



Leseprobe

Stephan Bucher

Anwendungsorientierte Mathematik für Techniker

ISBN (Buch): 978-3-446-44244-3

ISBN (E-Book): 978-3-446-44179-8

Weitere Informationen oder Bestellungen unter

<http://www.hanser-fachbuch.de/978-3-446-44244-3>

sowie im Buchhandel.

Vorwort

Das Buch entstand im Laufe der Unterrichtstätigkeit des Autors an der Inovatech, einer Höheren Fachschule für Technik. Technikerstudenten sind Praktiker mit einer ersten Berufserfahrung. Das Schwergewicht wird deshalb im Unterricht, wo immer möglich, auf die kürzeste Verbindung von der Theorie zur praktischen Anwendung gelegt; auf Beweise, die Diskussion exotischer Spezialfälle und theoretische Spitzfindigkeiten wird weitgehend verzichtet, manchmal vielleicht vom Standpunkt der „reinen Lehre“ aus betrachtet bis hart an die Grenze des Vertretbaren. Auch wird darauf Wert gelegt, den Studierenden jeweils eine Methode zu präsentieren, die immer anwendbar ist – wir sind der Ansicht, dass sich der Technikerstudent nicht mit verschiedenen Methoden für die gleiche Problemlösung belasten sollte.

Mathematik-Lehrbücher für Techniker gibt es im deutschen Sprachraum schon mehrere. Wir beginnen bei den Grundlagen, haben aber bewusst auch anspruchsvolle Beispiele und Anwendungen eingeschlossen, die nicht zum Standardrepertoire für Techniker gehören. Es geht uns dabei darum, den Studierenden die Breite der Anwendbarkeit der vermittelten Mathematik aufzuzeigen und sie darauf hinzuweisen, dass alles überall noch weitergeht. Damit, und indem wir entsprechende Stichworte und Anknüpfungspunkte geben, möchten wir interessierte Leser dazu ermutigen, selbständig ihre Kenntnisse zu erweitern und zu vertiefen. Sehr viel Information kann im Internet gefunden werden, und es gibt ausgezeichnete weiterführende Werke im Buchhandel (siehe Literaturverzeichnis).

Bei Herleitungen und Berechnungen haben wir darauf geachtet, alle wichtigen Schritte und Konzepte aufzuzeigen. Wir hoffen deshalb, dass das Buch auch beim Selbststudium von Nutzen sei. Fundierte Kritik und Verbesserungsvorschläge nehmen wir gerne entgegen.

Die Aufteilung des Stoffes auf die Semester im Inovatech-Lehrplan ist ungefähr folgende: 1. Semester Kapitel 1 und 2, 2. Semester Kapitel 3 bis 5, 3. Semester Kapitel 6 bis 8, 4. Semester Kapitel 8 (Rest Anwendungen) und 9 sowie, je nach vorhandener Zeit, weitere Anwendungen, z. B. aus Mechanik oder Elektrotechnik. Nach den Sommerferien kommt im vierten Semester bald die Zeit der Vorbereitung auf die Vordiplomprüfung. Der Aufbau ist so gehalten, dass die Betriebstechniker – die an der Inovatech nur zwei Semester Mathematikunterricht erhalten – die Anwendungen von Ungleichungen (Abschnitte 4.2.6 und 4.2.7, Lineare Optimierung) und Statistik (Qualitätskontrolle) auch noch mitbekommen, die sie im Beruf möglicherweise brauchen können. Den Betriebstechnikern zuliebe wurden auch einzelne Beispiele aus der Wirtschaftsmathematik aufgenommen (2.9.2, 4.5). Diese können natürlich für andere Studienrichtungen ohne Nachteil übersprungen werden.

An Taschenrechner werden keine besonderen Anforderungen gestellt; fast alle der im Kurs zu lösenden Probleme sind mit einem TI-30 eco RS zu bewältigen, der einfach und intuitiv zu bedienen ist. Gut geeignet für Techniker ist der etwas anspruchsvollere TI-30X Pro, der quadratische und kubische Gleichungen sowie Gleichungssysteme mit 2 und 3 Unbekannten löst, Integrale numerisch auswertet, und, neben statistischen Berechnungen und Regressionen, sogar einen beschränkt brauchbaren numerischen Gleichungslöser enthält. Mit programmierbaren Rechnern sind die meisten unserer Studierenden überfordert – im Unterricht kann dazu keine Unterstützung geleistet werden – und die kompliziertere Bedienung wirkt sich als Nachteil aus.

Immer häufiger wird im Alltag für Berechnungen direkt der PC eingesetzt, was die Dokumentation und Wiederverwendung umfangreicher Berechnungsvorgänge ermöglicht. Wir bevorzugen dafür Mathcad, für tabellenorientierte Anwendungen Excel, und stellen dazu auch Beispiele zur Verfügung. Verhängnisvoll ist, wenn der Studierende die Mathematik darauf reduziert, welches Programm-Icon zu welcher Art von Aufgabe gehört – damit lernt man keine mathematischen Zusammenhänge erkennen und wird versagen, wenn man in Prüfungen oder im Berufsleben Probleme lösen sollte, die über Routinearbeiten auf Sachbearbeiterniveau hinausgehen.

Ich danke dem Fachbuchverlag Leipzig und seinen Mitarbeitern, insbesondere der Lektorin Frau Chr. Fritsch für ihre sehr engagierte, umsichtige und professionelle Unterstützung und Beharrlichkeit während der nicht immer einfachen Vorbereitungszeit, und Frau K. Wulst für ihre wertvollen Beiträge zur Gestaltung.

Zum Schluss möchte ich mich bei der Schulleitung der Inovatech dafür bedanken, dass sie Vorschlägen gegenüber stets aufgeschlossen ist und eine Atmosphäre des Vertrauens schafft, in der der Dozent bei der Vermittlung der Lehrinhalte Freiheit genießt und nicht über Gebühr administrativ belastet wird.

Rickenbach im Sommer 2015

Stephan Bucher

Inhalt

Vorwort	5
----------------------	----------

1 Grundlagen	15
---------------------------	-----------

1.1 Die Zahlen	15
1.2 Arithmetische Grundoperationen	16
1.3 Rechenregeln	16
1.3.1 Reihenfolge der Operanden	16
1.3.2 Vorzeichen	16
1.3.3 Reihenfolge der Operationen	17
1.3.4 Addition und Subtraktion von Klammerausdrücken	18
1.3.5 Multiplikation von Klammerausdrücken	18
1.4 Bruchrechnen	18
1.4.1 Begriffe	18
1.4.2 Addition von Brüchen; das kleinste gemeinsame Vielfache	19
1.4.3 Kürzen	20
1.4.4 Multiplikation von Brüchen	21
1.4.5 Division von Brüchen	21
1.4.6 Umwandlung von Dezimalbrüchen in Brüche	22
1.5 Potenzen und Wurzeln	22
1.5.1 Potenzen	22
1.5.2 Quadratische binomische Ausdrücke	23
1.5.3 Höhere Potenzen binomischer Ausdrücke	24
1.5.4 Wurzeln	25
1.6 Logarithmen	26
1.6.1 Begriff	26
1.6.2 Rechenregeln	27
1.6.3 Wechsel der Basis	27
1.6.4 Die Bedeutung der Logarithmen	28
1.7 Zahlensysteme	29
1.8 Übungsaufgaben	30
1.8.1 Zu Abschnitt 1.3	30
1.8.2 Zu Abschnitt 1.4	31
1.8.3 Zu Abschnitt 1.5	32
1.8.4 Zu Abschnitt 1.6	33

2	Gleichungen	34
2.1	Begriffe	34
2.2	Das Umformen von Gleichungen	35
2.2.1	Begriff	35
2.2.2	Äquivalenzumformungen	35
2.2.3	Nichtäquivalente Umformungen	35
2.3	Lineare Gleichungen mit einer Unbekannten	36
2.3.1	Lösungsverfahren	36
2.3.2	Angewandte Aufgaben	36
2.4	Systeme linearer Gleichungen mit mehreren Unbekannten	37
2.4.1	Grundlagen	37
2.4.2	Lösung durch Substitution	38
2.4.3	Lösung mit Matrizenrechnung	38
2.4.4	Lösung eines Gleichungssystems mit der Determinantenmethode	40
2.5	Quadratische Gleichungen	42
2.5.1	Allgemeine Lösungsformel	42
2.5.2	Der Satz von Vieta	43
2.6	Algebraische Gleichungen höheren Grades	44
2.6.1	Lösungen	44
2.6.2	Lösung mit dem TI-30X Pro	44
2.7	Nichtlineare Gleichungssysteme mit 2 Unbekannten	45
2.7.1	Lösungsverfahren	45
2.7.2	Anwendungsbeispiel: Koordinatenbestimmung	45
2.8	Wurzelgleichungen	47
2.9	Exponentialgleichungen	49
2.9.1	Lösungsmethodik	49
2.9.2	Zins- und Investitionsrechnung	51
2.10	„Unlösbare“ Gleichungen: Der numerische Gleichungslöser des TI-30X Pro	53
2.11	Ungleichungen	54
2.11.1	Definition	54
2.11.2	Das Lösen von Ungleichungen	55
2.11.3	Lineare Ungleichungen	55
2.11.4	Nichtlineare Ungleichungen	56
2.12	Übungsaufgaben	59
2.12.1	Zu Abschnitt 2.2	59
2.12.2	Zu Abschnitt 2.3	59
2.12.3	Zu Abschnitt 2.4	63
2.12.4	Zu Abschnitt 2.5	66
2.12.5	Zu Abschnitt 2.6	67
2.12.6	Zu Abschnitt 2.7	68
2.12.7	Zu Abschnitt 2.8	69
2.12.8	Zu Abschnitt 2.9	69
2.12.9	Zu Abschnitt 2.10	70

3	Trigonometrie	71
3.1	Winkel	71
3.2	Die Winkelfunktionen	72
3.2.1	Definition am rechtwinkligen Dreieck	72
3.2.2	Umrechnungen, Darstellung am Einheitskreis	73
3.3	Berechnungen am Dreieck	75
3.3.1	Beziehungen im rechtwinkligen Dreieck	75
3.3.2	Dreiecksfläche	76
3.3.3	Der Sinussatz	76
3.3.4	Der Kosinussatz	77
3.4	Weitere Formeln	78
3.4.1	Additionstheoreme	78
3.4.2	Winkelfunktionen für doppelte und halbe Winkel	79
3.4.3	Halbwinkelformeln	80
3.5	Das Lösen goniometrischer Gleichungen	81
3.6	Anwendungen	85
3.6.1	Klassische Vermessungsaufgaben	85
3.6.2	Vermessung beim Tunnelbau	88
3.6.3	Schallmessortung	88
3.7	Übungsaufgaben	91
3.7.1	Zu Abschnitt 3.2	91
3.7.2	Zu Abschnitt 3.3	92
3.7.3	Zu Abschnitt 3.4.1	93
3.7.4	Zu Abschnitt 3.5	93
4	Funktionen	94
4.1	Der Funktionsbegriff	94
4.2	Lineare Funktionen	95
4.2.1	Ganzrationale Funktionen: Begriff und allgemeine Eigenschaften	95
4.2.2	Eigenschaften linearer Funktionen	95
4.2.3	Anwendungsbeispiel: Schnittpunkt	98
4.2.4	Graphische Darstellung linearer Gleichungssysteme	99
4.2.5	Lineare Ungleichungen in 2 Variablen	100
4.2.6	Systeme linearer Ungleichungen in 2 Variablen	101
4.2.7	Lineare Optimierung	102
4.3	Quadratische Funktionen	105
4.4	Ganzrationale Funktionen höheren Grades	107
4.5	Anwendung ganzrationaler Funktionen	110
4.6	Gebrochenrationale Funktionen	114
4.6.1	Begriff und allgemeine Eigenschaften	114
4.6.2	Asymptoten	115
4.7	Potenz- und Wurzelfunktionen	117
4.7.1	Potenzfunktionen	117
4.7.2	Wurzelfunktionen	117
4.7.3	Beispiele	118

4.8	Exponentialfunktionen	122
4.8.1	Allgemeine Eigenschaften	122
4.8.2	Beispiele	123
	Radioaktiver Zerfall	124
4.9	Logarithmusfunktionen	127
4.10	Trigonometrische Funktionen	127
4.10.1	Periodizität	127
4.10.2	Funktionen mit Parametern	128
4.10.3	Schwingungen in der Technik	129
4.11	Umkehrfunktionen	130
4.11.1	Begriff	130
4.11.2	Bestimmung der Umkehrfunktion	130
4.11.3	Einige Funktionen und ihre Umkehrungen	131
4.11.4	Temperaturskala	131
4.12	Übungsaufgaben	132
4.12.1	Zu Abschnitt 4.2	132
4.12.2	Zu Abschnitt 4.3	135
4.12.3	Zu Abschnitt 4.11.4	136

5 Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik 137

5.1	Einführung	137
5.2	Zufall und Wahrscheinlichkeit	138
5.3	Einfache Kombinatorik	141
5.4	Binomialverteilung	143
5.4.1	Grundlagen	143
5.4.2	Anwendungsbeispiel: Qualitätskontrolle	145
5.4.3	Verallgemeinerung: Multinomiale Verteilung	147
5.5	Beschreibung einer statistischen Gesamtheit	147
5.5.1	Streuung	147
5.5.2	Wahrscheinlichkeitsverteilungen	147
5.5.3	Mittelwert und Standardabweichung	150
5.5.4	Beschreibung einer Gesamtheit von Daten mit Kenngrößen	151
5.6	Die Normalverteilung	152
5.7	Messdatenauswertung	156
5.7.1	Resultatangabe und Vertrauensintervall	156
5.7.2	Ausgleichsrechnung	157
5.8	Statistische Entscheidungsfindung	161
5.8.1	Statistisches Testen	161
5.8.2	Prozessbeherrschung	163
5.9	Elektronische Hilfsmittel	164
5.10	Übungsaufgaben	165
5.10.1	Zu Abschnitt 5.4	165
5.10.2	Zu Abschnitt 5.5	166
5.10.3	Zu Abschnitt 5.6	167
5.10.4	Zu Abschnitt 5.7	167
5.10.5	Zu Abschnitt 5.8	170

6	Komplexe Zahlen	172
6.1	Definition und Grundbegriffe	172
6.1.1	Definition	172
6.1.2	Die Gauß'sche Zahlenebene	173
6.1.3	Komplexe Konjugation	173
6.1.4	Betrag	173
6.1.5	Argument	173
6.2	Darstellungsformen	174
6.2.1	Algebraische Form	174
6.2.2	Trigonometrische Form	174
6.2.3	Umrechnungen	174
6.3	Die vier Grundrechenarten	175
6.3.1	Addition und Subtraktion	175
6.3.2	Multiplikation und Division	175
6.3.3	Multiplikation und Division in trigonometrischer Darstellung	176
6.3.4	Möglichkeiten des TI-30X Pro	176
6.4	Höhere Rechenarten	177
6.4.1	Potenzen	177
6.4.2	Wurzeln	177
6.4.3	Exponentialfunktion	177
6.5	Der Fundamentalsatz der Algebra	178
6.6	Die Lösungsformel der kubischen Gleichung	179
6.7	Anwendung: Wechselstromrechnung (Kurzer Abriss)	180
6.7.1	Einführung	180
6.7.2	Überlagerung von zwei Wechselspannungen	181
6.7.3	Komplexe Widerstände (Impedanzen)	182
7	Folgen und Reihen	184
7.1	Begriffe und Definitionen	184
7.1.1	Folgen	184
7.1.2	Reihen	185
7.2	Arithmetische Folgen und Reihen	186
7.2.1	Arithmetische Folgen	186
7.2.2	Arithmetische Reihen	186
7.3	Geometrische Folgen und Reihen	187
7.3.1	Geometrische Folgen	187
7.3.2	Geometrische Reihen	187
7.3.3	Unendliche geometrische Reihen	187
7.4	Anwendung: Potenzreihen bekannter Funktionen	188
7.5	Übungsaufgaben	189
7.5.1	Zu Abschnitt 7.1	189
7.5.2	Zu Abschnitt 7.2	189
7.5.3	Zu Abschnitt 7.3	190

8	Differenzialrechnung	191
8.1	Grundlagen	191
8.1.1	Grenzwerte von Zahlenfolgen	191
8.1.2	Grenzwerte von Funktionen	192
8.1.3	Stetigkeit	194
8.2	Die Ableitung	194
8.2.1	Der Differenzialquotient	194
8.2.2	Wichtige Ableitungsregeln	195
8.2.3	Die Ableitung ganzrationaler Funktionen	197
8.2.4	Die Ableitungsfunktion	197
8.3	Die Bedeutung der 1. bis 3. Ableitung	198
8.3.1	Maxima	198
8.3.2	Minima	199
8.3.3	Krümmung	199
8.3.4	Wendepunkte	200
8.3.5	Beispiel	200
8.4	Weitere Ableitungsregeln	201
8.4.1	Produktregel	201
8.4.2	Quotientenregel	201
8.4.3	Kettenregel	202
8.4.4	Die Ableitung der trigonometrischen Funktionen	203
8.4.5	Die Ableitung von Logarithmusfunktionen	204
8.4.6	Die Ableitung der Umkehrfunktion	205
8.4.7	Die Ableitung von Exponentialfunktionen	206
8.5	Funktionen mit mehreren Variablen	206
8.6	Anwendungen	206
8.6.1	Kurvendiskussion	206
8.6.2	Extremwertprobleme	207
8.6.3	Einige Extremalprinzipien aus der Physik	208
8.6.4	Ausgleichsrechnung: Beispiel Lineare Regression	210
8.6.5	Maschinenbau: Wechselkräfte in einer Kolbenmaschine	211
8.6.6	Das Newton-Verfahren zur numerischen Auflösung von Gleichungen	214
8.6.7	Vereinfachung des Newton-Verfahrens: Regula falsi	218
8.6.8	Bestimmung aller Lösungen einer algebraischen Gleichung	219
8.6.9	Parameterbestimmung in der Physik: Gas-Zustandsgleichung	220
8.6.10	Fehlerfortpflanzung	222
8.6.11	Unsicherheitsabschätzung	223
8.7	Übungsaufgaben	224
8.7.1	Zu Abschnitt 8.1	224
8.7.2	Zu Abschnitt 8.2	225
8.7.3	Zu Abschnitt 8.3	225
8.7.4	Zu Abschnitt 8.4	225
8.7.5	Zu Abschnitt 8.6.2	227

9	Integralrechnung	231
9.1	Das bestimmte Integral	231
9.1.1	Begriffe und Grundlagen	231
9.1.2	Berechnung bestimmter Integrale	232
9.2	Die Stammfunktion und ihre Ableitung	233
9.3	Das unbestimmte Integral	234
9.4	Integrationsregeln	235
9.4.1	Integrationsregeln aus Ableitungsregeln	235
9.4.2	Logarithmische Ableitung	236
9.4.3	Partielle Integration	236
9.4.4	Integration durch Substitution	237
9.5	Numerische Integration	237
9.5.1	Integration durch Approximation	237
9.5.2	Trapez-Integration	238
9.5.3	Romberg-Integration	238
9.6	Anwendungen	239
9.6.1	Mittelwert einer Funktion in einem Intervall	239
9.6.2	Flächenschwerpunkt	240
9.6.3	Bogenlänge	241
9.6.4	Linien­schwerpunkt	242
9.6.5	Flächen- und Trägheitsmomente	243
9.6.6	Arbeit/Energie bei ortsabhängiger Kraft	244
9.6.7	Das RC-Glied	246
9.6.8	Leistung des Wechselstroms	247
9.6.9	Frequenzanalyse (Fourier-Analyse, harmonische Analyse)	249
9.6.10	Seilreibung	253
9.6.11	Abkühlung	254
9.6.12	Barometrische Höhenformel	256
9.6.13	Berechnung des Integrals einer punktweise gegebenen Funktion	257
9.6.14	Bewegungsprobleme in der Physik	257
	Literaturverzeichnis	259
	Sachwortverzeichnis	261

Es liegt deshalb nahe, zu definieren (mit $n \neq 0$)

$$a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$$

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$$

Das ist eine *Erweiterung des Potenzbegriffs*. Bei ganzzahligen Exponenten kann eine Potenz immer auch als Multiplikation geschrieben werden – das geht jetzt nicht mehr!

Mit dieser Schreibweise kann man mit Wurzeln mit den Rechenregeln des Potenzrechnens 1.5.1 rechnen und erhält vernünftige Resultate.

Mit dieser Erweiterung können wir (wenigstens theoretisch) Potenzen mit beliebigen rationalen Exponenten berechnen. Das heißt nichts anderes, als dass wir Potenzen mit beliebigen Exponenten berechnen können!

Beim Rechnen mit Wurzeln ist es häufig sinnvoll, diese als Potenzen zu schreiben, da die Rechnerei mit den Exponenten normalerweise einfacher und weniger fehleranfällig ist.

Beispiel:

$$1.22 \quad 3^{-1} \cdot \left(\sqrt[14]{\frac{1}{3^{-2}}}\right)^7 = 3^{-1} \cdot \left(\left(\frac{1}{3^{-2}}\right)^{\frac{1}{14}}\right)^7 = 3^{-1} \cdot \left(\frac{1}{3^{-2}}\right)^{\frac{1}{14} \cdot 7} = 3^{-1} \cdot 3^{2 \cdot \frac{1}{14} \cdot 7} = 3^{-1} \cdot 3^1 = 3^0 = 1$$

Noch eine Bemerkung zu den Vorzeichen: Ungeradzahlige Wurzeln sind die einzigen Potenzen negativer Zahlen mit gebrochenen Exponenten, die in $\mathbb{R}$ existieren!

■ 1.6 Logarithmen

1.6.1 Begriff

In 1.5.4 haben wir gesehen, dass man Potenzen mit beliebigen (rationalen) Exponenten bilden kann. **Umgekehrt kann man auch jede positive Zahl als Potenz einer beliebigen positiven Basis $\neq 1$ darstellen.** Das ist die Grundlage der *Logarithmen*.

Bezeichnungen:

$$y = a^z$$

Man nennt z den *Logarithmus*, a die *Basis* und y den *Numerus*.

In der Technik ist diese Basis normalerweise die Zahl 10. Der Logarithmus ist die Zahl, die man bei 10 in den Exponenten schreiben muss, um den gewünschten Wert zu erhalten.

Der Logarithmus von 100 zur Basis 10 ist 2, denn $10^2 = 100$. Der Logarithmus von 1000 ist 3, der Logarithmus von 0,1 ist -1, etc.

Schreibweise: $\log_{10}(100) = 2$.

Beim Logarithmieren bestimmt man bei gegebener Basis den Exponenten einer Potenz. ■

1.6.2 Rechenregeln

Entsprechend 1.5.1 gelten für Logarithmen folgende Rechengesetze (die Basis 10 wird hier nur als Beispiel gewählt):

$$u \cdot v = 10^{\log(u)} \cdot 10^{\log(v)} = 10^{\log(u) + \log(v)} \Rightarrow \log(u \cdot v) = \log(u) + \log(v) \quad (1.8)$$

$$\Rightarrow \log(u/v) = \log(u) - \log(v) \quad (1.9)$$

$$\log(a^b) = \log(a \cdot a \cdot a \cdot \dots) \Rightarrow \log(a^b) = b \cdot \log(a) \quad (1.10)$$

1.6.3 Wechsel der Basis

Gebräuchliche Logarithmensysteme sind:

- **lg(x) = log₁₀(x)**: dekadische Logarithmen (Basis 10), häufig auch einfach **log(x)**
- **ln(x) = log_e(x)**: natürliche Logarithmen (Basis e = 2,7182818 ..., mehr in 4.8.1)
- **lb(x) = log₂(x)**: duale („binäre“) Logarithmen (Basis 2)

Der TI-30 kennt Zehnerlogarithmen **LOG** und natürliche Logarithmen **LN**.

Wenn wir die Logarithmen in *einer* Basis kennen, können wir sie sofort in eine beliebige andere positive Basis umrechnen.

Beispiel:

- 1.23 Gesucht sei der Logarithmus von 17 zur Basis 3, $z = \log_3(17)$, wenn die Logarithmen zur Basis 10 bekannt sind. Nun ist

$$\begin{aligned} 3^z &= 17 \\ \left(10^{\lg(3)}\right)^z &= 17 \\ \lg\left(\left(10^{\lg(3)}\right)^z\right) &= z \cdot \lg(3) \cdot \underbrace{\lg(10)}_1 = \lg(17) \\ z = \log_3(17) &= \frac{\lg(17)}{\lg(3)} = 2.578901923 \end{aligned}$$

Entsprechend bestehen folgende **Umrechnungen**:

$$\lg(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)} = \frac{\ln(x)}{2.303} = 0.43429 \cdot \ln(x)$$

$$\ln(x) = \frac{\lg(x)}{\lg(e)} = \frac{\lg(x)}{0.43429} = 2.303 \cdot \lg(x)$$

Beim Wechsel der Basis werden also alle Logarithmen einfach **mit einer konstanten Zahl multipliziert**.

Eine weitere nützliche und leicht zu merkende Beziehung ist

$$\left. \begin{array}{l} b = a^{\log_a(b)} \\ a = b^{\log_b(a)} \Rightarrow a^{\frac{1}{\log_b(a)}} = b \end{array} \right\} \Rightarrow \log_a(b) = \frac{1}{\log_b(a)} \Rightarrow \log_a(b) \cdot \log_b(a) = 1$$

1.6.4 Die Bedeutung der Logarithmen

Man kann *jede beliebige* positive Zahl als Potenz einer gegebenen positiven Zahl, z. B. 10, darstellen. Es ist

$$10^{-1} = 0,1$$

$$10^0 = 1$$

$$10^1 = 10$$

$$10^2 = 100$$

$$10^3 = 1000$$

und so weiter. Für die Zahlen zwischen 1 und 10 liegt der Exponent, d. h. der Logarithmus zur Basis 10, dann zwischen 0 und 1, für Zahlen zwischen 10 und 100 zwischen 1 und 2, etc. Bei einer Zahl, die 10x größer ist als eine andere, ist der Logarithmus einfach um 1 größer. Man muss also die Logarithmen *nur für einen 10er-Bereich kennen*, beispielsweise für die Zahlen zwischen 1 und 10, und kann dazu ganzzahlige Zusätze addieren.

Daher kommt die sehr große Bedeutung, die früher (bevor es Rechenmaschinen gab) die Logarithmen hatten. Mithilfe von *Logarithmentafeln* (für den Bereich von 1 bis 10) wurden aus Multiplikationen Additionen, aus Wurzeln Divisionen und aus Potenzen Multiplikationen, sodass auch komplexe Berechnungen von Hand durchführbar wurden.

Der bis zum Aufkommen elektronischer Rechner nach 1970 weit verbreitete Rechenschieber enthält zwei gegeneinander verschiebbare logarithmische Skalen. Dadurch kann ein Logarithmus zu einem anderen addiert und das Resultat einer Multiplikation (bzw. Division) direkt abgelesen werden.

Als Hilfsmittel zum numerischen Rechnen haben die Logarithmen die überragende Bedeutung, die sie während Jahrhunderten und bis etwa 1970 hatten, vollständig verloren.

Sie sind aber nach wie vor bedeutsam, weil zahlreiche wichtige Größen, die sehr große Bereiche abdecken, logarithmisch sinnvoll dargestellt werden können (wir kennen die Richterskala für die in Erdbeben freigesetzte Energie, und viele Sinneswahrnehmungen sind auf einer logarithmischen Skala empfindlich, beispielsweise das Gehör: die Dezibelskala ist eine logarithmische Skala). Außerdem sind Zusammenhänge zwischen Größen oft in logarithmischer Darstellung einfacher; wir verweisen auch auf das Lösen von Exponentialgleichungen in 2.9.1 und die Bemerkungen am Ende von *Abschnitt 5.7.2*. Das wird (hoffentlich) alles später noch klarer werden.

Mithilfe der Logarithmen können wir Größen berechnen, die der Taschenrechner nicht darstellen kann, weil sie zu groß (oder zu klein) sind:

Beispiel:

1.24 Wie viel ist 36^{81} ?

$$\lg(36^{81}) = 81 \cdot \lg(36) = 126,0605026$$

$$36^{81} = 10^{0,0605026} \cdot 10^{126} = 1,149483024 \cdot 10^{126}$$

■ 1.7 Zahlensysteme

Unser Zahlensystem ist auf Potenzen der Zahl 10 aufgebaut. Wir wissen, dass jede Ziffer einer Zahl einen *Zifferwert* und einen *Stellenwert* hat. Der Zifferwert liegt zwischen 0 und 9, beim Stellenwert kennen wir die Einer, Zehner, Hunderter etc.

Dieses System ermöglicht es uns, mit wenigen Ziffern alle für uns wichtigen Zahlen aufzuschreiben und mit ihnen zu rechnen. Man versuche das einmal mit römischen Zahlen!

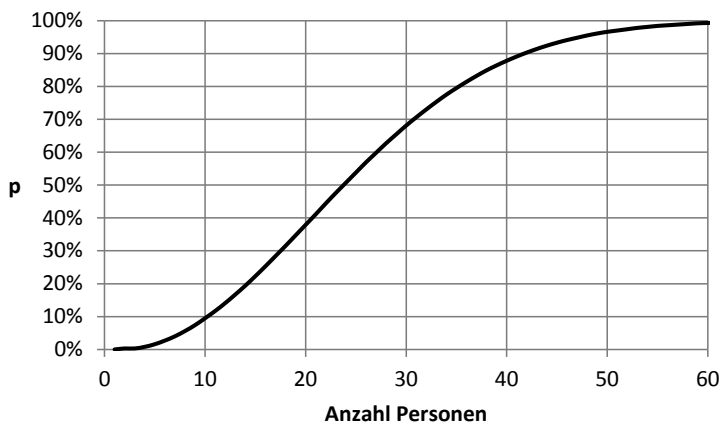
Entscheidend war das Konzept der Zahl „Null“.

Grundsätzlich kann man aus den Potenzen jeder Basis ein Zahlensystem aufbauen und mit denselben Rechenregeln damit rechnen. Neben dem Zehner- oder Dezimalsystem sind auch andere Zahlensysteme wichtig. Wir verwenden für oktal (Basis 8) die Ziffern 0 bis 7 und die Stellenwerte Einer, Achter, Vierundsechziger etc. Bei hexadezimal (Basis 16) verwendet man zusätzlich die Ziffern A = 10, B = 11, C = 12, D = 13, E = 14 und F = 15. Das ist die Bedeutung der Zweitbelegung der Tasten 1 bis 6 mit den Buchstaben A – F beim TI-30X Pro!

Beispiel:

1.25	327 dezimal	= 507 oktal	= 147 hexadezimal
	$= 3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0$	$= 5 \cdot 8^2 + 0 \cdot 8^1 + 7 \cdot 8^0$	$= 1 \cdot 16^2 + 4 \cdot 16^1 + 7 \cdot 16^0$
	$= 3 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 7 \cdot 1$	$= 5 \cdot 64 + 0 \cdot 8 + 7 \cdot 1$	$= 1 \cdot 256 + 4 \cdot 16 + 7 \cdot 1$

Elektronische Rechner arbeiten bekanntlich mit zwei unterscheidbaren Zuständen elektronischer Bausteine und rechnen deshalb im Zweier- oder Binärsystem mit den Ziffern 0 und 1. Weil das für uns unhandlich lange Zahlen gibt, fassen wir 4 solcher „bits“ zu einer



Wie man sieht, nimmt die Wahrscheinlichkeit mit zunehmender Klassengröße rasch zu. Bei 23 Personen beträgt sie bereits über 50%, bei 50 Personen sind 97 % erreicht und bei 60 sind wir bei 99,4 % angelangt!

Der TI-30X Pro berechnet derartige Produkte mit der Funktion **math 6:prod(**. Für 23 Personen bestimmt man diese Wahrscheinlichkeit mit

$$1 - \prod_{x=1}^{22} \left(\frac{365-x}{365} \right) = 0.507297234$$

■ 5.3 Einfache Kombinatorik

Bei der Kombinatorik geht es darum, die Anzahl Zustände (Resultate) zu berechnen, die in bestimmten Fällen möglich sind. Damit lassen sich die Wahrscheinlichkeiten des Eintretens der einzelnen Ereignisse oder Resultate berechnen.

Wie viele 3-stellige Zahlen können mit 3 verschiedenen Ziffern, z. B. 1, 2, 3 gebildet werden?

Bei der ersten Ziffer haben wir die Auswahl aus 3, bei der 2. noch aus 2 Ziffern, und für die letzte gibt es nur noch eine Möglichkeit. Es gibt also $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ Möglichkeiten: 123, 132, 213, 231, 312, 321. Man nennt diese Vertauschungen *Permutationen* der 3 Ziffern.

Definition:

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$ heißt „ n Fakultät“, und es gilt $0! = 1$.

Auf dem TI-30 wird die Fakultät mit der Taste **x!** berechnet, wobei $x \leq 69$ sein muss, da der TI-30 nur Zahlen bis $9,999999999 \cdot 10^{99}$ darstellen kann.

Falls eine Ziffer mehrfach vorkommt, sind natürlich einige der Möglichkeiten gleich bzw. ununterscheidbar. Falls eine Ziffer k -fach vorkommt, sind das $k!$ Möglichkeiten. Mit n Ziffern, unter denen k gleiche sind, kann man noch $n!/k!$ verschiedene n -stellige Zahlen bilden. Mit den Ziffern 1, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 5, 6 können $\frac{12!}{3! \cdot 2! \cdot 4! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!} = 1663200$ verschiedene 12-stellige Zahlen gebildet werden.

Ein wichtiger Spezialfall ist der, wo wir *zwei* Ziffern haben, die je mehrfach vorkommen, oder, sagen wir, p Zeichen „a“ und q Zeichen „b“, die nebeneinander angeordnet werden. Wie viele verschiedene Anordnungen gibt es? Mit den oben angestellten Überlegungen folgt mit $n = p + q$

$$\text{Anzahl} = \frac{n!}{p! \cdot q!} = \frac{n!}{p! \cdot (n-p)!} = \frac{n!}{(n-q)! \cdot q!}$$

Diese *Anzahl Kombinationen* ist dieselbe Größe wie der *Binomialkoeffizient* in 1.5.3, denn es ist zum Beispiel

$$\begin{aligned} (a+b)^3 &= (a+b) \cdot (a+b) \cdot (a+b) \\ &= aaa + aab + aba + abb + baa + bab + bba + bbb \\ &= aaa + \underbrace{aab + aba + baa}_{3a^2b} + \underbrace{abb + bab + bba}_{3ab^2} + bbb \end{aligned}$$

Beim Ausmultiplizieren entstehen alle $2^3 = 8$ möglichen Anordnungen von je einem Element aus jeder Klammer. „aab“, „aba“ und „baa“ sind alle $\frac{3!}{2! \cdot 1!} = 3$ möglichen Anordnungen von 2 „a“ und 1 „b“. Weil es beim Multiplizieren nicht auf die Reihenfolge der Faktoren ankommt (1.3.1), können wir die Terme mit dem gleichen Wert zusammenfassen. Die Binomialkoeffizienten geben an, wie viele das sind.

Wir bezeichnen Binomialkoeffizienten mit dem Symbol „ n über k “,

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{n-k} \quad (5.1)$$

denn $\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot (n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$. Es ist immer $k \leq n$. Der TI-30 berechnet diesen Binomialkoeffizienten durch $n \mathbf{nCr} k =$.

Das Pascal'sche Dreieck können wir mit Binomialkoeffizienten wie folgt darstellen:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & \binom{0}{0} = 1 & & \\ & & & & & & \\ & & \binom{1}{1} = 1 & & \binom{1}{0} = 1 & & \\ & & & & & & \\ & \binom{2}{2} = 1 & & \binom{2}{1} = 2 & & \binom{2}{0} = 1 & \\ & & & & & & \\ \binom{3}{3} = 1 & & \binom{3}{2} = 3 & & \binom{3}{1} = 3 & & \binom{3}{0} = 1 \\ & & & & & & \\ \binom{4}{4} = 1 & & \binom{4}{3} = 4 & & \binom{4}{2} = 6 & & \binom{4}{1} = 4 & & \binom{4}{0} = 1 \end{array}$$

etc.

Beispiele:

- 5.9 Wie viele 3-stellige Zahlen kann man aus 7 verschiedenen Ziffern bilden? Mit der gleichen Überlegung wie weiter oben erhalten wir: Bei der ersten Ziffer haben wir die Auswahl aus 7, bei der zweiten aus 6, bei der dritten aus 5, also $7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$ Möglichkeiten. Diese Größe, die Anzahl Permutationen von 3 Elementen aus 7, wird beim TI-30 mit der Taste **nPr** berechnet, $7 \text{ nPr } 3 = 210$.
- 5.10 Um beim Zahlenlotto 6 Zahlen aus 45 zu ziehen, gibt es $45 \text{ nPr } 6 = 5\,864\,443\,200$ Möglichkeiten. Davon unterscheiden sich jeweils $6! = 720$ nur durch die Reihenfolge, es bleiben also noch $8\,145\,060$ Möglichkeiten, wenn wir die Reihenfolge außer acht lassen. Diese Größe ist wieder dieselbe wie der Binomialkoeffizient, denn

$$\frac{45 \cdot 44 \cdot 43 \cdot 42 \cdot 41 \cdot 40}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = \frac{45!}{39! \cdot 6!} = \binom{45}{39} = \binom{45}{6} = 8145060.$$

■ 5.4 Binomialverteilung

5.4.1 Grundlagen

Eine Wahrscheinlichkeit ist eine Zahl zwischen 0 und 1, die ein Maß für das Eintreten eines bestimmten Ereignisses ist, beispielsweise ob eine geworfene Münze mit der Kopf- oder Zahlseite nach oben zu liegen kommt oder ob ein Kind ein Knabe oder Mädchen ist. Bei Wahrscheinlichkeit 0 tritt ein Ereignis nie ein, bei 1 immer. Bei einer idealen Münze ist die Wahrscheinlichkeit für Kopf und für Zahl beide Male 0,5 oder 50 %. Die Wahrscheinlichkeit für entweder Kopf oder Zahl ist $0,5 + 0,5 = 1$, denn es kommt immer entweder Kopf oder Zahl heraus (die entfernte Möglichkeit „Kante“ vernachlässigen wir hier bewusst).

Den Geburtenregistern entnimmt man, dass ein Kind mit der Wahrscheinlichkeit $p_K = 0,52$ ein Knabe und mit $p_M = 0,48$ ein Mädchen ist. (Die Natur hat das vermutlich so eingestellt, weil die Kindersterblichkeit bei Knaben leicht höher ist.) Eine Familie mit drei Kindern kann also wie folgt zusammengesetzt sein:

Familie	Reihenfolge	Wahrscheinlichkeit	Möglichkeiten
3 Knaben	KKK	$p_K \cdot p_K \cdot p_K = p_K^3$	1
2 Knaben, 1 Mädchen	KKM	$p_K \cdot p_K \cdot p_M = p_K^2 \cdot p_M$	3
	KMK	$p_K \cdot p_M \cdot p_K = p_K^2 \cdot p_M$	
	MKK	$p_M \cdot p_K \cdot p_K = p_K^2 \cdot p_M$	
1 Knabe, 2 Mädchen	KMM	$p_K \cdot p_M \cdot p_M = p_K \cdot p_M^2$	3
	MKM	$p_M \cdot p_K \cdot p_M = p_K \cdot p_M^2$	
	MMK	$p_M \cdot p_M \cdot p_K = p_K \cdot p_M^2$	
3 Mädchen	MMM	$p_M \cdot p_M \cdot p_M = p_M^3$	1
Total			8

Die Wahrscheinlichkeit für 3 Knaben beträgt also $p_K^3 = 0,14$, die für 2 Knaben und 1 Mädchen beträgt $3 \cdot p_K^2 \cdot p_M = 0,39$, die für 1 Knaben und 2 Mädchen beträgt $3 \cdot p_K \cdot p_M^2 = 0,36$, die für 3 Mädchen beträgt $p_M^3 = 0,11$. Zusammen gibt das wieder 1.

Wenn wir den Ausdruck $(p_K + p_M) \cdot (p_K + p_M) \cdot (p_K + p_M)$ ausmultiplizieren, wo die erste Klammer das erste Kind bedeutet, die zweite das zweite usw., erhalten wir (vgl. 1.5.3 und 5.3)

$$\begin{aligned}
 (p_K + p_M)^3 &= p_K^3 + 3 \cdot p_K^2 \cdot p_M + 3 \cdot p_K \cdot p_M^2 + p_M^3 \\
 &= \underbrace{\binom{3}{3} \cdot p_K^3 \cdot p_M^0}_{\text{Wsk für 3 Knaben und 0 Mädchen}} + \underbrace{\binom{3}{2} \cdot p_K^2 \cdot p_M^1}_{\text{Wsk für 2 Knaben und 1 Mädchen}} + \underbrace{\binom{3}{1} \cdot p_K^1 \cdot p_M^2}_{\text{Wsk für 1 Knaben und 2 Mädchen}} + \underbrace{\binom{3}{0} \cdot p_K^0 \cdot p_M^3}_{\text{Wsk für 0 Knaben und 3 Mädchen}} \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

also gerade sämtliche in der Tabelle enthaltenen Möglichkeiten. Die Anzahlen der verschiedenen Möglichkeiten sind die bekannten Binomialkoeffizienten. Der Ausdruck hat offensichtlich den Wert 1, weil $p_K + p_M = 1$. Das entspricht der Tatsache, dass die Wahrscheinlichkeit 1 ist, bei 3 Kindern irgend eines der Resultate (3K, 2K+1M, 1K+2M, 3M) zu erhalten.

Wir können jetzt verallgemeinern und zusammenfassen:

Wenn wir n unabhängige Ereignisse haben, von denen jedes entweder mit der Einzelwahrscheinlichkeit p_A das Resultat A oder mit der Einzelwahrscheinlichkeit p_B das Resultat B erzeugt, wobei $p_A + p_B = 1$, so ist die Wahrscheinlichkeit für k Ereignisse A

$$p(k) = \binom{n}{k} \cdot p_A^k \cdot p_B^{n-k} = \binom{n}{k} \cdot p_A^k \cdot (1 - p_A)^{n-k} \quad (5.2)$$

Dieser Ausdruck entspricht natürlich, was gleichbedeutend ist, auch der Wahrscheinlichkeit für $n - k$ Ereignisse B . Man nennt diese Verteilung eine *Binomialverteilung* oder *Bernoulliverteilung*¹⁹. Sie ist überall anwendbar, wo Ereignisse *zwei mögliche Resultate* haben.

Beim TI-30X Pro ist $p(k)$ als Funktion **distr Binomialpdf** programmiert. Wird für x LIST gewählt, kann die Funktion für Werte in der Datentabelle ausgewertet und in einer anderen Spalte der Datentabelle abgelegt werden, für ALL wird die Funktion für alle k mit $0 \leq k \leq n \leq 41$ ausgewertet und kann ebenfalls in der Datentabelle abgespeichert werden (die Datentabelle hat maximal 42 Zeilen).

¹⁹ Jakob Bernoulli, Basler Mathematiker, 1654 – 1705: *Ars Coniectandi* (1713 posthum erschienen)

Auf unser Beispiel 5.1 übertragen, heißt das:

Ereignis	entspricht	Münzenwurf
Resultat A	entspricht	Kopf
Resultat B	entspricht	Zahl
p_A	entspricht	0,5
p_B	entspricht	0,5

Die im Beispiel gefundenen Werte müssten „theoretisch“ also wie folgt erwartet werden:

Köpfe	Anzahl	theor. Wahrscheinlichkeit	theoretisch erwartet
0	38	$1 \cdot 0,5^0 \cdot 0,5^5 = 0,03125$	$1000 \cdot 0,03125 = 31,25$
1	144	$5 \cdot 0,5^1 \cdot 0,5^4 = 0,15625$	$1000 \cdot 0,15625 = 156,25$
2	342	$10 \cdot 0,5^2 \cdot 0,5^3 = 0,31250$	$1000 \cdot 0,3125 = 312,50$
3	287	$10 \cdot 0,5^3 \cdot 0,5^2 = 0,31250$	$1000 \cdot 0,3125 = 312,50$
4	164	$5 \cdot 0,5^4 \cdot 0,5^1 = 0,15625$	$1000 \cdot 0,15625 = 156,25$
5	25	$1 \cdot 0,5^5 \cdot 0,5^0 = 0,03125$	$1000 \cdot 0,03125 = 31,25$
Total	1000	1,00000	1000,00

Woher kommen in der Realität Abweichungen von der Theorie? Zufällige Abweichungen treten als Folge der sog. *Streuung* immer auf, die sind aber bei jeder Wiederholung des Versuchs anders. Bei systematischen Abweichungen muss geargwöhnt werden, dass nicht alle Münzen perfekt sind, d.h. die Wahrscheinlichkeit für Kopf und Zahl nicht bei allen Münzen genau 0,5 ist. (Außerdem gibt es neben „Kopf“ und „Zahl“ auch eine ganz kleine Wahrscheinlichkeit für „Rand“!)

In 5.8.1 gehen wir der Frage nach, ob in der Realität beobachtete Abweichungen plausibel als Werk des „Zufalls“ erklärt werden können oder nicht.

5.4.2 Anwendungsbeispiel: Qualitätskontrolle

Ein Händler kauft eine Ladung Äpfel. Der Preis basiert darauf, dass nicht mehr als 4 % der Äpfel fleckig sind. Wie kann man diese Anforderung „vernünftig“ prüfen, ohne jeden Apfel einzeln zu begutachten?

Lösung: Man prüft eine *Stichprobe*.

Jeder Apfel kann entweder fleckig sein oder nicht. Die angenommene Wahrscheinlichkeit für „fleckig“ ist 4 % oder 0,04, die für „gut“ damit 0,96. Wir wollen berechnen, wie viele Äpfel unter dieser Annahme in einer zufällig gewählten Stichprobe von 30 in 95 % der Fälle höchstens fleckig sein dürfen.

Die Wahrscheinlichkeit, dass von den 30 Äpfeln k fleckig sind, beträgt

k	$p(k)$	Summe
0	$p(0) = \binom{30}{0} \cdot 0.04^0 \cdot 0.96^{30} = 0.294$	0,294
1	$p(1) = \binom{30}{1} \cdot 0.04^1 \cdot 0.96^{29} = 0.367$	0,661
2	$p(2) = \binom{30}{2} \cdot 0.04^2 \cdot 0.96^{28} = 0.222$	0,883
3	$p(3) = \binom{30}{3} \cdot 0.04^3 \cdot 0.96^{27} = 0.086$	0,969
4	$p(4) = \binom{30}{4} \cdot 0.04^4 \cdot 0.96^{26} = 0.024$	0,994

Mit 96,9% Wahrscheinlichkeit sind also höchstens 3 (entweder 0 oder 1 oder 2 oder 3) der 30 Äpfel fleckig. Die Wahrscheinlichkeit für 4 oder mehr fleckige Äpfel beträgt 3,1%, und für 5 oder mehr noch 0,6%. Beim TI-30X Pro: **distr Binomialcdf**.

Wenn wir in der Stichprobe 4 oder mehr fleckige Äpfel finden, haben wir entweder ganz großes Pech bei der Ziehung der Muster gehabt *oder es hat mehr als 4% fleckige Früchte in der Sendung*. Praktisches Vorgehen: Man zieht eine neue Stichprobe. Die Chance, zweimal nacheinander großes Pech bei der Ziehung zu haben, wird vernachlässigbar.

Theoretisch würden wir $30 \cdot 0,04 = 1,2$ fleckige Äpfel erwarten. Da das Resultat ganzzahlig sein muss, erhalten wir die größte Wahrscheinlichkeit für den 1,2 am nächsten liegenden Wert 1.

Bei großen Zahlen ist es einfacher, mit der sogenannten *Poisson-Verteilung*²⁰ zu rechnen, die eine Annäherung an die Binomialverteilung darstellt. Sie ist im TI-30X Pro ebenfalls programmiert. Wir gehen hier nicht auf Details ein.

²⁰ Siméon Denis Poisson, französischer Physiker in Paris, 1781 – 1840

Beispiel:

8.17 Bild 8.1 zeigt eine Ausgangsfunktion sowie ihre erste und zweite Ableitung,

$$f(x) = 0.5x^3 - 3x^2 + 9$$

$$f'(x) = 1.5x^2 - 6x$$

$$f''(x) = 3x - 6$$

Die Funktion f hat bei $x = 0$ ein Maximum und bei $x = 4$ ein Minimum. An diesen Stellen ist die Kurvensteigung = 0. Man sieht, dass die Ableitungsfunktion f' an diesen Stellen den Wert 0 annimmt. Weiter sieht man, dass die Ableitungsfunktion dort > 0 ist, wo die Funktion ansteigt, und dort < 0 ist, wo f abnimmt. Dasselbe wie für f und f' gilt für f' und f'' .

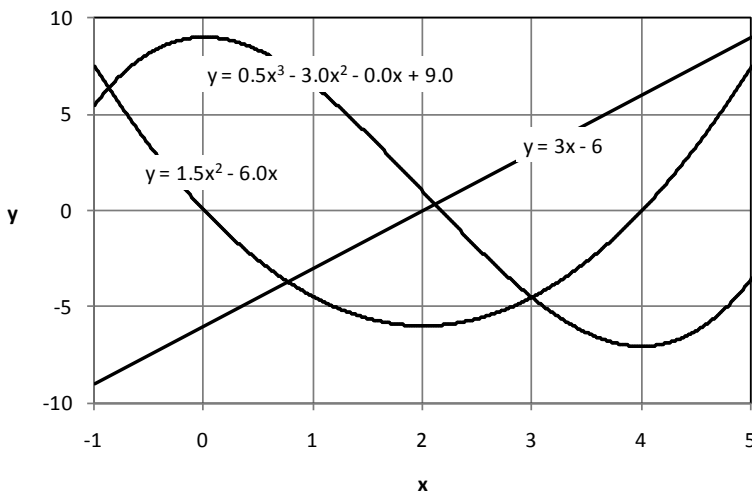


Bild 8.1 Ganzrationale Funktion 3. Grades mit 1. und 2. Ableitung

■ 8.3 Die Bedeutung der 1. bis 3. Ableitung

8.3.1 Maxima

Wir sagen, eine Funktion $f(x)$ habe an der Stelle x_0 ein *Maximum*, wenn für alle Werte $f(x)$ in einer kleinen Umgebung von x_0 gilt: $f(x) < f(x_0)$.

Dabei unterscheiden wir zwischen *lokalen Maxima* und einem *globalen Maximum*.

Bei Betrachtung eines Graphen mit einem Maximum stellen wir fest:

- Beim Maximum selber ist die Kurve horizontal, also ist die Steigung = 0.
- Links vom Maximum steigt die Kurve an, die Steigung ist > 0 .
- Rechts vom Maximum nimmt die Kurve ab, die Steigung ist < 0 .

Zusammengefasst: Wenn wir von links nach rechts über das Maximum fahren, ist die Steigung zuerst positiv, wird immer kleiner, geht durch null und wird dann negativ. Die Steigung nimmt also, ausgehend von einem positiven Wert, laufend ab. Das heißt, dass die *Steigung der Steigung negativ* ist, also $f''(x_0) < 0$.

f hat bei x_0 ein (lokales oder globales) Maximum $\Leftrightarrow f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$.

8.3.2 Minima

Wir sagen, eine Funktion $f(x)$ habe an der Stelle x_0 ein *Minimum*, wenn für alle Werte $f(x)$ in einer kleinen Umgebung von x_0 gilt: $f(x) > f(x_0)$.

Dabei unterscheiden wir zwischen *lokalen Minima* und einem *globalen Minimum*.

Bei Betrachtung eines Graphen mit einem Minimum stellen wir fest:

- Beim Minimum selber ist die Kurve horizontal, also ist die Steigung $= 0$.
- Links vom Minimum nimmt die Kurve ab, die Steigung ist < 0 .
- Rechts vom Minimum steigt die Kurve an, die Steigung ist > 0 .

Zusammengefasst: Wenn wir von links nach rechts über das Minimum fahren, ist die Steigung zuerst negativ, geht durch null und wird dann positiv. Die Steigung nimmt also, ausgehend von einem negativen Wert, laufend zu. Das heißt, dass die *Steigung der Steigung positiv* ist, also $f''(x_0) > 0$.

f hat bei x_0 ein (lokales oder globales) Minimum $\Leftrightarrow f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$.

8.3.3 Krümmung

Wir können zwei Arten von Krümmungsverhalten unterscheiden: Linkskrümmung und Rechtskrümmung (wie im Straßenverkehr).

Linkskrümmung:

- Die Steigung nimmt von links nach rechts *zu*. (Das stimmt auch, wenn sie negativ ist und weniger stark negativ wird.)
- Eine Größe, die zunimmt, hat eine positive Steigung.
- Die Steigung der Steigung ist also bei Linkskrümmung positiv.

$f(x)$ ist bei x_0 nach links gekrümmt $\Leftrightarrow f''(x_0) > 0$.

Rechtskrümmung:

- Die Steigung nimmt von links nach rechts *ab*. (Das stimmt auch, wenn sie negativ ist und noch stärker negativ wird.)
- Eine Größe, die abnimmt, hat eine negative Steigung.
- Die Steigung der Steigung ist also bei Rechtskrümmung negativ.

$f(x)$ ist bei x_0 nach rechts gekrümmt $\Leftrightarrow f''(x_0) < 0$.

Sachwortverzeichnis

A

abhängige Variable 95
Abklingen, exponentiell 123
Abkühlung 125
Ableitung 195
Ableitungsfunktion 197
Abschirmung 245
Absolutbetrag 173
Abstoßung 245
Abszisse 95, 112
Achsensymmetrie 108
Addition 16, 19, 175
Additionstheorem 78
adiabatische Zustandsänderung 121
Aktionsprinzip (Newton) 211
algebraische Funktion 94
alternierende Folge 184
Altersbestimmung 125
Amortisation 52
Amortisationsdauer 52
Amplitude 129
Anfangsbedingungen 258
Anfangsglied 184
Angebotsfunktion 112
Anziehungskraft 220
Äquivalenzumformung 35
Arbeit 244
Argument 173
Arkustangens 188
Assoziativgesetz 17
Asymptote 115
Ausgleichsrechnung 160
Auslenkung 244
Ausreißer 151

B

Bakterienwachstum 123
barometrische Höhenformel 257
Basis 22, 26
Bernoulliverteilung 144
Beschleunigung 211
Beta-Zerfall 124
Betrag 173
Bewegungsgleichung 258
Bildungsgesetz 184
Binärsystem 29
Binnendruck 220
Binom 23
Binomialkoeffizient 25, 142
Binomialverteilung 144, 155
Bioverfügbarkeit 257
Blindwiderstand 182
Bogenlänge 241
Bogenmaß 71
Brechungsgesetz 209
Brechungsindex 209
Byte 30

C

chemische Reaktion 125
CORDIC-Algorithmus 189
Coulombkraft 244
Cramer'sche Regel 41

D

deskriptive Statistik 137
Determinante 40
Dezibelskala 29
Dezimalbruch 18

Dezimalsystem 29
Dichte 256
Dielektrizitätskonstante 244
Differenzenquotient 194, 218
Differenzialgleichung 258
Differenzialquotient 195
diskrete Funktion 238, 250, 257
diskrete Variable 147
Diskriminante 43
Distributivgesetz 18
divergent 192
Division 16, 21, 176
Division von Polynomen 115
Doppelbruch 21
Drehstreckung 176

E

Eichung 126
Einheitskreis 73
Einheitsmatrix 39
Einsetzungsmethode 37
Elektron 124
elektrostatische Kraft 245
Elektrotechnik 181
Endglied 184
Energie 244
Erdbeschleunigung 257
erweitern 19
Euler'sche Zahl 27, 122, 205
Exponent 22
Exponentialfunktion 177, 188
exponentiell 255
Extinktionskoeffizient 126
Eytelwein-Seilreibungsformel 254

F

Fakultät 141
Fast Fourier Transform 250
Feder 244
Fehlerellipse 224
Fehlerfortpflanzung 223
Feldstärke 245
Filterung, digital 250
Flächenmoment 243
Fourier-Reihe 249

Freiheitsgrad 150, 157
Frequenz 129
Frequenzspektrum 249, 252
Fundamentalsatz 108

G

ganze Zahlen 15
ganzrationale Funktion 95
Gaskonstante 220, 256
Gauß'sches Fehlerfortpflanzungsgesetz 223
Gauß'sche Zahlenebene 173
Gauß-Verteilung 152
Gegenwahrscheinlichkeit 140
gemeinsames Vielfaches 19
gerade Funktion 108
Geschwindigkeit 211
gleichnamig 19
Gleichung 34, 194, 214
Grad Celsius 131
Grad Fahrenheit 131
Graph 96
Gravitationsfeld 245
Gravitationskonstante 244
Gravitationskraft 244
Grenzwert 192

H

Halbwertszeit 124
harmonische Analyse 249
harmonische Bewegung 129
hexadezimal 30
Horner-Schema 219
Huygens'sches Prinzip 208

I

ideales Gas 220, 256
imaginäre Einheit 172
Imaginärteil 172
Impedanz 182
induktiver Widerstand 182
induktive Statistik 137
Innenwinkel 77
Integral, bestimmtes 231

Integral, unbestimmtes 234
Integrand 231
Integration durch Approximation 237
Integration, partielle 236
Integrationsgrenze 231
Integrationskonstante 234, 255
Integrationsregeln 235
Intervall 55
Intervallhalbierung 194
inverse Matrix 40

J

Joule 159, 244

K

kapazitiver Widerstand 182
Kapital 123
kartesisches Koordinatensystem 95
k.g.V. 19
Klammerausdruck 18
kleinstes gemeinsames Vielfaches 19
Kohlenstoff-14 124
Kombination 142
Kommutativgesetz 16
komplexe Konjugation 173
komplexe Zahl 15, 172
Kondensator 182, 246
kontinuierliche Variable 147
konvergent 192
Konzentrationsbestimmung 126, 209
Korrelation 160
Kosecans 72
Kosinus 72, 188
Kosinussatz 77
Kotangens 72
Kovolumen 220
Kreisbewegung 129
kritischer Punkt 221
kritischer Wert 162
kubische Gleichung 179
Kurvenglättung 250
kürzen 19

L

Lambert-Beer-Gesetz 126
Laufvariable 107
Lichtabsorption 126
Limes 191
lineare Funktion 95
lineare Gleichung 34
lineare Regression 159
Linearfaktor 105, 108, 179, 219
Logarithmensysteme 27
Logarithmus 26, 188, 205
Lösung 214
Luftdruck 119, 256

M

Marktdiagramm 112
Marktgleichgewicht 112
Marktmenge 112
Marktpreis 112
Matrix 39
Maximum 198
Median 151
Minimum 199
Mischungstemperatur 256
Mittelwert 151, 210
Monom 23
Monte-Carlo-Methode 224
Multiplikation 16, 21, 176

N

Nachfragefunktion 113
Näherung 189, 212
Näherungswert 214
natürliche Logarithmen 205
natürliche Zahlen 15
Nenner 18
neutrale Faser 243
Normalform 42
Normalverteilung 152, 238
Normatmosphäre 119
Nullhypothese 162
Nullstelle 97, 105, 108, 194, 214
Numerator 26
Nutzarbeit 122

O

Oberschwingung 249
Ohm'sches Gesetz 182, 247
Ordinate 95, 112

P

Parabel 105
Parameter 42
partielle Ableitung 206
partielle Integration 236
Pascal'sches Dreieck 24, 142
Pearson 160
Periode 127
Periodenlänge 129
periodischer Dezimalbruch 22
Permutation 141
Perzentile 151
Phase 248
Phasenverschiebung 181
Phasenwinkel 82
 π ($\#p\#$), Berechnung 188
Poisson-Verteilung 146
Pol 114
Polarkoordinaten 174
Polygon 102
Polynom 95
polytropische Zustandsänderung 120
Potenz 177
Potenzial 191, 245
Potenzreihe 188, 237
Primfaktor 20
Primzahl 20
Punktsymmetrie 108
 $\#p\#$ -Wert 162

Q

quadratische Funktion 105
Quadratwurzel 25, 215
Qualitätskontrolle 137
Quantile 151
Quartil 151
Quersumme 20

R

radioaktiver Zerfall 124
random walk 118
rationale Zahlen 15
RC-Glied 127, 246
Reaktionsgeschwindigkeit 125
Realteil 172
Rechenschieber 28
reelle Zahlen 15
Reflexion 208
Refraktometer 209
Regula falsi 218
rekursiv 184
Richterskala 29
Romberg-Integration 238
Rückwärtseinschneiden 87
Ruhelage 244

S

Sarrus, Regel von 42
Sattelpunkt 109, 200, 221
Schallmessung 88
Scheinwiderstand 182
Scheitelpunktdarstellung 106
Scheitelspannung 181
Schubstangenverhältnis 213
Schwerpunktastand 244
Schwingung 178
Secans 72
Signifikanzniveau 162
Simplex-Algorithmus 104
Singulärwertzerlegung 37
Sinus 72, 188
Sinussatz 77
Spannung 182, 246
spiegelsymmetrisch 152
Spline-Interpolation 238
Stammfunktion 233
Standardabweichung 150
statistischer Test 163
Steigung 96, 191, 197
Stellenwert 29
Stichprobe 156
Stichprobenplan 163
Stratosphärenengrenze 119

Streuung 145
Strom 182
Student-Verteilung 156
Substitutionsmethode 37
Subtraktion 16, 175
Summenzeichen 107
System linearer Gleichungen 37

T

Tangens 72, 96, 188, 197
Taylorreihe 237
Teilbarkeitsregeln 20
Temperatur 131
Testgröße 161
Tonwahl 250
totales Differenzial 206, 223
Trägheitsmoment 243
Transponieren 39
transzendente Funktion 94
Trapez-Integration 238
Triangulation 88
#t#-Test 163
Turbinenformel 228
#t#-Verteilung 156

U

überbestimmtes Gleichungssystem 37,
157, 210
Umkreis 77
Umsatzfunktion 113
unabhängige Variable 95
uneigentlicher Grenzwert 192
ungerade Funktion 108
unterbestimmtes Gleichungssystem 37, 41

V

Varianz 150, 223

Vektor 39
Verdichtungsverhältnis 121
Vermessungskreis 88
Versicherungswesen 137
Verteilungskurve 153
Vertrauensintervall 156
Vorwärtseinschneiden 86

W

Wachstum, exponentiell 123
Wahrscheinlichkeit 139
Wahrscheinlichkeitsverteilung 152
Wechselkräfte 211
Wechselspannung 181
Wechselstrom 181, 247
Widerstand 182, 246
Winkelfunktionen 72
Winkelgeschwindigkeit 129, 181
Wirkungsgrad 122, 159
Wirkwiderstand 182
Wurzel 25, 177

Z

Zahlensystem 29
Zähler 18
Zeitkonstante 246
Zentraler Grenzwertsatz der Statistik 155,
224
Zielfunktion 102
Zifferwert 29
Zinssatz 51
Zufall 138
zufällige Bewegung 118
Zustandsgleichung 220, 256
zweiseitiger Test 162
zyklometrische Funktionen 131