

Die Mathematik, richtig betrachtet, besitzt nicht nur Wahrheit, sondern auch überragende Schönheit – eine kalte und nüchterne Schönheit wie die der Bildhauerei, ohne Reiz für irgendeinen Teil unserer schwächeren Natur, ohne die prächtigen Zutaten von Malerei oder Musik und doch völlig makellos und zu einer strengen Perfektion fähig, wie sie nur die größte Kunst erreichen kann. Die wahre Essenz der Freude, das Hochgefühl, die Empfindung, mehr als ein Mensch zu sein, die das Merkmal der höchsten Vollendung sind, sind in der Mathematik genauso sicher zu finden wie in der Dichtkunst.

BERTRAND RUSSELL (1872–1970), *The Study of Mathematics*

Viele mathematische Konzepte finden ihre Verkörperung in Diagrammen, Zeichnungen und anderen Arten von Bildern. Eine Skizze kann einen Satz verdeutlichen. Eine Grafik kann den Weg zu neuer Mathematik aufzeigen. Lassen Sie uns einige mathematische Bilder betrachten und mehr über die Mathematik erfahren, die dahintersteht.

2.1 Quadratische Pyramidalquadratzahl

Die Gleichung

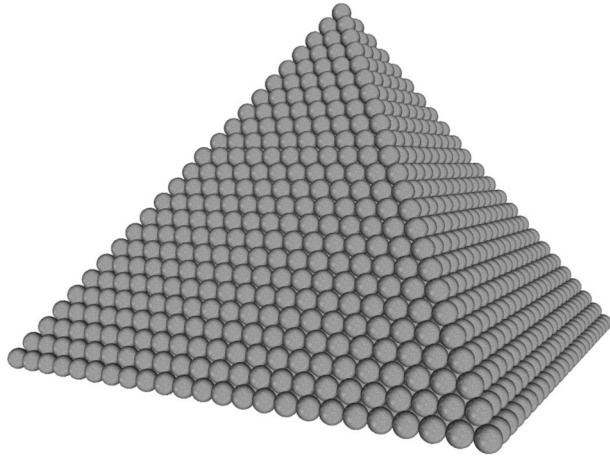
$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 24^2 = 70^2$$

scheint auf den ersten Blick nur eine mathematische Tatsache unter vielen zu sein; sie ist jedoch etwas Besonderes. Édouard Lucas (1842–1891) stellte in dem sogenannten Kanonenkugelproblem die Frage nach natürlichen Zahlen N mit der Eigenschaft, dass N Kanonenkugeln sich sowohl in einem Quadrat als auch in einer Pyramide mit quadratischer Grundfläche anordnen lassen. Mit anderen Worten, Lucas fragte nach einer ganzzahligen Lösung¹ für die Gleichung

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + m^2 = n^2$$

¹ Eine Polynomgleichung, bei der nach ganzzahligen Lösungen gesucht wird, heißt *diophantische Gleichung* nach Diophantos von Alexandria (etwa 200–284 n. Chr.), dessen Buch *Arithmetica* Gleichungen dieser Art behandelt.

Abb. 2.1 Eine Pyramide aus 4900 Kugeln



mit $N = n^2$. Wenn man die Formel für die Summe der ersten m Quadratzahlen anwendet, wird daraus die Gleichung

$$\frac{m(m+1)(2m+1)}{6} = n^2.$$

Lucas vermutete, konnte aber nicht beweisen, dass die obigen Zahlen $m = 24$ und $n = 70$ die einzige Lösung darstellen, mit $N = 4900$. Er vermutete also, dass 4900 die einzige *quadratische Pyramidalquadratzahl* größer als 1 ist. Späteren Mathematikern gelang es dann, dies zu beweisen (eine besonders klare Darstellung findet sich in [4]). Abbildung 2.1 zeigt die Pyramide aus 4900 Kugeln.

Die Menge der Lösungen von

$$\frac{x(x+1)(2x+1)}{6} = y^2$$

bildet eine sogenannte *elliptische Kurve*. Das Studium der elliptischen Kurven stellt ein aktives und faszinierendes Teilgebiet der Mathematik dar. Ein hervorragendes Buch ist [53].

Die Lösung für das Kanonenkugelproblem bildet die Basis für die Existenz eines berühmten Gitters in 24 Dimensionen, des sogenannten *Leech-Gitters*, entdeckt von John Leech (1926–1992). Ein Gitter ist ein sich regelmäßig wiederholendes Muster aus Punkten, so wie die Kreuzungspunkte auf Millimeterpapier. Wenn wir um die Punkte des Gitters Kugeln mit gleichem Radius legen, sodass sich die nächsten Kugeln gerade berühren, dann führt das zu einer *Kugelpackung*. Das Leech-Gitter hat eine bemerkenswert hohe Kusszahl (die Anzahl der nächsten Nachbarn eines Gitterpunktes): 196.560. In der Kugelpackung, die zu dem Leech-Gitter gehört, berührt jede Kugel genau 196.560 andere Kugeln. Das ist die maximale Kusszahl für eine Kugelpackung (ob mit oder ohne Gitter) in 24 Dimensionen.

Das Leech-Gitter kann mithilfe eines Lorentz-Gitters im 26-dimensionalen Raum konstruiert werden. In diesem Raum hat der Vektor $w = (0, 1, 2, 3, \dots, 24; 70)$ die Länge 0, da wir in der Lorentz-Metrik die Länge eines Vektors als die Wurzel aus der Summe über die Quadrate aller seiner Einträge berechnen, mit Ausnahme der letzten Koordinate, deren Quadrat abgezogen wird. Das Leech-Gitter (ein 24-dimensionaler linearer Raum) ist der Quotientenraum w^\perp/w des zu w orthogonalen Raums w^\perp (Dimension 25) und des von w aufgespannten Raums (Dimension 1). Das maßgebliche Referenzwerk für Gitter und Kugelpackungen ist [14].

2.2 Binärbäume

Betrachten Sie

$$\binom{2^n - 2}{2^{n-1} - 1} \binom{2^{n-1} - 2}{2^{n-2} - 1} \binom{2^{n-2} - 2}{2^{n-3} - 1} \cdots \binom{2}{1}^{2^{n-2}}, \quad n \geq 1.$$

Dieser Ausdruck gibt die Anzahl der ordnungserhaltenden Beschriftungen des *vollständigen Binärbaumes* der Höhe n mit den Zahlen $1, \dots, 2^n - 1$ an. Der vollständige Binärbaum der Höhe n ist ein gerichteter Graph mit einem Knoten (der Wurzel) in der obersten Ebene. Dieser Knoten ist durch Pfeile mit zwei Knoten eine Ebene tiefer verbunden. Jeder dieser Knoten ist wiederum durch Pfeile mit je zwei Knoten eine Ebene tiefer verbunden, und so geht es weiter bis zur insgesamt n -ten Ebene. In einer ordnungserhaltenden Beschriftung ist jeder Knoten mit einer kleineren Zahl beschriftet als jeder seiner Nachfolger. Abbildung 2.2 zeigt ein Beispiel mit $n = 4$.

Um nun einzusehen, dass genau dies tatsächlich gezählt wird, beachten Sie, dass die 1 jedenfalls an die Wurzel geschrieben werden muss. Dann kann man die Hälfte der verbliebenen Elemente auswählen, um sie dem linken Teilbaum zuzuordnen. Dafür gibt es $\binom{2^n - 2}{2^{n-1} - 1}$ Möglichkeiten. Die übrigen Elemente verbleiben dann für den rechten Teilbaum. Das kleinste Element jedes Teilbaumes muss an dessen Spitze geschrieben werden. Wenn man dies wiederholt und dabei alle Möglichkeiten in allen Teilbäumen auf jeder Ebene berücksichtigt, erhält man den obigen Ausdruck.

Abb. 2.2 Eine ordnungserhaltende Beschriftung des vollständigen Binärbaumes der Höhe 4

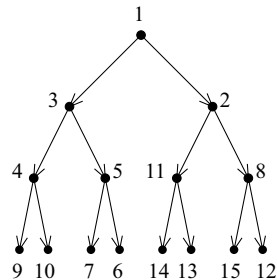
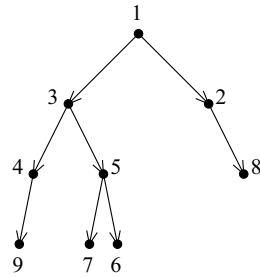


Abb. 2.3 Ein Heap

Wir bezeichnen diese Zahl mit $f(n)$. Einige Werte sind in der folgenden Tabelle angegeben:

n	$f(n)$
1	1
2	2
3	80
4	21.964.800
5	74.836.825.861.835.980.800.000

Wenn $n = 1$ ist, dann steht der Ausdruck für ein leeres Produkt, welches definitionsgemäß den Wert 1 hat.

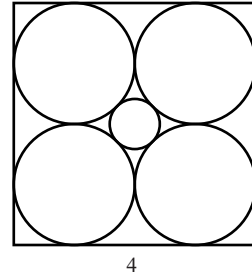
Der beschriftete Binärbaum in Abb. 2.2 ist ein Beispiel für eine Datenstruktur in der theoretischen Informatik, die *Heap* heißt. Man kann einen Heap als beschrifteten Teilbaum eines vollständigen Binärbaumes betrachten. Abbildung 2.3 zeigt einen Heap auf der Menge $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Heaps erlauben es, ein größtes oder kleinstes Element schnell einzufügen oder zu entfernen; sie werden in einem Sortieralgorithmus namens Heapsort verwendet.

2.3 Hervorquellende Hypersphären

Abbildung 2.4 zeigt ein Quadrat der Seitenlänge 4, in das vier Kreise vom Radius 1 eingepasst sind. Aufgrund des Satzes von Pythagoras beträgt der Radius des kleinen Kreises in der Mitte zwischen den größeren Kreisen $\sqrt{2} - 1$. Was geschieht, wenn wir das auf eine beliebige Dimension $d \geq 1$ verallgemeinern? Es sei ein Hyperwürfel der Kantenlänge 4 im d -dimensionalen Raum gegeben, der 2^d Hypersphären vom Radius 1 enthält (siehe auch *Volumen einer Kugel* in Kap. 3). Wir können den Hyperwürfel so platzieren, dass sein Mittelpunkt im Ursprung liegt und die Mittelpunkte der Hypersphären bei $(\pm 1, \pm 1, \dots, \pm 1)$. Wieder aufgrund des Satzes von Pythagoras beträgt der Abstand zwischen dem Mittelpunkt einer dieser Hypersphären und dem Ursprung $r = \sqrt{d}$. Also ist der Radius der kleinen Hypersphäre, deren Mittelpunkt im Ursprung sitzt, gleich

$$r = \sqrt{d} - 1.$$

Abb. 2.4 Ein Kreis umgeben von anderen Kreisen



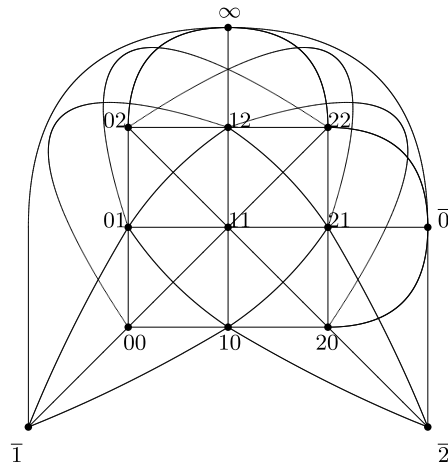
Für $d = 4$ ist der Radius der kleinen Hypersphäre gleich 1, genauso groß wie die Radien der anderen Hypersphären. Für $d > 4$ ist die kleine Hypersphäre größer als die Hypersphären um sie herum. Bei $d = 9$ ist der Radius gleich 2, und die kleine Hypersphäre berührt die Seiten des Hyperwürfels. Wenn $d > 9$ ist, dann quillt die kleine Hypersphäre aus dem Hyperwürfel heraus!

2.4 Projektive Ebene

Eine *projektive Ebene* ist eine Geometrie, bei der je zwei Punkte genau eine Verbindungsgerade besitzen und sich je zwei Geraden in genau einem Punkt schneiden. Es gibt also keine parallelen Geraden! Abbildung 2.5 zeigt eine projektive Ebene mit dreizehn Punkten.

Die projektive Ebene mit dreizehn Punkten hat dreizehn Geraden (in der Abbildung sind einige der Geraden gekrümmt). Jede Gerade enthält vier Punkte, und jeder Punkt liegt auf vier Geraden. Neun dieser Punkte sind mit Koordinaten von 00 bis 22 bezeichnet. Die anderen vier Punkte, auch *Fernpunkte* genannt, sind mit $\bar{0}$, $\bar{1}$, $\bar{2}$ und ∞ beschriftet.

Abb. 2.5 Eine projektive Ebene der Ordnung 3



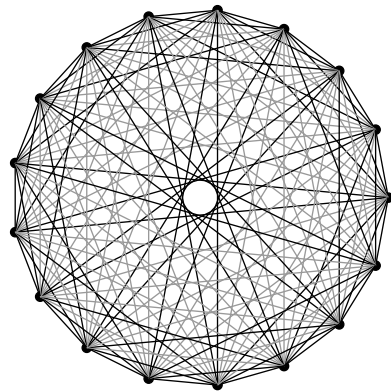
Wir bezeichnen dieses kleine Universum als die projektive Ebene der Ordnung 3 (eins weniger als die Anzahl der Punkte auf jeder Geraden). Eine *projektive Ebene* der Ordnung n ist eine Struktur aus $n^2 + n + 1$ Punkten und $n^2 + n + 1$ Geraden, bei der jede Gerade $n + 1$ Punkte enthält, jeder Punkt auf $n + 1$ Geraden liegt, jeweils zwei Punkte genau eine Gerade festlegen und je zwei Geraden sich in genau einem Punkt schneiden. Zu jeder Ordnung, die gleich einer Primzahlpotenz ist, existiert eine solche projektive Ebene. Niemand weiß, ob es eine projektive Ebene gibt, deren Ordnung keine Primzahlpotenz ist. Die kleinste Zahl oberhalb der 1, die keine Primzahlpotenz ist, ist die 6, und Gaston Tarry (1843–1913) bewies, dass es keine projektive Ebene der Ordnung 6 gibt. Die nächste potenzielle Ordnung, 10, ist durch eine Kombination von Mathematik und Computerberechnungen ausgeschlossen worden: Es gibt keine projektive Ebene der Ordnung 10. Die Existenz einer projektiven Ebene der Ordnung 12 ist noch immer eine offene Frage. Wenn sie existieren würde, hätte sie 157 Punkte und 157 Geraden.

2.5 Zweifarbter Graph

In der Graphentheorie besteht ein *Graph* aus einer Menge von Ecken sowie einer Menge von Kanten, von denen jede jeweils ein Paar von Ecken verbindet. Die Kanten können gerade oder gekrümmt sein, und sie können sich überschneiden. Abbildung 2.6 zeigt einen *vollständigen Graphen* mit 17 Ecken. Er ist vollständig, weil jedes Paar zweier Ecken mit einer Kante verbunden ist.

Die Kanten des Graphen sind mit zwei Farben eingefärbt (hier durch helle und dunkle Linien dargestellt). Diese Färbung hat die Eigenschaft, dass es keine vier Ecken gibt, deren sechs Verbindungskanten alle dieselbe Farbe haben. Andererseits muss es jedoch bei jeder Zweifärbung der Kanten des vollständigen Graphen mit 18 Ecken stets vier Ecken geben, deren Verbindungskanten einfarbig sind. Die-

Abb. 2.6 Eine Zweifärbung des vollständigen Graphen mit 17 Ecken



se Aussage ist ein Spezialfall eines kombinatorischen Ergebnisses, des Satzes von Ramsey, welcher von Frank Ramsey (1903–1930) entdeckt wurde. Er besagt, dass zu jedem n eine kleinste Zahl $R(n)$ existiert, sodass es bei jeder Zweifärbung der Kanten eines vollständigen Graphen mit $R(n)$ Ecken stets n Ecken gibt, deren Verbindungskanten alle dieselbe Farbe haben. Es ist also $R(4) = 18$. Können Sie beweisen, dass $R(3) = 6$ ist?

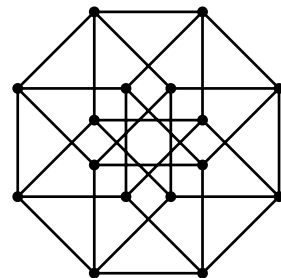
Die Färbung in Abb. 2.6 hat eine zyklische Symmetrie, da jede Ecke durch dunkle Kanten mit denjenigen Ecken verbunden sind, die sich 1, 2, 4, 8, 9, 13, 15 und 16 Plätze weiter im Uhrzeigersinn befinden. Eine gute Quelle zur Graphentheorie ist [54].

2.6 Hyperwürfel

Um eine zweidimensionale Skizze eines Würfels anzufertigen, zeichnet man zwei Quadrate in geringem Abstand und verbindet dann korrespondierende Ecken durch insgesamt vier Linien. Wir können noch einen Schritt weiter gehen und einen *Hyperwürfel* zeichnen, einen vierdimensionalen Würfel. Zeichnen Sie dazu zwei Würfel in geringem Abstand und ziehen Sie wieder Linien zwischen korrespondierenden Ecken. Die Skizze hat dann sechzehn Ecken und zweiunddreißig Kanten. Abbildung 2.7 zeigt eine Möglichkeit für ein solches Bild.

Ein Hyperwürfel kann kombinatorisch als die Menge der sechzehn Binärstrings der Länge 4 definiert werden (etwa 0110), wobei zwei Strings genau dann durch eine Kante verbunden sind, wenn sie sich an exakt einer Stelle unterscheiden. So sind zum Beispiel die Strings 0110 und 0111 verbunden. Diese Darstellung eines Hyperwürfels ist hilfreich, wenn man Beispiele gefärbter Graphen konstruiert. In den Übungsaufgaben in Kap. 9 werden Sie gebeten, eine Dreifärbung eines vollständigen Graphen mit 16 Ecken anzugeben, bei der kein Dreieck existiert, dessen Kanten alle dieselbe Farbe haben. In einer derartigen Färbung ist jeder einfarbige Teilgraph ein Hyperwürfel, bei dem auch die Raumdiagonalen eingezeichnet sind.

Abb. 2.7 Ein Hyperwürfel



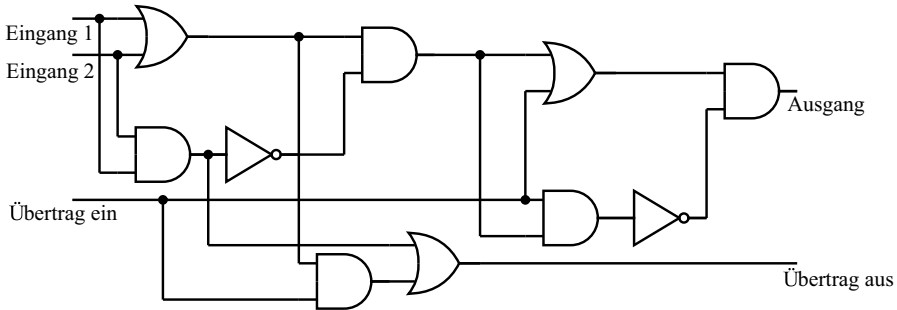


Abb. 2.8 Ein Volladdierer

2.7 Volladdierer

Abbildung 2.8 zeigt ein Schaltnetz für eine integrierte Schaltung, die unter dem Namen *Volladdierer* bekannt ist. Sie stellt das Rückgrat im Rechenwerk eines Computers dar.

Der Schaltkreis führt eine binäre Addition durch. Wenn an den Eingängen zwei Eingabebits (0 oder 1) sowie ein vorheriger Übertrag gegeben sind, dann addiert die Schaltung die Zahlen im Binärsystem und gibt an den Ausgängen ein Ausgabebit und einen nächsten Übertrag zurück. Abbildung 2.9 zeigt die *Wahrheitstabelle* für diesen Schaltkreis.

Die einzelnen Elemente des Volladdierers werden *Logikgatter* genannt. Die grundlegenden Typen davon sind Und-Gatter (AND), Oder-Gatter (OR) und Nicht-Gatter (NOT). Diese führen diejenigen logischen Operationen durch, die ihre Namen jeweils angeben. In Kombination können sie komplexe Schaltkreise wie den Volladdierer realisieren.

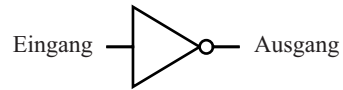
Das Nicht-Gatter ist das einfachste. Es verwandelt eine Eingabe von 1 in 0 und eine 0 in 1 (Abb. 2.10).

Das Und-Gatter liefert genau dann eine Ausgabe von 1, wenn beide Eingabebits gleich 1 sind (Abb. 2.11).

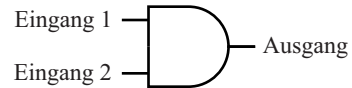
Das Oder-Gatter liefert eine Ausgabe von 1, wenn mindestens ein Eingabebit gleich 1 ist (Abb. 2.12).

Abb. 2.9 Die Wahrheitstabelle für den Volladdierer

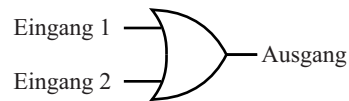
Eingang 1	Eingang 2	Übertrag ein	Ausgang	Übertrag aus
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

Abb. 2.10 Das Nicht-Gatter

Eingang	Ausgang
0	1
1	0

Abb. 2.11 Das Und-Gatter

Eingang 1	Eingang 2	Ausgang
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Abb. 2.12 Das Oder-Gatter

Eingang 1	Eingang 2	Ausgang
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

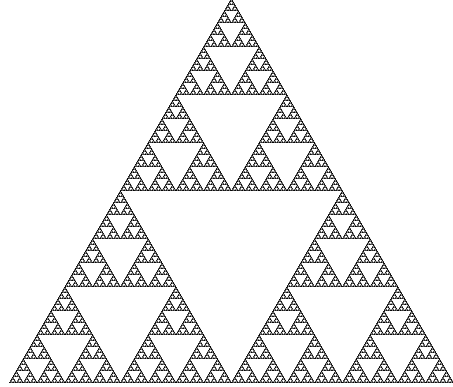
Sämtliche Mechanismen, mit denen ein Computer denkt, einschließlich des Speichers, sind aus diesen Bausteinen aufgebaut. Die mathematischen Hintergründe werden in [43] diskutiert.

2.8 Sierpiński-Dreieck

Abbildung 2.13 zeigt ein Fraktal, das als *Sierpiński-Dreieck* bekannt ist. Es wurde von Waclaw Sierpiński (1882–1969) eingeführt. Die Abbildung zeigt den sechsten Schritt der Konstruktion. Diese beginnt mit dem vollständig ausgefüllten gleichseitigen Dreieck, welches im ersten Schritt in vier gleich große gleichseitige Dreiecke aufgeteilt wird, von denen das mittlere entfernt wird. In jedem folgenden Schritt wird dieser Prozess mit den verbliebenen ausgefüllten Dreiecken wiederholt.

Die Fläche des Sierpiński-Dreiecks ist 0. Das Startdreieck sei so gewählt, dass es die Fläche 1 hat. Nach dem ersten Schritt beträgt die Restfläche noch $3/4$, da eines der vier Teildreiecke entfernt worden ist. Bei jedem weiteren Schritt reduziert sich

Abb. 2.13 Das Sierpiński-Dreieck



die Fläche auf $3/4$ der vorherigen Fläche. Im Schritt k beträgt die Fläche demnach

$$\left(\frac{3}{4}\right)^k,$$

und das nähert sich der 0, wenn k gegen unendlich geht. Das Sierpiński-Dreieck ist weder ein- noch zweidimensional. Seine fraktale Dimension, genauer gesagt seine *Hausdorff-Dimension*, beträgt

$$\frac{\log 3}{\log 2} \approx 1,585\dots$$

Der Grund für diesen Wert ist, dass das Sierpiński-Dreieck die Vereinigungsmenge von drei Kopien seiner selbst ist, jede um den Faktor 2 verkleinert.

2.9 Quadrierplan

Wir definieren einen Graphen, dessen Ecken die natürlichen Zahlen modulo n sind. Zu zwei gegebenen Ecken A und B zeichnen wir einen Pfeil von Ecke A zu Ecke B genau dann, wenn

$$A^2 \bmod n = B$$

gilt. Diesen Graphen nennen wir den *Quadrierplan modulo n* . Vielleicht wollen Sie einmal selbst die Quadrierpläne für einige kleine Werte von n zeichnen, etwa für $2 \leq n \leq 10$. Abbildung 2.14 zeigt den Quadrierplan modulo 25.

Die Pfeile der Ecken, die zu sich selbst zurückführen, also 0 und 1, sind hier nicht gezeigt. Es gibt einen gerichteten Zyklus der Länge 4, nämlich

$$6 \rightarrow 11 \rightarrow 21 \rightarrow 16 \rightarrow 6.$$



<http://www.springer.com/978-3-662-45458-9>

Mathematische Appetithäppchen

Faszinierende Bilder. Packende Formeln. Reizvolle Sätze.

Erickson, M.

2015, XI, 215 S. 90 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-662-45458-9