vorbereitung für die danach folgenden mechanischen Fragestellungen.

2.1 Vektorfunktion einer skalaren Variable

DEFINITION: Die Zuordnung von Vektoren $\underline{\mathbf{r}}$ zu allen reellen Zahlen t aus dem Intervall (t_1, t_2) heißt **Vektorfunktion der skalaren Variablen** $t \in (t_1, t_2)$. Der Vektor $\underline{\mathbf{r}}$ ist der Funktionswert, die Zahl t die unabhängige Variable.
Zur Bezeichnung der Funktion $t \mapsto \underline{\mathbf{r}}$ schreibt man $\underline{\mathbf{r}} = \underline{\mathbf{f}}(t)$ oder auch $\underline{\mathbf{r}} = \underline{\mathbf{r}}(t)$.

Grenzwerte: Für die Stetigkeit und Differenzierbarkeit von Vektorfunktionen $\underline{\mathbf{r}}$ gelten ähnliche Definitionen und Sätze wie für skalare Funktionen $t \mapsto x = f(t)$. Der Hauptunterschied besteht in der Verwendung des Betrags $|\underline{\mathbf{r}}| = |\underline{\mathbf{f}}(t)|$ an Stelle des Absolutwertes $|x| = |f(t)|$ als Kriterium bei den Definitionen von Grenzwerten, Stetigkeit und Differenzierbarkeit.

DEFINITION: Die **Ableitung** einer differenzierbaren Vektorfunktion ist

$$\dot{\underline{\mathbf{r}}} := \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\underline{\mathbf{r}}(t+\Delta t) - \underline{\mathbf{r}}(t)}{\Delta t} \quad .$$

DEFINITION: Das **Differential** einer differenzierbaren Vektorfunktion lautet

$$d\underline{\mathbf{r}} := \dot{\underline{\mathbf{r}}}\, dt \quad .$$

Es stellt die lineare Approximation der Differenz

$$\Delta\underline{\mathbf{r}} := \underline{\mathbf{r}}(t+\Delta t) - \underline{\mathbf{r}}(t)$$

gemäß

$$\Delta\underline{\mathbf{r}} = \dot{\underline{\mathbf{r}}}\, \Delta t + \underline{\mathbf{u}}(t,\Delta t)\, \Delta t$$

mit

$$\lim_{\Delta t \to 0} \left|\underline{\mathbf{u}}(t,\Delta t)\right| = 0$$

dar (siehe Fig. 2.1).
Für $\dot{\underline{\mathbf{r}}}$ wird auch die Notation

$$\frac{d\underline{\mathbf{r}}}{dt} := \dot{\underline{\mathbf{r}}}$$

M. Sayir, J. Dual, S. Kaufmann, E. Mazza, *Ingenieurmechanik 1*, DOI 10.1007/978-3-658-10047-6_2

verwendet, welche die unabhängige Variable t sichtbar macht.

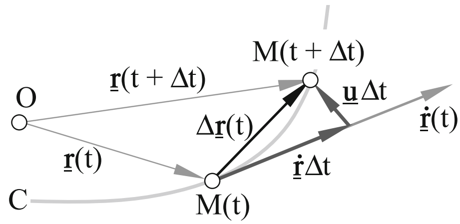

Fig. 2.1: Geometrische Interpretation der Ableitung und des Differentials

Verbindet man die Spitzen M der vom selben Punkt O ausgehenden Vektoren $\underline{\mathbf{OM}} =: \underline{\mathbf{r}}$ für alle Werte $t \in (t_1, t_2)$, so entsteht eine Kurve C (wenn $\underline{\mathbf{r}}$ Ortsvektor und t die Zeit ist, ergibt sich damit die Bahnkurve des materiellen Punktes M). Die Tangente an die Bahnkurve in M(t) ist als Grenzlage der Geraden durch die Punkte M(t + Δt) und M(t) für $\Delta t \to 0$ definiert. Der Vektor der Ableitung $\dot{\underline{\mathbf{r}}}(t)$ liegt also auf der Tangente in M(t).

Die verschiedenen Rechenregeln, die mit der Ableitung einer Vektorfunktion zusammenhängen, können durch ähnliche Überlegungen wie bei skalaren Funktionen bewiesen werden. Wir erwähnen speziell und ohne Beweis drei **Produktregeln** und eine **Kettenregel**.

Produktregeln: Zwei differenzierbare Vektorfunktionen $\underline{\mathbf{q}} = \underline{\mathbf{q}}(t)$ und $\underline{\mathbf{r}} = \underline{\mathbf{r}}(t)$ sowie eine differenzierbare skalare Funktion $s = s(t)$ für $t \in \overline{(t_1, t_2)}$ erfüllen die folgenden Produktregeln:

$$\begin{aligned}
&(s\,\underline{\mathbf{r}})^{\dot{}} = \dot{s}\,\underline{\mathbf{r}} + s\,\dot{\underline{\mathbf{r}}} \quad , \\
&(\underline{\mathbf{q}} \cdot \underline{\mathbf{r}})^{\dot{}} = \dot{\underline{\mathbf{q}}} \cdot \underline{\mathbf{r}} + \underline{\mathbf{q}} \cdot \dot{\underline{\mathbf{r}}} \quad , \\
&(\underline{\mathbf{q}} \times \underline{\mathbf{r}})^{\dot{}} = \dot{\underline{\mathbf{q}}} \times \underline{\mathbf{r}} + \underline{\mathbf{q}} \times \dot{\underline{\mathbf{r}}} \quad .
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Kettenregel: Die skalare Funktion $t \mapsto s(t)$ kann mit einer Vektorfunktion $s \mapsto \underline{\mathbf{r}}(s)$ verknüpft werden zu einer Vektorfunktion $t \mapsto \underline{\mathbf{r}}(t) = \underline{\mathbf{r}}(s(t))$. Dann gilt die Kettenregel

$$\frac{d\underline{\mathbf{r}}}{dt} = \frac{d\underline{\mathbf{r}}}{ds}\frac{ds}{dt} \quad . \tag{2.2}$$

2.2 Schnelligkeit und Geschwindigkeit

Ein materieller Punkt M bewege sich bezüglich Oxyz und beschreibe dabei eine Bahnkurve C. Man wähle auf dieser Kurve einen festen Punkt A und eine positive Richtung (Fig. 2.2). Der längs C gemessene Abstand $s := \overset{\frown}{AM}$, die **Bogenlänge**, bekommt ein positives oder negatives Vorzeichen, je nach der Stellung von M bezüglich A auf C. Damit kann s als *krummlinige Koordinate* von M auf der Bahnkurve C aufgefasst werden. Die Bewegung auf C sei durch die Funktion $t \mapsto s$ für $t \in (t_1, t_2)$ beschrieben. Die Ableitung

$$\dot{s} := \frac{ds}{dt} := \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$

heißt **Schnelligkeit** von M auf C.

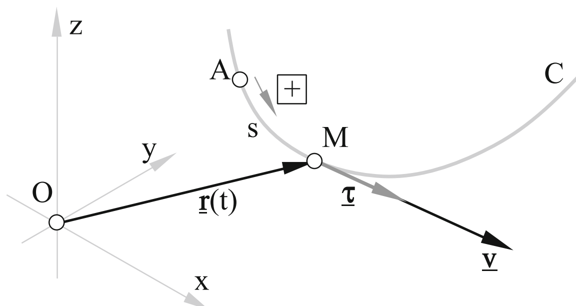

Fig. 2.2: Bogenlänge und Geschwindigkeit

Die Schnelligkeit hat die Dimension $[v] = [L\ T^{-1}]$ und wird im MKS-System in m/s gegeben. Wir werden selbstverständlich je nach Bedarf auch andere Einheiten wie km/h gebrauchen (1 m/s = 3.6 km/h).
Der Absolutwert $|\dot{s}|$ der Schnelligkeit zeigt, wie rasch sich der materielle Punkt auf seiner Bahnkurve bewegt; das Vorzeichen $\operatorname{sign}(\dot{s})$ ergibt den Richtungssinn der Bewegung. Es sei zum Beispiel

$$s(t) = s_0 \sin(2\pi\, t/T) \quad .$$

Der materielle Punkt besitzt demgemäß eine Anfangsschnelligkeit $\dot{s}(0) = 2\pi\, s_0/T$ und läuft für $t > 0$ in Richtung zunehmender s, erreicht die Amplitude $s = s_0$ für die Viertelperiode $t = T/4$ und fährt bei der halben Periode $t = T/2$ mit negativer Schnelligkeit wieder durch den Nullpunkt. Die Gestalt der Bahnkurve wird hier nicht näher beschrieben und kann aus der Darstellung der Bewegung mittels der Bogenlänge nicht hergeleitet werden.

Besitzt ein materieller Punkt zu jedem Zeitpunkt eine *konstante Schnelligkeit*, so heißt seine Bewegung **gleichförmig**. Die Bogenlänge ist dann eine lineare Funktion der Zeit von der Form $s = s_0 + \dot{s}\, t$. Ist zusätzlich die Bahnkurve C eine Gerade, so heißt die Bewegung **geradlinig gleichförmig**.

Die Schnelligkeit $\dot{s}$ ist eine skalare Größe und enthält deshalb keine Information über die Richtung der Bewegung bezüglich Oxyz. Diese Richtung kann durch die Tangente an die Bahnkurve in jedem Punkt definiert werden. Um eine Größe zu konstruieren, welche auch über die Richtung der Bewegung Auskunft gibt, führen wir in jedem Punkt der Bahnkurve den tangentialen Einheitsvektor $\underline{\boldsymbol{\tau}}$ in positiver Richtung der Bogenlänge s ein (Fig. 2.2). Dieser Einheitsvektor hat den konstanten Betrag 1, seine Richtung ist jedoch, mit Ausnahme der geradlinigen Bewegung, veränderlich. Er entspricht folglich einer Vektorfunktion der Zeit $t \mapsto \underline{\boldsymbol{\tau}}$. Wir definieren die **Geschwindigkeit** als Vektor $\underline{\mathbf{v}}$, dessen Betrag der Absolutwert der Schnelligkeit und dessen Richtung bei positiver Schnelligkeit jene von $\underline{\boldsymbol{\tau}}$ und bei negativer Schnelligkeit jene von $-\underline{\boldsymbol{\tau}}$ ist. Also verläuft die Geschwindigkeit in jedem Punkt tangential zur Bahnkurve und ergibt die Richtung der Bewegung. Wir schreiben demgemäß

$$\boxed{\underline{\mathbf{v}} := \dot{s}\,\underline{\boldsymbol{\tau}} \quad .} \tag{2.3}$$

2.3 Ortsvektor und Geschwindigkeit

Im Folgenden suchen wir eine Verbindung zwischen der soeben definierten Geschwindigkeit und der vektoriellen Darstellung der Bewegung $\underline{\mathbf{r}} = \underline{\mathbf{r}}(t)$.

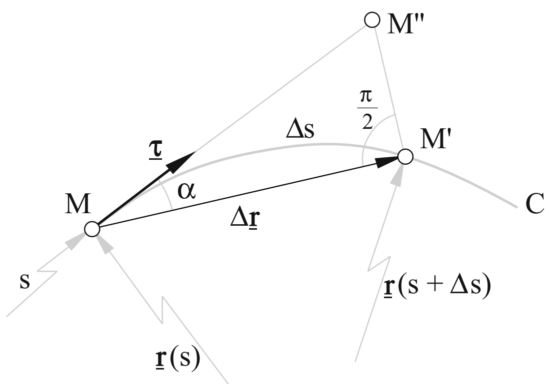

Fig. 2.3: Zum Beweis von $\underline{\boldsymbol{\tau}} = \dfrac{d\underline{\mathbf{r}}}{ds}$

Auf einer glatten Kurve C seien zwei Punkte M und M' gegeben (Fig. 2.3). Die längs C gemessene krummlinige Strecke $\overset{\frown}{MM'}$ soll als $s(M') - s(M) =: \Delta s$, die Differenz der Ortsvektoren als $\underline{\mathbf{r}}(M') - \underline{\mathbf{r}}(M) =: \Delta\underline{\mathbf{r}}$ bezeichnet werden. Der Betrag $|\Delta\underline{\mathbf{r}}|$ entspricht der Länge $\overline{MM'}$ der Sehne von M zu M'. Fasst man den Ortsvektor $\underline{\mathbf{r}}$ als Vektorfunktion der Bogenlänge $s \mapsto \underline{\mathbf{r}}$ auf und lässt M' gegen M streben, so kann man beweisen, dass

$$\frac{d\underline{\mathbf{r}}}{ds} := \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \underline{\mathbf{r}}}{\Delta s} = \underline{\boldsymbol{\tau}} \tag{2.4}$$

ist, dass also die Ableitung des Ortsvektors nach s den tangentialen Einheitsvektor ergibt.

Gemäß Kettenregel (2.2) ist der Ableitungsvektor $d\underline{\mathbf{r}}/ds$ in M parallel zu $d\underline{\mathbf{r}}/dt$, und dieser Vektor ist gemäß Fig. 2.1 parallel zu $\underline{\boldsymbol{\tau}}$. Dass er auch ein Einheitsvektor ist, beweist zum Beispiel das folgende geometrische Argument: Man betrachtet die Bahnkurve zwischen dem Punkt M mit Ortsvektor $\underline{\mathbf{r}}(s)$ und dem Punkt M' mit Ortsvektor $\underline{\mathbf{r}}(s + \Delta s)$. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann Δs als positiv vorausgesetzt und auf der glatten Kurve so klein gewählt werden, dass zwischen M und M' keine Wendepunkte liegen. Dann konstruiert man das rechtwinkelige Dreieck MM'M" mit dem rechten Winkel in M' und mit der Ecke M" auf der Tangente in M (Fig. 2.3). Der Winkel $\sphericalangle(M'MM'') =: \alpha$ strebt gegen null, wenn $M' \to M$ bzw. $\Delta s \to 0$ wird, und es gilt

$$\overline{MM'} = |\Delta\underline{\mathbf{r}}| \le \Delta s = \widehat{MM'} \le \overline{MM''} + \overline{M''M'} = |\Delta\underline{\mathbf{r}}|\left[(\cos\alpha)^{-1} + \tan\alpha\right]$$

oder

$$1 \le \frac{\Delta s}{|\Delta\underline{\mathbf{r}}|} \le \frac{1}{\cos\alpha} + \tan\alpha \quad .$$

Beim Grenzübergang $\Delta s \to 0$ erreicht man auch $\alpha \to 0$ und

$$1 \le \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta s}{|\Delta\underline{\mathbf{r}}|} \le 1$$

d. h.

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{|\Delta\underline{\mathbf{r}}|}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \to 0} \left|\frac{\Delta\underline{\mathbf{r}}}{\Delta s}\right| = \left|\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\underline{\mathbf{r}}}{\Delta s}\right| = \left|\frac{d\underline{\mathbf{r}}}{ds}\right| = 1 \quad .$$

Daraus folgt, dass der tangentiale Vektor $d\underline{\mathbf{r}}/ds$ den Betrag 1 hat und somit mit dem tangentialen Einheitsvektor $\underline{\boldsymbol{\tau}}$ identisch ist.

Aus der Kettenregel (2.2), der Definition (2.3) und der Beziehung (2.4) folgt durch Einsetzen

$$\boxed{\underline{\mathbf{v}} = \dot{\underline{\mathbf{r}}} \quad .} \tag{2.5}$$

Die Geschwindigkeit ist demzufolge die zeitliche Ableitung des Ortsvektors. Aus dieser Aussage, (2.4) und (2.2) folgt umgekehrt der Ausdruck (2.3). Somit kann eine der beiden Beziehungen (2.3) und (2.5) wahlweise als Definition der Geschwindigkeit, die andere als Folgerung aufgefasst werden.

2.4 Komponenten der Geschwindigkeit

Um die vektoriell definierte Geschwindigkeit $\underline{v}$ mit der Koordinatendarstellung der Bewegung gemäß Kapitel 1 zu verknüpfen, zerlegt man am einfachsten das Differential $d\underline{r}$ des Ortsvektors längs der Koordinatenlinien des jeweils gewählten Koordinatensatzes, also längs der Einheitsvektoren der zugehörigen Basis. Beispielsweise bei *zylindrischen Koordinaten* setzt sich das Differential des Ortsvektors gemäß Fig. 1.10 aus dem Differential $d\rho$ längs der radialen Koordinatenlinie, dem Differential $\rho\, d\varphi$ (φ im Bogenmaß) längs der kreisförmigen azimutalen Koordinatenlinie und dem Differential dz längs der vertikalen Koordinatenlinie zusammen. Mit den zugehörigen Einheitsvektoren der zylindrischen Basis gemäß Fig. 1.17 multipliziert und addiert ergeben diese Komponenten

$$d\underline{r} = d\rho\, \underline{e}_\rho + \rho\, d\varphi\, \underline{e}_\varphi + dz\, \underline{e}_z \quad . \tag{2.6}$$

Aus der Definition des Differentials von Abschnitt 2.1 und aus (2.5) folgt dann die Geschwindigkeit in zylindrischen Komponenten

$$\underline{v} := \dot{\underline{r}} = \dot{\rho}\, \underline{e}_\rho + \rho\, \dot{\varphi}\, \underline{e}_\varphi + \dot{z}\, \underline{e}_z \quad . \tag{2.7}$$

Diese *geometrische Herleitung* ist eine Methode zur Bestimmung der Komponenten des Geschwindigkeitsvektors bezüglich einer gewünschten Basis. Ein alternativer Weg ist die *formale Ableitung* des zerlegten Ortsvektors $\underline{r}$ gemäß den Produkt- und Kettenregeln (2.1) und (2.2). Diesen beschreiten wir nun für die drei in Kapitel 1 besprochenen Basissysteme und überlassen es dem Leser, die Resultate für kartesische und sphärische Komponenten auch noch mit geometrischen Überlegungen, analog zu (2.6) und (2.7), herzuleiten.

a) ***Kartesische Komponenten der Geschwindigkeit***

Ortsvektor: $\underline{r}(t) = x(t)\, \underline{e}_x + y(t)\, \underline{e}_y + z(t)\, \underline{e}_z \quad ,$
Ableitung: $\dot{\underline{r}} = \dot{x}\, \underline{e}_x + \dot{y}\, \underline{e}_y + \dot{z}\, \underline{e}_z \quad .$

Bei der Anwendung der Produktregeln (2.1) wurde hier beachtet, dass die Einheitsvektoren der kartesischen Basis zeitlich konstant sind, d. h. $\dot{\underline{e}}_x = \dot{\underline{e}}_y = \dot{\underline{e}}_z = \underline{0}$. Damit ergibt sich also

$$\boxed{\underline{v} = \dot{x}\, \underline{e}_x + \dot{y}\, \underline{e}_y + \dot{z}\, \underline{e}_z \quad .} \tag{2.8}$$

Beispiel: Bei der in Abschnitt 1.2 besprochenen Bewegung in kartesischen Koordinaten beträgt der Geschwindigkeitsvektor

$$\underline{v} = -9\pi \sin(3\pi t)\, \underline{e}_x - 12\pi \sin(3\pi t)\, \underline{e}_y + 3\pi \cos(3\pi t)\, \underline{e}_z \quad .$$

Er ist zu jeder Zeit und in jeder Lage der Stabspitze M zur elliptischen Bahnkurve tangential. Insbesondere in den Lagen x = 0, y = 0, z = ±1 mit t = 1/6, 1/2, 5/6 s ist er horizontal und in den Lagen x = ±3, y = ±4, z = 0 mit t = 0, 1/3, 2/3, 1 s vertikal ($\dot{x} = \dot{y} = 0$).

Die Bogenlänge auf der Bahnkurve werde in Richtung der Bewegung positiv gemessen. Dann kann der tangentiale Einheitsvektor $\underline{\tau}$ in kartesischen Komponenten aus

$$\underline{\tau} = \frac{\underline{v}}{|\underline{v}|}$$

ermittelt werden. Die Schnelligkeit ist

$$\dot{s} = |\underline{v}| = \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right)^{1/2} = 3\,\pi\,\sqrt{1 + 24[\sin(3\,\pi\,t)]^2}\ \text{cm/s} \quad .$$

b) ***Zylindrische Komponenten der Geschwindigkeit***

Ortsvektor: $\underline{r}(t) = \rho(t)\,\underline{e}_\rho\big(\varphi(t)\big) + z(t)\,\underline{e}_z \quad ,$
Ableitung: $\underline{\dot{r}} = \dot{\rho}\,\underline{e}_\rho + \rho\,\underline{\dot{e}}_\rho + \dot{z}\,\underline{e}_z \quad .$

Der Einheitsvektor $\underline{e}_\rho$ ist trotz seines konstanten Betrages eine Funktion des Winkels $\varphi = \varphi(t)$ und damit der Zeit. Seine Ableitung beträgt (siehe (2.11))

$$\underline{\dot{e}}_\rho = \dot{\varphi}\,\underline{e}_\varphi \quad , \tag{2.9}$$

so dass sich die Geschwindigkeit in zylindrischen Komponenten als

$$\boxed{\underline{v} = \dot{\rho}\,\underline{e}_\rho + \rho\,\dot{\varphi}\,\underline{e}_\varphi + \dot{z}\,\underline{e}_z} \tag{2.10}$$

ergibt. Dieses Resultat ist identisch mit jenem von (2.7).

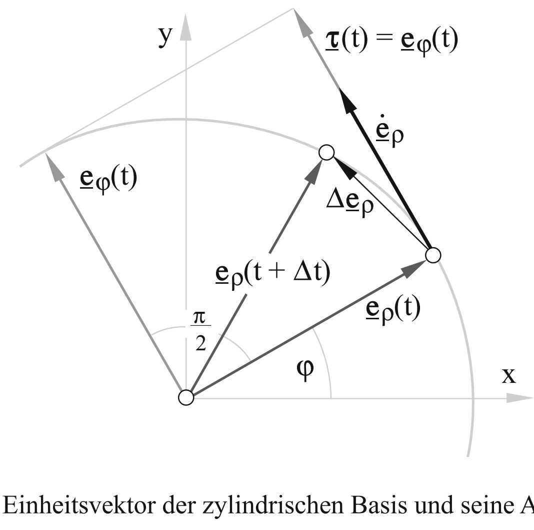

Fig. 2.4: Der radiale Einheitsvektor der zylindrischen Basis und seine Ableitung

Die Beziehung (2.9) kann mit Hilfe der kartesischen Komponenten von $\underline{e}_\rho$ und $\underline{e}_\varphi$ oder direkt geometrisch bewiesen werden. Die kartesischen Komponenten von $\underline{e}_\rho$ und $\underline{e}_\varphi$ sind (Fig. 2.4)

$$\underline{e}_\rho = \cos\varphi\,\underline{e}_x + \sin\varphi\,\underline{e}_y \quad , \quad \underline{e}_\varphi = -\sin\varphi\,\underline{e}_x + \cos\varphi\,\underline{e}_y \quad .$$

Bei der Berechnung von $\underline{\dot{e}}_\rho$ muss beachtet werden, dass φ eine Funktion der Zeit ist und deshalb z. B. bei der Ableitung von $\cos\varphi$ die Kettenregel (2.2) zur Anwendung kommt:

$$(\cos\varphi)^{\cdot} = (\cos\varphi(t))^{\cdot} = (-\sin\varphi(t))\,\dot{\varphi}(t) = (-\sin\varphi)\,\dot{\varphi} \quad .$$

So ergibt sich für die Ableitung $\underline{\dot{e}}_\rho$

$$\underline{\dot{e}}_\rho = (-\sin\varphi\,\underline{e}_x + \cos\varphi\,\underline{e}_y)\,\dot{\varphi} = \dot{\varphi}\,\underline{e}_\varphi \tag{2.11}$$

und analog dazu

$$\underline{\dot{e}}_\varphi = (-\cos\varphi\,\underline{e}_x - \sin\varphi\,\underline{e}_y)\,\dot{\varphi} = -\dot{\varphi}\,\underline{e}_\rho \quad .$$

Dasselbe Resultat kann auch aus der folgenden Überlegung hergeleitet werden: Zeichnet man während einer beliebigen Bewegung des betrachteten materiellen Punktes M den Einheitsvektor $\underline{e}_\rho$ zu allen Zeiten der Bewegung mit demselben Anfangspunkt, so beschreibt seine Spitze einen Kreisbogen des *Einheitskreises* mit dem Radius 1 (Fig. 2.4). Die Ableitung $\underline{\dot{e}}_\rho$ entspricht gemäß (2.5) der Geschwindigkeit dieser Spitze, denn $\underline{e}_\rho$ spielt hier die Rolle eines Ortsvektors. Die genannte Geschwindigkeit beträgt gemäß (2.3) allgemein $\underline{\dot{e}}_\rho = \dot{s}\,\underline{\tau}$. Der tangentiale Einheitsvektor $\underline{\tau}$ kann in diesem Fall mit $\underline{e}_\varphi$ und die Bogenlänge auf dem Einheitskreis mit $s = \varphi$ identifiziert werden. Hieraus folgt das Resultat (2.9).

Beispiel: Bei der in Abschnitt 1.3 besprochenen Bewegung des Elektrons in zylindrischen Koordinaten beträgt der Geschwindigkeitsvektor

$$\underline{v} = a\,\underline{e}_\rho + b\,(R_1 + a\,t)\,\underline{e}_\varphi + a\,\underline{e}_z \quad .$$

Er ist zu jeder Zeit und in jeder Lage M des Elektrons tangential zur Bahnkurve. Insbesondere ist am Anfang, zur Zeit $t_1 = 0$, die Geschwindigkeit

$$\underline{v}(t_1) = a\,\underline{e}_\rho + b\,R_1\,\underline{e}_\varphi + a\,\underline{e}_z \quad .$$

Zur Zeit $t_2 = (R_2 - R_1)/a$ trifft das Elektron die Anode mit der Geschwindigkeit

$$\underline{v}(t_2) = a\,\underline{e}_\rho + b\,R_2\,\underline{e}_\varphi + a\,\underline{e}_z \quad .$$

Der tangentiale Einheitsvektor $\underline{\tau}$ ergibt sich in der zylindrischen Basis als

$$\underline{\tau} = [2\,a^2 + b^2\,(R_1 + a\,t)^2]^{-1/2}\,[a\,\underline{e}_\rho + b\,(R_1 + a\,t)\,\underline{e}_\varphi + a\,\underline{e}_z] \quad ,$$

und die Schnelligkeit ist

$$\dot{s} = |\underline{v}| = \sqrt{2\,a^2 + b^2(R_1 + a\,t)^2} \quad .$$

Anwendung auf die Kreisbewegung

Bei der Kreisbewegung auf einem horizontalen Kreis mit dem Radius R gelten die Bewegungsgleichungen (Fig. 2.5)

$$\rho = R = \text{konstant} \quad , \quad \varphi = \varphi(t) \quad , \quad z = z_0 = \text{konstant} \quad .$$

Die Geschwindigkeit beträgt gemäß (2.10)

$$\underline{v} = R\,\dot{\varphi}\,\underline{e}_\varphi \quad .$$

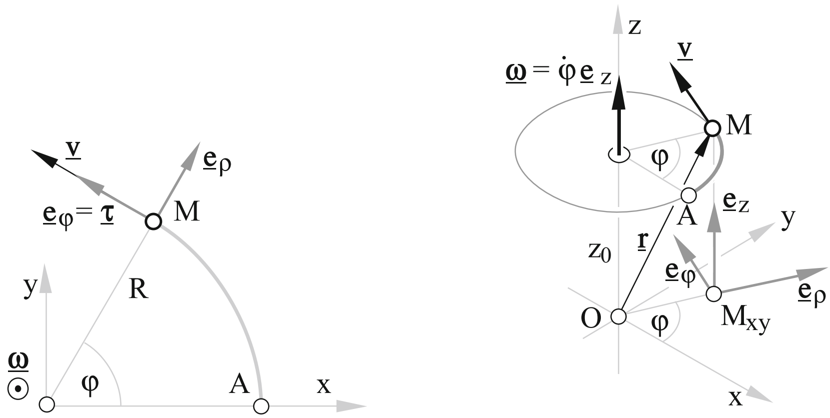

Fig. 2.5: Kreisbewegung und Winkelgeschwindigkeit

Die Schnelligkeit ist $\dot{s} = R\,\dot{\varphi}$ und der tangentiale Einheitsvektor $\underline{\tau} = \underline{e}_\varphi$. Die Größe $\dot{\varphi}$ heißt **Winkelschnelligkeit**.

Drückt man den Einheitsvektor $\underline{e}_\varphi$ mit Hilfe von (1.2) in Funktion von $\underline{e}_z$ und $\underline{e}_\rho$ aus, so erhält man

$$\underline{e}_\varphi = \underline{e}_z \times \underline{e}_\rho$$

und für die Geschwindigkeit

$$\underline{v} = R\,\dot{\varphi}\left(\underline{e}_z \times \underline{e}_\rho\right) = \dot{\varphi}\,\underline{e}_z \times R\,\underline{e}_\rho \quad .$$

Der zweite Vektor kann mit dem Ortsvektor $\underline{r} = R\,\underline{e}_\rho + z_0\,\underline{e}_z$ in Verbindung gebracht werden, so dass

$$\underline{v} = \dot{\varphi}\,\underline{e}_z \times \left(\underline{r} - z_0\,\underline{e}_z\right) = \dot{\varphi}\,\underline{e}_z \times \underline{r} - \dot{\varphi}\,\underline{e}_z \times z_0\,\underline{e}_z$$

ist. Da das Vektorprodukt zwischen parallelen Vektoren verschwindet, vereinfacht sich dieser Ausdruck zu

$$\underline{v} = \left(\dot{\varphi}\,\underline{e}_z\right) \times \underline{r} \quad .$$

Der Vektor $\dot{\varphi}\,\underline{e}_z$ soll **Winkelgeschwindigkeit** der *Kreisbewegung um die z-Achse* genannt und mit $\underline{\omega}$ bezeichnet werden, also

$$\boxed{\underline{\omega} := \dot{\varphi}\,\underline{e}_z \quad .} \tag{2.12}$$

Für die Geschwindigkeit ergibt sich

$$\boxed{\underline{v} = \underline{\omega} \times \underline{r} \quad .} \tag{2.13}$$

Man beachte, dass (2.13) unabhängig vom Koordinatensystem ist: Die Geschwindigkeit bei einer Kreisbewegung ergibt sich aus dem Vektorprodukt von $\underline{\omega}$ mit $\underline{r}$. Dabei steht $\underline{\omega}$ senkrecht auf der Ebene des Kreises, und $\underline{r}$ ist der Ortsvektor des betrachteten Punktes, ausgehend von einem Punkt auf der Achse durch den Mittelpunkt des Kreises und senkrecht zu seiner Ebene.

c) ***Sphärische Komponenten der Geschwindigkeit***

Ortsvektor: $\underline{r}(t) = r(t)\,\underline{e}_r\big(\theta(t), \psi(t)\big)$,
Ableitung: $\dot{\underline{r}} = \dot{r}\,\underline{e}_r + r\,\dot{\underline{e}}_r$.

Der Einheitsvektor $\underline{e}_r$ ist wegen seiner Richtungsabhängigkeit eine Funktion der beiden Winkel θ und ψ und damit der Zeit. Seine Ableitung beträgt

$$\dot{\underline{e}}_r = \dot{\theta}\,\underline{e}_\theta + \dot{\psi}\sin\theta\,\underline{e}_\psi \quad . \tag{2.14}$$

Der Leser möge diese Beziehung mit ähnlichen Überlegungen wie bei den zylindrischen Komponenten beweisen (siehe (2.9)).

Die Geschwindigkeit in sphärischen Komponenten lautet demzufolge

$$\boxed{\underline{v} = \dot{r}\,\underline{e}_r + r\,\dot{\theta}\,\underline{e}_\theta + r\sin\theta\,\dot{\psi}\,\underline{e}_\psi \quad .} \tag{2.15}$$

Beispiel: Bei der in Abschnitt 1.4 besprochenen Bewegung der Achsenspitze eines Kreisels (oder Kugelpendels) in sphärischen Koordinaten ergibt sich für den Geschwindigkeitsvektor

$$\underline{v} = R\,\theta_0\,\omega_1\cos(\omega_1 t)\,\underline{e}_\theta + R\,\omega_2\sin[\frac{\pi}{6} + \theta_0\sin(\omega_1 t)]\,\underline{e}_\psi \quad .$$

Er ist zu jeder Zeit und in jeder Lage zur Bahnkurve tangential. Insbesondere ist die Geschwindigkeit horizontal ($\dot{\theta} = 0$) in den Lagen

$$\theta = \frac{\pi}{6} \pm \theta_0 \quad , \quad \psi_k = \frac{2k+1}{2}\,\pi\,\frac{\omega_2}{\omega_1} \quad , \quad k = 1, 2, \ldots \quad ,$$

zu den Zeiten

$$t_k = \frac{2k+1}{2}\frac{\pi}{\omega_1} \quad .$$

Der tangentiale Einheitsvektor

$$\underline{\tau} = \frac{\underline{v}}{|\underline{v}|}$$

lässt sich mit Hilfe des oben angegebenen Ausdrucks für die Geschwindigkeit in sphärischer Basis ausdrücken. Für die Schnelligkeit erhält man

$$\dot{s} = |\underline{v}| = R\sqrt{[\theta_0\,\omega_1\cos(\omega_1 t)]^2 + \left\{\omega_2\sin\left[\frac{\pi}{6} + \theta_0\sin(\omega_1 t)\right]\right\}^2} \quad .$$

Aufgaben

1. Ein materieller Punkt M (Fig. 2.6) bewegt sich derart längs einer Geraden, dass er zur Zeit $t = 0$ in O ist, das Quadrat s^2 seiner Bogenlänge s der Zeit t proportional ist und die Strecke von A nach B in der Zeit T durchlaufen wird. Man stelle seine Bewegungsgleichung $s = f_s(t)$ in Funktion der gegebenen Größen T und L auf und bestimme die Zeiten, zu denen der materielle Punkt die Stellen A und B passiert sowie die Schnelligkeiten in diesen Punkten.

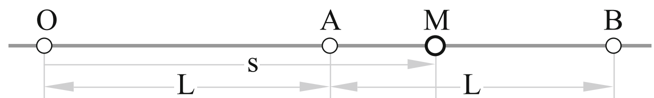

Fig. 2.6

2. Ein materieller Punkt besitzt die in s und m auszuwertenden Bewegungsgleichungen

$$x = 36 - t^2 \quad , \quad y = t^2 - 16 \quad , \quad z = t - 2 \quad .$$

Wann, wo, woher und mit welcher Geschwindigkeit tritt er in den Oktanten $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ ein? Wann, wo, wohin und mit welcher Geschwindigkeit tritt er aus ihm aus? Welchen Abstand hat er zur Zeit $t = 3$ s von O. Man diskutiere die Bahnkurve.

3. Man drücke die Bewegungsgleichungen des Elektrons, das im Beispiel des Abschnittes 1.3 betrachtet wurde, in *kartesischen* Koordinaten aus. Anschließend berechne man die Komponenten seiner Geschwindigkeit und des Einheitsvektors $\underline{\boldsymbol{\tau}}$ (tangential zur Bahnkurve) in *kartesischer Basis*.

http://www.springer.com/978-3-658-10046-9

Ingenieurmechanik 1
Grundlagen und Statik
Sayir, M.B.; Dual, J.; Kaufmann, S.; Mazza, E.
2015, XII, 220 S. 232 Abb. Mit 49 Aufgaben und zahlreichen Beispielen., Softcover
ISBN: 978-3-658-10046-9