Algebraische Gleichungen

H. Rapp, J.M. Rapp, *Übungsbuch Mathematik für Fachschule Technik und Berufskolleg*,
DOI 10.1007/978-3-658-07788-4_2,

2.1 Lineare Gleichungen

Lehrbuch Kapitel 3

2.1.1

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Gleichung

$$\frac{2x-1}{7}-\frac{2x-5}{14}=\frac{3x+5}{14}-\frac{4-3x}{21}$$

Wir machen die Brüche gleichnamig und multiplizieren die Gleichung mit dem Hauptnenner.

$$\frac{3\cdot 2\cdot(2x-1)}{3\cdot 2\cdot 7}-\frac{3\cdot(2x-5)}{3\cdot 14}=\frac{3\cdot(3x+5)}{3\cdot 14}-\frac{2\cdot(4-3x)}{2\cdot 21}$$

$$6\cdot(2x-1)-3\cdot(2x-5)=3\cdot(3x+5)-2\cdot(4-3x)$$

$$12x-6-6x+15=9x+15-8+6x$$

$$6x+9=15x+7$$

$$2=9x$$

$$x=\frac{2}{9}$$

$$L=\left\{\frac{2}{9}\right\}$$

2.1.2

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Gleichung

$$\frac{2ax-4a^2}{c}-3x+12a=9c$$

2

Wir multiplizieren die Gleichung mit c und erhalten

$$\begin{aligned}2ax - 4a^2 - 3cx + 12ac &= 9c^2\\ 2ax - 3cx &= 4a^2 - 12ac + 9c^2\\ x \cdot (2a - 3c) &= 4a^2 - 12ac + 9c^2\\ x &= \frac{(2a-3c)^2}{2a-3c} = 2a - 3c\\ L &= \{2a - 3c\}\end{aligned}$$

2.1.3

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Gleichung

$$\frac{3x}{2} + \frac{1}{a} - \frac{a}{2} = x \cdot \left(\frac{1}{a\sqrt{2}} + 1\right)$$

$$\begin{aligned}\frac{3x}{2} - x \cdot \left(\frac{1}{a\sqrt{2}} + 1\right) &= \frac{a}{2} - \frac{1}{a}\\ x \cdot \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{a\sqrt{2}} - 1\right) &= \frac{a \cdot a}{2 \cdot a} - \frac{2}{2 \cdot a}\\ x \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{a\sqrt{2}}\right) &= \frac{a^2 - 2}{2a}\\ x \cdot \left(\frac{a\sqrt{2}}{2 \cdot a\sqrt{2}} - \frac{2}{2 \cdot a\sqrt{2}}\right) &= \frac{a^2 - 2}{2a}\\ x = \frac{(a^2-2) \cdot 2a\sqrt{2}}{2a \cdot (a\sqrt{2} - 2)} &= \frac{(a-\sqrt{2})(a+\sqrt{2}) \cdot 2a\sqrt{2}}{2a \cdot \sqrt{2} \cdot (a - \sqrt{2})} = a + \sqrt{2}\end{aligned}$$

$$\underline{\underline{L = \{a + \sqrt{2}\}}}$$

2.1.4

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Gleichung

$$\frac{2}{x-1} + \frac{3}{x+1} = \frac{9}{x^2-1}$$

Gleichungen, bei denen die Variable im Nenner vorkommt, werden *Bruchgleichungen* genannt. Bei diesen Gleichungen ist zu prüfen, für welche Werte ein Nenner Null werden kann. Diese Zahlenwerte können nicht Lösung sein, denn sie gehören nicht zur Definitionsmenge D.

Zur Bestimmung der Definitionsmenge D setzen wir der Reihe nach die einzelnen Nenner Null und erhalten $x = 1$ und $x = -1$. Damit lautet die Definitionsmenge

$$D = \mathbb{R} \setminus \{1; -1\}$$

Die Gleichung lösen wir, indem wir die Brüche durch Erweitern alle auf den gleichen Nenner – den *Hauptnenner* – bringen und die ganze Gleichung mit diesem Nenner durchmultiplizieren.

Anmerkung
Bei der Berechnung des Hauptnenners genügt es, das kleinste gemeinsame Vielfache (kgV) zu nehmen. Faktoren, die mehrfach vorkommen, werden nur einmal berücksichtigt. So sind in unserem Beispiel die Faktoren $(x-1)$ und $(x+1)$ in (x^2-1) enthalten, so dass wir als Hauptnenner $(x-1)(x+1)$ oder x^2-1 wählen und nicht etwa $(x-1)(x+1)(x^2-1)$.

$$\frac{2\cdot(x+1)}{(x-1)(x+1)} + \frac{3\cdot(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{9}{x^2-1}$$

Die Multiplikation mit dem Hauptnenner führt zu der Gleichung

$$\begin{aligned} 2\cdot(x+1)+3\cdot(x-1) &= 9\\ 2x+2+3x-3 &= 9\\ 5x &= 10 \quad \text{oder} \quad x=2\\ L &= \{2\} \end{aligned}$$

2.1.5

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Gleichung

$$\frac{2}{x+1} + \frac{1}{1-x} = \frac{1}{x}$$

Definitionsmenge $D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 0; 1\}$

Wir machen die Gleichung bruchfrei, indem wir die Brüche wieder gleichnamig machen und die Gleichung mit dem Hauptnenner $(x+1)\cdot(1-x)\cdot x$ multiplizieren.

$$\begin{aligned} \frac{2\cdot(1-x)\cdot x}{(x+1)(1-x)\cdot x} + \frac{1\cdot(x+1)\cdot x}{(1-x)(x+1)\cdot x} &= \frac{1\cdot(x+1)(1-x)}{x(x+1)(1-x)}\\ 2\cdot(1-x)\cdot x + 1\cdot(x+1)\cdot x &= 1\cdot(x+1)(1-x)\\ 2x-2x^2+x^2+x &= 1-x^2\\ 3x &= 1 \quad \text{oder} \quad x=\frac{1}{3}\\ L &= \left\{\frac{1}{3}\right\} \end{aligned}$$

2.1.6

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Gleichung

$$\frac{3}{x-1} - \frac{2}{x-3} + \frac{2x+1}{x^2-4x+3} = 0$$

$$\text{Definitionsmenge } D = \mathbb{R} \setminus \{1; 3\}$$

$$\frac{3(x-3)}{(x-1)(x-3)} - \frac{2(x-1)}{(x-3)(x-1)} + \frac{2x+1}{x^2-4x+3} = 0$$

2

Da $(x-1)(x-3) = x^2 - 4x + 3$ ist, ist dies gleichzeitig der Hauptnenner. Wir multiplizieren mit dem Hauptnenner und erhalten

$$3x - 9 - 2x + 2 + 2x + 1 = 0 \quad \text{oder} \quad 3x - 6 = 0; \; x = 2$$

$$\underline{\underline{L = \{2\}}}$$

2.1.7

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Gleichung

$$\frac{1}{x-2} - \frac{2(x-1)}{(x-2)(x-4)} = \frac{3(x-1)}{(1-x)(x-4)}$$

$$\text{Definitionsmenge } D = \mathbb{R} \setminus \{1; 2; 4\}$$

1. *Lösungsweg*

$$\frac{1}{x-2} = \frac{2(x-1)}{(x-2)(x-4)} + \frac{3(x-1)}{-(x-1)(x-4)}$$

Wir kürzen den letzten Bruchterm mit $(x-1)$ und erweitern mit $(x-2)$:

$$\frac{1}{x-2} = \frac{2(x-1)}{(x-2)(x-4)} - \frac{3(x-2)}{(x-2)(x-4)}$$

$$\frac{1}{x-2} = \frac{2(x-1) - 3(x-2)}{(x-2)(x-4)} = \frac{2x - 2 - 3x + 6}{(x-2)(x-4)}$$

$$\frac{1}{x-2} = \frac{-x+4}{(x-2)(x-4)} = \frac{-(x-4)}{(x-2)(x-4)}$$

Nach dem Kürzen mit $(x-4)$ ergibt sich: $\frac{1}{x-2} = -\frac{1}{x-2} \rightarrow$ Widerspruch, d. h. $\underline{\underline{L = \{\,\}}}$.

Von hier ab könnte die Gleichung aber auch noch weiter bearbeitet werden über einen

2. *Lösungsweg* „Über Kreuz multiplizieren“

$$\frac{1}{x-2} = \frac{-1}{x-2}$$

$$x - 2 = -x + 2$$

$$\underline{x = 2} \notin D, \; \text{d. h. } \underline{\underline{L = \{\,\}}}$$

3. *Lösungsweg*

$$\frac{1\cdot(x-4)}{(x-2)(x-4)}-\frac{2(x-1)}{(x-2)(x-4)}=\frac{3(x-1)}{(1-x)(x-4)}$$
$$\frac{x-4-2x+2}{(x-2)(x-4)}=\frac{3(x-1)}{-(x-1)(x-4)}$$
$$\frac{-x-2}{(x-2)(x-4)}=\frac{-3(x-2)}{(x-2)(x-4)}$$
$$-x-2=-3x+6 \quad \text{oder} \quad 2x=8$$
$$\underline{x=4}\notin D,\ \text{d. h. } \underline{\underline{L=\{\,\}}}$$

2.1.8

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Gleichung

$$\frac{9}{x-11}-\frac{4}{x-13}+\frac{4}{x-4}=\frac{9}{x-7}$$

$$\text{Definitionsmenge } D=\mathbb{R}\setminus\{4;7;11;13\}$$

Bei 4 verschiedenen Nennern fassen wir jeweils 2 Bruchterme auf jeder Seite der Gleichung zusammen, um die Berechnung etwas zu vereinfachen:

$$\frac{9(x-4)}{(x-11)(x-4)}+\frac{4(x-11)}{(x-4)(x-11)}=\frac{4(x-7)}{(x-13)(x-7)}+\frac{9(x-13)}{(x-7)(x-13)}$$
$$\frac{9x-36+4x-44}{x^2-15x+44}=\frac{4x-28+9x-117}{x^2-20x+91}$$
$$\underbrace{(13x-80)(x^2-20x+91)}_{13x^3-260x^2+13\cdot 91x-80x^2+1600x-7280}=\underbrace{(13x-145)(x^2-15x+44)}_{13x^3-13\cdot 15x^2+13x\cdot 44-145x^2+15\cdot 145x-44\cdot 145}$$
$$-340x^2+2783x-7280=-340x^2+2747x-6380$$
$$36x=900;\quad x=25$$

$\underline{\underline{L=\{25\}}}$

2.1.9

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Gleichung

$$\frac{3x-2}{6x-6}-\frac{5x-1}{3x+3}=\frac{7(25-10x+x^2)}{6-6x^2}$$

2

Definitionsmenge $D = \mathbb{R} \setminus \{1; -1\}$

$$\frac{3x-2}{6(x-1)} - \frac{5x-1}{3(x+1)} = \frac{-7(25-10x+x^2)}{6(1-x^2)\cdot(-1)}$$

$$\frac{(3x-2)(x+1)}{6(x-1)(x+1)} - \frac{(5x-1)\cdot 2(x-1)}{3(x+1)\cdot 2(x-1)} = \frac{-7(25-10x+x^2)}{6(x^2-1)}$$

$$(3x-2)(x+1) - (5x-1)\cdot 2(x-1) = -7(25-10x+x^2)$$

$$3x^2-2x+3x-2-(10x^2-2x-10x+2) = -175+70x-7x^2$$

$$70x-13x = 175-4$$

$$57x = 171; \quad x = 3$$

$\underline{\underline{L = \{3\}}}$

2.1.10

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Gleichung

$$\frac{5x^2-x}{3x^2-11x+6} = \frac{2x-1}{x-3} - \frac{x-4}{3x-2}$$

Definitionsmenge $D = \mathbb{R} \setminus \left\{3; \frac{2}{3}\right\}$

$$\frac{5x^2-x}{3x^2-11x+6} = \frac{(2x-1)(3x-2)}{(x-3)(3x-2)} - \frac{(x-4)(x-3)}{(3x-2)(x-3)}$$

$$5x^2-x = (2x-1)(3x-2)-(x-4)(x-3)$$

$$5x^2-x = 6x^2-3x-4x+2-(x^2-4x-3x+12)$$

$$5x^2-x = 5x^2-7x+2+7x-12$$

$$x = 10; \quad \underline{\underline{L = \{10\}}}$$

2.1.11

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Gleichung

$$\frac{6}{x+1} + \frac{5(2x+3)}{2x-3} - 5 = \frac{3x-1}{2x^2-x-3}$$

Definitionsmenge $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-1; \frac{3}{2}\right\}$

$$\frac{6(2x-3)}{(x+1)(2x-3)} + \frac{5(2x+3)(x+1)}{(2x-3)(x+1)} - 5 \cdot \frac{2x^2-x-3}{2x^2-x-3} = \frac{3x-1}{2x^2-x-3}$$

$$6(2x-3) + 5(2x+3)(x+1) - 5(2x^2-x-3) = 3x-1$$

$$12x - 18 + 10x^2 + 25x + 15 - 10x^2 + 5x + 15 = 3x - 1$$

$$39x = -13; \quad x = -\frac{1}{3}$$

$$\underline{\underline{L = \left\{-\frac{1}{3}\right\}}}$$

2.1.12

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Gleichung

$$\frac{3x+4}{3x-4} + \frac{4\left(3x^2-8\right)}{9x^2-16} = \frac{3x}{3x-4} + \frac{4x}{3x+4}$$

Definitionsmenge $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{4}{3}; \frac{4}{3}\right\}$

$$\frac{(3x+4)(3x+4)}{(3x-4)(3x+4)} + \frac{4(3x^2-8)}{9x^2-16} = \frac{3x(3x+4)}{(3x-4)(3x+4)} + \frac{4x(3x-4)}{(3x+4)(3x-4)}$$

$$(3x+4)(3x+4) + 4(3x^2-8) = 3x(3x+4) + 4x(3x-4)$$

$$9x^2 + 24x + 16 + 12x^2 - 32 = 9x^2 + 12x + 12x^2 - 16x$$

$$28x = 16; \quad x = \frac{4}{7}$$

$$\underline{\underline{L = \left\{\frac{4}{7}\right\}}}$$

2.1.13

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Gleichung

$$2 = \frac{35 - \frac{8}{x}}{15 + \frac{16}{x}}$$

$$\text{Definitionsmenge } D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Durch Erweitern mit x beseitigen wir die Doppelbrüche:

$$2 = \frac{\left(35 - \frac{8}{x}\right) \cdot x}{\left(15 + \frac{16}{x}\right) \cdot x}$$

$$2 = \frac{35x - 8}{15x + 16}$$

$$2(15x + 16) = 35x - 8$$

$$30x + 32 = 35x - 8$$

$$5x = 40; \quad x = 8$$

$$\underline{\underline{L = \{8\}}}$$

2.1.14

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Gleichung

$$\frac{\frac{3(3x-1)}{11}}{\frac{6x+1}{5}} = \frac{3}{5}$$

$$\text{Definitionsmenge } D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{6}\right\}$$

$$\frac{5 \cdot 3 \cdot (3x - 1)}{11} = \frac{3 \cdot (6x + 1)}{5}$$

Nach Kürzen durch 3 und „Über-Kreuz-Multiplizieren“:

$$25 \cdot (3x - 1) = 11 \cdot (6x + 1)$$

$$75x - 25 = 66x + 11; \quad 9x = 36; x = 4; \quad \underline{\underline{L = \{4\}}}$$

2.1.15

Berechnen Sie z_1 aus

$$i = \frac{1}{1 + \frac{z_1}{z_3}}; \quad z_3 \neq 0$$

$$i = \frac{1 \cdot z_3}{\left(1 + \frac{z_1}{z_3}\right) \cdot z_3} = \frac{z_3}{z_1 + z_3}$$

$$i \cdot (z_1 + z_3) = z_3; \quad z_1 + z_3 = \frac{z_3}{i}; \quad z_1 = \frac{z_3}{i} - z_3$$

$$\underline{\underline{z_1 = z_3 \left(\frac{1}{i} - 1\right) = z_3 \left(\frac{1 - i}{i}\right)}}$$

2.1.16

Berechnen Sie x aus

$$\frac{\frac{a}{x}+a}{\frac{b}{x}}=\frac{1}{a}; \quad x \neq 0$$

$$\frac{a}{x}+a=\frac{1}{a}\cdot\frac{b}{x}; \quad \frac{a\cdot a}{ax}+\frac{a\cdot ax}{ax}=\frac{b}{ax}; \quad a^2+a^2x=b$$

$$\underline{\underline{x=\frac{b-a^2}{a^2}=\frac{b}{a^2}-1}}$$

2.1.17

Berechnen Sie x aus

$$\frac{ux}{u+v}=u^2+v^2-\frac{vx}{u-v}$$

$$\frac{ux}{u+v}+\frac{vx}{u-v}=u^2+v^2$$

$$\frac{ux(u-v)}{(u+v)(u-v)}+\frac{vx(u+v)}{(u-v)(u+v)}=u^2+v^2$$

$$x\cdot(u^2-uv+vu+v^2)=(u^2+v^2)(u^2-v^2)$$

$$x\cdot(u^2+v^2)=(u^2+v^2)(u^2-v^2)$$

$$\underline{\underline{x=u^2-v^2}}$$

2.1.18

Berechnen Sie R_1 und R_2 aus

$$U_1=\frac{UR_1}{R_1+R_2}-\frac{I}{R_1+R_2}\cdot R_1R_2$$

$$U_1=\frac{UR_1-I\cdot R_1R_2}{R_1+R_2}$$

$$U_1(R_1+R_2)=UR_1-I\cdot R_1R_2$$

$$U_1R_1-UR_1+I\cdot R_1R_2=-U_1R_2$$

$$R_1(U_1-U+I\cdot R_2)=-U_1R_2$$

$$R_1=\frac{-U_1R_2}{U_1-U+I\cdot R_2}=\underline{\underline{\frac{U_1R_2}{U-U_1-I\cdot R_2}}}$$

$$U_1R_2+I\cdot R_1R_2=UR_1-U_1R_1$$

$$R_2(U_1+I\cdot R_1)=UR_1-U_1R_1$$

$$\underline{\underline{R_2=\frac{R_1(U-U_1-1)}{U_1+R_1}}}$$

2

2.1.19

Berechnen Sie t_1 aus

$$t \cdot t_1 + t \cdot t_2 = 2t_1 \cdot t_2$$

$$t \cdot t_1 - 2t_1 \cdot t_2 = -t \cdot t_2; \quad t_1(t - 2t_2) = -t \cdot t_2$$

$$\underline{\underline{t_1 = \frac{-t \cdot t_2}{t - 2t_2} = \frac{t \cdot t_2}{2t_2 - t}}}$$

2.1.20

Berechnen Sie $\sin\frac{\alpha}{2}$ aus

$$P = a + \frac{d}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}\right)$$

$$P - a = \frac{d}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}\right); \quad \frac{2(P-a)}{d} = 1 + \frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

$$\frac{2(P-a)}{d} - \frac{1 \cdot d}{d} = \frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}; \quad \frac{2(P-a) - d}{d} = \frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

$$\underline{\underline{\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{d}{2(P-a) - d}}}$$

2.1.21

Berechnen Sie μ aus

$$\sigma = \frac{F}{4\pi h}\left((1-\mu) \cdot \frac{x^2}{x^2 + y^2} - (1-\mu) \cdot \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}\right)$$

$$\frac{4\pi h\sigma}{F} = (1-\mu) \cdot \frac{x^2}{x^2 + y^2} - (1-\mu) \cdot \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\mu = 1 - \frac{4\pi h \cdot \sigma}{F \cdot \left[\frac{x^2}{x^2+y^2} - \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\right]} = 1 - \frac{4\pi h \cdot \sigma}{F \cdot \left[\frac{x^2(x^2+y^2) - 2xy}{(x^2+y^2)^2}\right]}$$

$$\underline{\underline{\mu = 1 - \frac{4\pi h \cdot \sigma \cdot (x^2 + y^2)^2}{F \cdot (x^2(x^2 + y^2) - 2xy)}}}$$

2.1.22

Berechnen Sie a_m aus

$$\lambda = \frac{b}{a_1 + \Delta a + \frac{\Omega k}{a_m}}$$

$$\begin{aligned}
\lambda \cdot \left(a_1 + \Delta a + \frac{\Omega k}{a_m}\right) &= b \\
\lambda a_1 + \lambda \Delta a + \frac{\lambda \Omega k}{a_m} &= b \\
\frac{\lambda \Omega k}{a_m} &= b - \lambda a_1 - \lambda \Delta a \\
\underline{\underline{a_m = \frac{\lambda \Omega k}{b - \lambda a_1 - \lambda \Delta a}}}
\end{aligned}$$

2.2 Quadratische Gleichungen

Lehrbuch Kapitel 8

Wir unterscheiden zwischen drei Arten von *quadratischen Gleichungen*.

1) $x^2 + px = 0$ (defektquadratische Gleichung):
Lösung durch Ausklammern von x und Nullsetzen der Faktoren

$$x \cdot (x + p) = 0 \rightarrow \underline{\underline{x = 0 \vee x = -p}}$$

2) $x^2 - q = 0$ (reinquadratische Gleichung):
Lösung durch Faktorisieren oder Radizieren:

$$x^2 = q; \quad \sqrt{x^2} = \sqrt{q}; \quad |x| = \sqrt{q}$$
$$\underline{\underline{x_{1/2} = \pm\sqrt{q}}}$$

3) $x^2 + px + q = 0$ (allgemeine quadrat. Gleichung):
Lösung mit Hilfe der „Lösungsformel“

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

2

2.2.1

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Gleichung

$$9x^2 - 108x = 0$$

$$x \cdot (9x - 108) = 0$$

Das Nullsetzen der Faktoren führt zu den Ergebnissen: $x_1 = 0 \vee x_2 = 12$; $\underline{\underline{L = \{0; 12\}}}$

2.2.2

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Gleichung

$$9x^2 = 72$$

$$9x^2 = 72; \quad x^2 = \frac{72}{9} = 8;$$
$$x_{1/2} = \pm\sqrt{8} = \pm\sqrt{4 \cdot 2} = \pm 2\sqrt{2}$$
$$\underline{\underline{L = \{2\sqrt{2}; -2\sqrt{2}\}}}$$

2.2.3

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Gleichung

$$\frac{2}{11} = \frac{66}{x^2 + 2}$$

Das Kürzen durch den Faktor 2 und das „Überkreuz-Multiplizieren", das der Multiplikation mit dem Hauptnenner entspricht, führt zu dem Ergebnis

$$x^2 + 2 = 11 \cdot 33; \quad x^2 = 363 - 2 = 361;$$
$$x_{1/2} = \pm\sqrt{361} = \pm 19$$
$$\underline{\underline{L = \{-19; 19\}}}$$

2.2.4

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Gleichung

$$(x + 2)^2 = 169$$

Wir ziehen auf jeder Seite der Gleichung die Wurzel und erhalten

$$\begin{aligned}
\sqrt{(x+2)^2} &= \sqrt{169} \\
|x+2| &= 13 \\
\pm(x+2) &= 13 \quad \text{oder} \quad x+2 = \pm 13; \\
x_1 &= -13-2 = -15; \quad x_2 = +13-2 = 11 \\
&\underline{\underline{L = \{-15; 11\}}}
\end{aligned}$$

2.2.5

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Gleichung

$$5x^2 + 10x = 40$$

$$\begin{aligned}
5x^2 + 10x &= 40 \quad |:5 \\
x^2 + 2x - 8 &= 0 \\
x_{1/2} &= -1 \pm \sqrt{1+8} = -1 \pm 3 \\
&\underline{\underline{L = \{2; -4\}}}
\end{aligned}$$

2.2.6

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Gleichung

$$3x^2 + 9x - 12 = 0$$

$$\begin{aligned}
3x^2 + 9x - 12 &= 0 \quad |:3 \\
x^2 + 3x - 4 &= 0 \\
x_{1/2} &= -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 4} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{4 \cdot 4}{4}} = -\frac{3}{2} \pm \frac{5}{2}; \\
&\underline{\underline{L = \{1; -4\}}}
\end{aligned}$$

2.2.7

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Gleichung

$$(x-7)^2 = 4x - 7$$

$$\begin{aligned}
x^2 - 14x + 49 &= 4x - 7 \\
x^2 - 18x + 56 &= 0 \\
x_{1/2} &= 9 \pm \sqrt{81 - 56} = 9 \pm 5 \\
&\underline{\underline{L = \{4; 14\}}}
\end{aligned}$$

2

2.2.8

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Gleichung

$$x^2 - 4{,}26x + 0{,}5369 = 0$$

$$x_{1/2} = 2{,}13 \pm \sqrt{2{,}13^2 - 0{,}5369} = 2{,}13 \pm 2$$
$$\underline{\underline{L = \{0{,}13; 4{,}13\}}}$$

2.2.9

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Gleichung

$$3{,}5x^2 = 8{,}91x^2 - 5{,}41x - 10{,}82$$

$$5{,}41x^2 - 5{,}41x - 10{,}82 = 0 \quad |:5{,}41$$
$$x^2 - x - 2 = 0$$
$$x_{1/2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{2 \cdot 4}{4}} = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}$$
$$\underline{\underline{L = \{-1; 2\}}}$$

2.2.10

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Gleichung

$$x \cdot \left(6{,}93x - \frac{16{,}17}{x}\right) = 2{,}31x^2 \cdot \left(\frac{3}{x} + 2\right) + 6{,}93$$

$$x \cdot \left(6{,}93x - \frac{16{,}17}{x}\right) = 2{,}31x^2 \cdot \left(\frac{3}{2} + 2\right) + 6{,}93$$
$$6{,}93x^2 - 16{,}17 = 6{,}93x + 4{,}62x^2 + 6{,}93$$
$$2{,}31x^2 - 6{,}93x - 23{,}1 = 0 \quad |:2{,}31$$
$$x^2 - 3x - 10 = 0$$
$$x_{1/2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 10} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{10 \cdot 4}{4}} = \frac{3}{2} \pm \frac{7}{2}$$
$$\underline{\underline{L = \{-2; 5\}}}$$

2.2.11

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Gleichung

$$\frac{7x}{13x-280} = \frac{35}{x-13}$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{280}{13}; 13\right\}$$

$$\begin{aligned}
\frac{7x}{13x-280} &= \frac{35}{x-13} \\
7x^2 - 91x &= 455x - 9800 \\
7x^2 - 546x + 9800 &= 0 \quad | : 7 \\
x^2 - 78x + 1400 &= 0 \\
x_{1/2} = 39 \pm \sqrt{39^2 - 1400} &= 39 \pm \sqrt{121} = 39 \pm 11
\end{aligned}$$

$$\underline{\underline{L = \{28; 50\}}}$$

2.2.12

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Gleichung

$$\frac{x(x-50)}{7(x+a)} + \frac{a(48-a)}{7x+7a} = \frac{-7}{a+x}$$

$$\begin{aligned}
\frac{x(x-50)}{7(x+a)} + \frac{a(48-a)}{7x+7a} &= \frac{-7}{a+x} \quad | \cdot 7(x+a) \\
x^2 - 50x + 48a - a^2 &= -49 \\
x^2 - 50x + 48a - a^2 + 49 &= 0 \\
x_{1/2} = 25 \pm \sqrt{25^2 + a^2 - 48a - 49} &= 25 \pm \sqrt{576 - 48a + a^2} \\
x_{1/2} = 25 \pm \sqrt{(24-a)^2} &= 25 \pm (24-a)
\end{aligned}$$

$$\underline{\underline{L = \{(1+a); (49-a)\}}}$$

2.2.13

Lösen Sie die folgende Gleichung nach d auf

$$x = \frac{D^2 - d^2 + a^2}{4(D-d)}$$

2

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{D^2 - d^2 + a^2}{4(D-d)} \qquad | \cdot 4(D-d) \\
4xD - 4xd &= D^2 - d^2 + a^2 \\
d^2 - 4xd + 4xD - D^2 - a^2 &= 0 \\
\underline{\underline{d_{1/2} = 2x \pm \sqrt{4x^2 + D^2 + a^2 - 4xD}}}
\end{aligned}
$$

2.2.14

Lösen Sie die folgende Gleichung nach d_{wg} auf

$$L_w = 2e + 1{,}57(d_{wg} + d_{wv}) + \frac{(d_{wg} + d_{wv})^2}{4e}$$

$$
\begin{aligned}
&L_w = 2e + 1{,}57(d_{wg} + d_{wv}) + \frac{(d_{wg} + d_{wv})^2}{4e} \qquad | \cdot 4e \\
&4eL_w - 8e^2 = 6{,}28e \cdot d_{wg} + 6{,}28e \cdot d_{wv} + d_{wg}^2 + 2d_{wv}d_{wg} + d_{wv}^2 \\
&d_{wg}^2 + (6{,}28e + 2d_{wv})d_{wg} + 8e^2 - 4eL_w + d_{wv}^2 = 0 \\
&\underline{\underline{(d_{wg})_{1/2} = -(3{,}14e + d_{wv}) \pm \sqrt{(3{,}14e + d_{wv})^2 + 4eL_w - 8e^2 - d_{vw}^2}}}
\end{aligned}
$$

2.2.15

Lösen Sie die folgende Gleichung nach $\tan\chi$ auf

$$y_M = \frac{T}{4}\left[\frac{1}{\tan\chi} - \tan\chi\right] + \frac{u}{8}\left[\tan\chi + \frac{1}{\tan\chi}\right]$$

$$
\begin{aligned}
y_M &= \frac{T}{4}\left[\frac{1}{\tan\chi} - \tan\chi\right] + \frac{u}{8}\left[\tan\chi + \frac{1}{\tan\chi}\right] \qquad | \cdot 8 \cdot \tan\chi \\
&8y_M \cdot \tan\chi = 2T - 2T \cdot \tan^2\chi + u \cdot \tan^2\chi + u \\
&(2T - u) \cdot \tan^2\chi + 8y_M \cdot \tan\chi - 2T - u = 0 \\
&\tan^2\chi + \frac{8y_M}{2T-u} \cdot \tan\chi - \frac{2T+u}{2T-u} = 0 \\
&\underline{\underline{(\tan\chi)_{1/2} = \frac{4y_M}{u-2T} \pm \sqrt{\left(\frac{4y_M}{u-2T}\right)^2 + \frac{2T+u}{2T-u}}}}
\end{aligned}
$$

2.2.16

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Gleichung

$$x^4 - 8x^2 + 7 = 0$$

Dies ist eine *biquadratische Gleichung*. Sie lässt sich aber durch die Substitution $u = x^2$ in eine quadratische Gleichung umformen, die wir mit der Lösungsformel lösen können.

$$(x^2)_{1/2} = 4 \pm \sqrt{16-7} = 4 \pm 3$$

Wir erhalten als Zwischenergebnis zwei quadratische Gleichungen.

Aus $x^2 = 4 - 3 = 1$ erhalten wir $x_1 = 1 \vee x_2 = -1$.

Aus $x^2 = 4 + 3 = 7$ erhalten wir $x_3 = \sqrt{7} \vee x_4 = -\sqrt{7}$. Damit ist die Lösungsmenge

$$\underline{\underline{L = \{1; -1; \sqrt{7}; -\sqrt{7}\}}}$$

2.2.17

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Gleichung

$$5x^4 - 30x^2 + 25 = 0$$

$$\begin{aligned}
5x^4 - 30x^2 + 25 &= 0 \quad | :5 \\
x^4 - 6x^2 + 5 &= 0 \\
(x^2)_{1/2} &= 3 \pm \sqrt{9-5} = 3 \pm 2 \\
x_{1/2} &= \pm 1 \quad \text{oder} \quad x_{3/4} = \pm\sqrt{5} \\
\underline{\underline{L = \{1; -1; \sqrt{5}; -\sqrt{5}\}}}
\end{aligned}$$

2.2.18

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Gleichung

$$x^2 + \frac{15}{x^2} - 16 = 0; \quad x \neq 0$$

$$\begin{aligned}
x^2 + \frac{15}{x^2} - 16 &= 0 \quad | \cdot x^2 \\
x^4 + 15 - 16x^2 &= 0 \\
x^4 - 16x^2 + 15 &= 0 \\
(x^2)_{1/2} &= 8 \pm \sqrt{64-15} = 8 \pm 7 \\
x_{1/2} &= \pm 1 \quad \text{oder} \quad x_{3/4} = \pm\sqrt{15} \\
\underline{\underline{L = \left\{1; -1; \sqrt{15}; -\sqrt{15}\right\}}}
\end{aligned}$$

2.2.19

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Gleichung

$$x^2 + \frac{36}{x^2} = 13; \quad x \neq 0$$

$$x^2 + \frac{36}{x^2} = 13$$

$$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$$

$$(x^2)_{1/2} = 6{,}5 \pm \sqrt{42{,}25 - 36} = 6{,}5 \pm \sqrt{6{,}25} = 6{,}5 \pm 2{,}5$$

$$\underline{\underline{L = \{2; -2; 3; -3\}}}$$

2.2.20

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Gleichung

$$5{,}3x^2 + \frac{63{,}6}{x^2} = 42{,}4; \quad x \neq 0$$

$$5{,}3x^2 + \frac{63{,}6}{x^2} = 42{,}4 \quad \Big| \cdot \frac{x^2}{5{,}3}$$

$$x^4 - 8x^2 + 12 = 0; \quad (x^2)_{1/2} = 4 \pm \sqrt{16 - 12} = 4 \pm 2$$

$$\underline{\underline{L = \left\{\sqrt{2}; -\sqrt{2}; \sqrt{6}; -\sqrt{6}\right\}}}$$

2.3 Wurzelgleichungen

Lehrbuch Kapitel 9

1. Quadratwurzeln werden durch Quadrieren eliminiert. Deshalb ist es zweckmäßig, vor dem Quadrieren eine Wurzel zu isolieren, weil sonst bei der Anwendung der binomischen Formel $(\sqrt{a} + b)^2 = a + 2b\sqrt{a} + b^2$ wieder ein Wurzelterm entsteht. Dieses Isolieren einer Wurzel auf einer Seite kann beibehalten werden bis zu Wurzelgleichungen mit maximal 3 Wurzeltermen.
2. Bei 4 Wurzeltermen ist es zunächst zweckmäßiger 2 Wurzelterme auf jeder Seite zu quadrieren und anschließend so zu verfahren wie nach 1), da bei jedem Quadrieren die Potenzen höher werden.
3. Kommen unter der Wurzel schon quadratische oder höhere Potenzterme vor, ist es zweckmäßig, die Wurzeln auf andere Weise zu eliminieren.
4. Da das Quadrieren eine nichtäquivalente Umformung ist, genügt es für die Bestimmung der Lösungsmenge nicht, nur die Definitionsmenge heranzuziehen. Die Lösungen müssen in die Ausgangsgleichung eingesetzt werden und eine wahre Aussage ergeben. Diese Probe ist deshalb immer erforderlich.

2.3.1

Bestimmen Sie die Definitions- und Lösungsmenge der Gleichung

$$\sqrt{3x - 2} = x - 2$$

Quadratwurzeln sind im Reellen ($G = \mathbb{R}$) für negative Radikanden nicht definiert, deshalb muss der Radikand $3x - 2 \geq 0$ oder $x \geq \frac{2}{3}$ sein (vgl. Kapitel über Ungleichungen!).

Damit ist die Definitionsmenge $D = \left\{x \mid x \geq \frac{2}{3}\right\}$.

Die Quadratwurzel lässt sich beseitigen, indem man sie auf einer Seite isoliert und die ganze Gleichung quadriert.

$$
\begin{aligned}
(\sqrt{3x-2})^2 &= (x-2)^2 \\
3x - 2 &= x^2 - 4x + 4 \\
x^2 - 7x + 6 &= 0 \\
x_{1/2} &= \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4} - \frac{6 \cdot 4}{4}} = \frac{7}{2} \pm \frac{5}{2} \\
x_1 &= 1 \vee x_2 = 6
\end{aligned}
$$

Beide Werte gehören zur Definitionsmenge. Da aber das Quadrieren keine Äquivalenzumformung ist, können durch das Quadrieren Lösungen hinzugekommen sein, die nicht Lösung der Wurzelgleichung sind. Wir müssen deshalb zur Kontrolle die erhaltenen Werte in die Ausgangsgleichung einsetzen. Die *Probe* ergibt folgendes Ergebnis:

$$
\begin{aligned}
x_1 = 1&: \quad \sqrt{3 \cdot 1 - 2} = 1 - 2 \quad \text{oder} \quad 1 = -1 \text{ (f)}, \text{ d. h. dies ist keine Lösung} \\
x_2 = 6&: \quad \sqrt{3 \cdot 6 - 2} = 6 - 2 \quad \text{oder} \quad 4 = 4 \text{ (w)}, \text{ d. h. dies ist eine Lösung}
\end{aligned}
$$

Lösungsmenge: $\underline{\underline{L = \{6\}}}$

2.3.2

Bestimmen Sie die Definitions- und Lösungsmenge der Gleichung

$$\sqrt{9 + 8\sqrt{2x-2}} = 5$$

Definitionsmenge $D = \{x \mid x \geq 1\}$

$$
\begin{aligned}
\left(\sqrt{9 + 8\sqrt{2x-2}}\right)^2 &= 25 \\
9 + 8\sqrt{2x-2} &= 25 \\
8\sqrt{2x-2} &= 16 \quad \text{oder} \quad \sqrt{2x-2} = 2 \\
2x - 2 &= 4 \quad \text{oder} \quad x = 3
\end{aligned}
$$

$\underline{\underline{L = \{3\}}}$

2.3.3

Bestimmen Sie die Definitions- und Lösungsmenge der Gleichung

$$2 + \sqrt{2x-3} = \sqrt{3x+7}$$

Hier treten zwei Wurzelterme auf. Die erste Wurzel ist definiert für $D_1 = \{x \mid x \geq \frac{3}{2}\}$, die zweite Wurzel für $D_2 = \{x \mid x \geq -\frac{7}{3}\}$. Damit ist die Definitionsmenge der gesamten Wurzelgleichung $D = \{x \mid x \geq \frac{3}{2}\}$. Dies ist die Schnittmenge von D_1 und D_2.

$$\begin{aligned}
(2+\sqrt{2x-3})^2 &= (\sqrt{3x+7})^2\\
4+4\sqrt{2x-3}+2x-3 &= 3x+7\\
4\sqrt{2x-3} &= x+6\\
16(2x-3) &= x^2+12x+36\\
x^2-20x+84 &= 0\\
x_{1/2} &= 10 \pm \sqrt{100-84} = 10 \pm 4\\
x_1 &= 6 \vee x_2 = 14
\end{aligned}$$

Probe: $\underline{x_1 = 6}$: $\quad 2+\sqrt{2\cdot 6-3} = \sqrt{3\cdot 6+7} \quad$ oder $5 = 5$ (w)

$\underline{x_2 = 14}$: $\quad 2+\sqrt{2\cdot 14-3} = \sqrt{3\cdot 14+7} \quad$ oder $7 = 7$ (w)

$\underline{\underline{L = \{6; 14\}}}$

2.3.4

Bestimmen Sie die Definitions- und Lösungsmenge der Gleichung

$$2\sqrt{x+8} = \sqrt{x-4} + 2\sqrt{2x-7}$$

Die Definitionsmengen der drei Wurzelterme sind $D_1 = \{x \mid x \geq -8\}$, $D_2 = \{x \mid x \geq 4\}$, $D_3 = \{x \mid x \geq \frac{7}{2}\}$. Damit ist die Definitionsmenge der Wurzelgleichung $D = \{x \mid x \geq 4\}$.

$$\begin{aligned}
(2\sqrt{x+8})^2 &= (\sqrt{x-4}+2\sqrt{2x-7})^2\\
4(x+8) &= x-4+4\sqrt{x-4}\cdot\sqrt{2x-7}+4(2x-7)\\
4x+32 &= x-4+4\sqrt{(x-4)(2x-7)}+8x-28\\
64-5x &= 4\sqrt{2x^2-15x+28}\\
4096-640x+25x^2 &= 16(2x^2-15x+28)\\
7x^2+400x-3648 &= 0\\
x^2+\frac{400}{7}x-\frac{3648}{7} &= 0\\
x_1 &= 8 \vee x_2 = -\frac{456}{7} \notin D
\end{aligned}$$

Probe: $\quad 2\sqrt{8+8} = \sqrt{8-4}+2\sqrt{2\cdot 8-7} \quad$ oder $\quad 8 = 8$ (w)

$\underline{\underline{L = \{8\}}}$

2.3.5

Bestimmen Sie die Definitions- und Lösungsmenge der Gleichung

$$\sqrt{x+4}-\sqrt{2x-6}=\sqrt{2x-1}-\sqrt{x-1}$$

Die Definitionsmengen der 4 Wurzelterme sind

$$D_1=\{x\,|\,x\geq -4\},\quad D_2=\{x\,|\,x\geq 3\},$$
$$D_3=\left\{x\,\middle|\,x\geq \frac{1}{2}\right\},\quad D_4=\{x\,|\,x\geq 1\}.$$

Damit ist die Definitionsmenge der Wurzelgleichung $D=\{x\,|\,x\geq 3\}$.

$$x+4+2x-6-2\sqrt{(x+4)(2x-6)}=2x-1+x-1-2\sqrt{(2x-1)(x-1)}$$

Nach Division durch (−2):

$$\sqrt{(x+4)(2x-6)}=\sqrt{(2x-1)(x-1)}$$
$$\sqrt{2x^2+2x-24}=\sqrt{2x^2-3x+1}$$
$$5x=25 \quad \text{oder} \quad x=5$$

Probe: $\sqrt{5+4}-\sqrt{2\cdot 5-6}=\sqrt{2\cdot 5-1}-\sqrt{5-1}$ oder $1=1$ (w)

$\underline{\underline{L=\{5\}}}$

2.3.6

Bestimmen Sie die Definitions- und Lösungsmenge der Gleichung

$$\sqrt{3x+7}+\sqrt{5x+1}=\sqrt{3x-5}+\sqrt{5x+21}$$

Die Definitionsmengen der 4 Wurzelterme sind

$$D_1=\left\{x\,|\,x\geq -\frac{7}{3}\right\},\quad D_2=\left\{x\,\middle|\,x\geq -\frac{1}{5}\right\},$$
$$D_3=\left\{x\,\middle|\,x\geq \frac{5}{3}\right\},\quad D_4=\left\{x\,\middle|\,x\geq -\frac{21}{5}\right\}.$$

Damit ist die Definitionsmenge der Wurzelgleichung $D = \left\{x \mid x \geq \frac{5}{3}\right\}$.

$$
\begin{aligned}
3x+7+5x+1+2\sqrt{(3x+7)(5x+1)} &= 3x-5+5x+21+2\sqrt{(3x-5)(5x+21)} \\
2\sqrt{15x^2+38x+7} &= 8+2\sqrt{15x^2+38x-105} \\
\sqrt{15x^2+38x+7} &= 4+\sqrt{15x^2+38x-105} \\
15x^2+38x+7 &= 16+15x^2+38x-105+8\sqrt{15x^2+38x-105} \\
12 &= \sqrt{15x^2+38x-105} \\
144 &= 15x^2+38x-105 \\
0 &= x^2+\frac{38}{15}x-\frac{83}{5}
\end{aligned}
$$

$$x_{1/2} = -\frac{19}{15} \pm \sqrt{\left(\frac{19}{15}\right)^2+\frac{83\cdot 45}{5\cdot 45}} = -\frac{19}{15} \pm \frac{64}{15}$$

$$x_1 = 3 \vee x_2 = -\frac{83}{15} \notin D$$

Probe: $\sqrt{3\cdot 3+7}+\sqrt{5\cdot 3+1} = \sqrt{3\cdot 3-5}+\sqrt{5\cdot 3+21}$ oder $8 = 8$ (w)

$\underline{\underline{L = \{3\}}}$

2.3.7

Bestimmen Sie die Definitions- und Lösungsmenge der Gleichung

$$\sqrt{x^2-2}+\frac{\sqrt{2}}{x} = \frac{\sqrt{2}}{\frac{x}{3}}; \quad x \neq 0$$

$$
\begin{aligned}
D &= \left\{x \mid x \geq \sqrt{2} \vee x \leq -\sqrt{2}\right\} \\
\sqrt{x^2-2} &= \frac{3\sqrt{2}}{x}-\frac{\sqrt{2}}{x} = \frac{2\sqrt{2}}{x} \\
x^2-2 &= \frac{8}{x^2} \quad \text{oder} \quad x^4-2x^2-8 = 0 \\
(x^2)_{1/2} &= 1 \pm \sqrt{1+8} = 1 \pm 3 \\
x^2 &= 4; \quad x_1 = 2 \vee x_2 = -2 \\
x^2 &= -2 \quad \text{(keine reellen Lösungen)}
\end{aligned}
$$

Probe: $\underline{x_1 = 2}$: $\sqrt{4-2}+\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{\frac{2}{3}}$; $\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ (w)

$\underline{x_2 = -2}$: $\sqrt{4-2}+\frac{\sqrt{2}}{-2} = \frac{3\sqrt{2}}{-2}$; $\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{3\sqrt{2}}{2}$ (f)

$\underline{\underline{L = \{2\}}}$

2.3.8

Bestimmen Sie die Definitions- und Lösungsmenge des Gleichungssystems

$$\left| \begin{aligned} \sqrt{25-x^2}+x &= 6 \\ x\sqrt{25-x^2} &= 9 \end{aligned} \right| \quad \begin{aligned} &(1) \\ &(2) \end{aligned}$$

$$D = \{x \mid |x| \leq 5\}$$

Die Wurzeln lassen sich bei diesem Gleichungssystem mit Hilfe des *Additionsverfahrens* (vgl. Kapitel über Gleichungssysteme!) beseitigen. Dazu muss die Gleichung (1) zuvor mit $(-x)$ multipliziert werden.

$$\left| \begin{aligned} \sqrt{25-x^2}+x &= 6 \\ x\sqrt{25-x^2} &= 9 \end{aligned} \right| \quad \begin{aligned} &(1) \quad | \cdot (-x) \\ &(2) \end{aligned}$$

$$\left| \begin{aligned} -x\sqrt{25-x^2}-x^2 &= -6x \\ x\sqrt{25-x^2} &= 9 \end{aligned} \right| \quad \begin{aligned} &(1') \\ &(2) \end{aligned}$$

$$(1') + (2): \quad -x^2 = -6x + 9 \quad \text{oder} \quad x^2 - 6x + 9 = 0$$

Dies ergibt die Lösungen $x_{1/2} = 3 \pm \sqrt{9-9} = 3$.

Die Probe ist für beide Gleichungen erfüllt, damit erhalten wir die Lösungsmenge

$$\underline{\underline{L = \{3\}}}$$

2.3.9

Bestimmen Sie die Definitions- und Lösungsmenge der Gleichung

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{34-x^2}} = \frac{8}{15}$$

$$D = \{x \mid |x| < \sqrt{34}\}$$

Wir fassen die Brüche auf der linken Seite zusammen und erhalten:

$$\frac{\sqrt{34-x^2}+x}{x \cdot \sqrt{34-x^2}} = \frac{8}{15}$$

Das Quadrieren solcher Wurzelgleichungen führt zu Gleichungen 4. oder höheren Grades, die in der Regel schwer zu lösen sind. Wir wollen deshalb einen anderen Lösungsweg vorschlagen.

Wir betrachten Zähler und Nenner als getrennte Gleichungen, die durcheinander dividiert werden. Dazu müssen wir einen Proportionalitätsfaktor u einführen, denn der Bruch könnte auch gekürzt sein. Die Verknüpfung der beiden Gleichungen erfolgt über ein Gleichungssystem. Auf diese Weise lassen sich mit Hilfe des Additionsverfahrens die Wurzelterme eliminieren.

$$\left| \begin{aligned} \sqrt{34-x^2}+x &= 8u \\ x\sqrt{34-x^2} &= 15u \end{aligned} \right| \quad \begin{aligned} &(1) \quad | \cdot(-x) \\ &(2) \end{aligned}$$

Wir eliminieren die Wurzeln mit Hilfe des Additionsverfahrens.

$$(1') + (2): \quad -x^2 = -8ux + 15u \quad \text{oder} \quad x^2 - 8ux + 15u = 0 \quad (3)$$

Diese Gleichung enthält noch den eingeführten Proportionalitätsfaktor u, den wir auf folgende Weise bestimmen. Wir ziehen von dem Quadrat der Gleichung (1) die mit dem Faktor 2 multiplizierte Gleichung (2) ab und erhalten:

$$\left| \begin{aligned} 34-x^2+x^2+2x\sqrt{34-x^2} &= 64u^2 \\ 2x\sqrt{34-x^2} &= 30u \end{aligned} \right| \quad \begin{aligned} &(1'') \\ &(2') \end{aligned}$$

$$34 = 64u^2 - 30u \quad \text{oder} \quad u^2 - \frac{30}{64}u - \frac{34}{64} = 0 \quad \text{mit den Lösungen}$$

$$u_{1/2} = \frac{15}{64} \pm \sqrt{\frac{225}{64\cdot 64} + \frac{34\cdot 64}{64\cdot 64}} = \frac{15}{64} \pm \sqrt{\frac{2401}{64\cdot 64}} = \frac{15}{64} \pm \frac{59}{64}; \quad u_1 = 1 \vee u_2 = -\frac{17}{32}$$

Setzt man diese Ergebnisse in Gleichung (3) ein, so erhält man

$$\text{mit } \underline{u_1 = 1}: \quad x^2 - 8x + 15 = 0 \quad \text{mit den Lösungen } x_1 = 5 \vee x_2 = 3$$

$$\text{mit } \underline{u_2 = -\frac{17}{32}}: \quad x^2 + \frac{17}{4}x - \frac{255}{32} = 0 \quad \text{mit den Lösungen } x_1 = 1{,}408 \vee x_2 = -5{,}65832$$

Die Probe ergibt, dass nur $x_1 = 5 \vee x_2 = 3$ Lösungen der Wurzelgleichung sind.

$$\underline{\underline{L = \{3; 5\}}}$$

2.3.10

Bestimmen Sie die Definitions- und Lösungsmenge der Gleichung

$$\frac{1}{2x} - \frac{1}{\sqrt{17-4x^2}} = -\frac{3}{4}$$

$$D = \left\{ x \,\middle|\, |x| < \sqrt{\frac{17}{4}} = 2{,}0616 \text{ und } x \neq 0 \right\}$$

Wir fassen die Bruchterme auf der linken Gleichungsseite zusammen und bilden aus Zähler ein Gleichungssystem, aus dem wir die Wurzeln durch das Additionsverfahren eliminieren.

$$\frac{\sqrt{17-4x^2}-2x}{2x\sqrt{17-4x^2}} = -\frac{3}{4}$$

$$\left|\begin{array}{r} \sqrt{17-4x^2}-2x = 3u \\ 2x\sqrt{17-4x^2} = -4u \end{array}\right| \quad \begin{array}{l} (1) \quad |\cdot 2x \\ (2) \end{array}$$

$$(1')-(2): \quad -4x^2 = 6xu + 4u \quad \text{oder} \quad x^2 + \frac{3}{2}xu + u = 0 \quad (3)$$

$$\left|\begin{array}{r} \sqrt{17-4x^2}-2x = 3u \\ 2x\sqrt{17-4x^2} = -4u \end{array}\right| \quad \begin{array}{l} (1) \quad |\text{ Quadrieren der Gleichung} \\ (2) \quad |\cdot 2 \end{array}$$

$$\left|\begin{array}{r} 17-4x^2+4x^2-4x\sqrt{17-4x^2} = 9u^2 \\ 4x\sqrt{17-4x^2} = -8u \end{array}\right| \quad \begin{array}{l} (1') \\ (2') \end{array}$$

$$(1'')+(2''): \quad 17 = 9u^2 - 8u \quad \text{oder} \quad u^2 - \frac{8}{9}u - \frac{17}{9} = 0 \quad \text{mit den Lösungen}$$

$$u_{1/2} = \frac{4}{9} \pm \sqrt{\frac{16}{81} + \frac{17\cdot 9}{9\cdot 9}} = \frac{4}{9} \pm \frac{13}{9}; \quad u_1 = \frac{17}{9}; \quad u_2 = -1$$

Setzt man diese Ergebnisse in Gleichung (3) ein, so erhält man mit

$$\underline{u_1 = \frac{17}{9}}: \quad x^2 + \frac{17}{6}x + \frac{17}{9} = 0 \quad \text{mit den Lösungen}$$

$$x_1 = -\frac{17}{12} + \frac{\sqrt{17}}{12} = \frac{\sqrt{17}-17}{12} = -1{,}07307 \quad \vee$$

$$x_2 = -\frac{17}{12} - \frac{\sqrt{17}}{12} = -\frac{17+\sqrt{17}}{12} = -1{,}76026$$

mit

$$\underline{u_2 = -1}: \quad x^2 - \frac{3}{2}x - 1 = 0 \text{ mit den Lösungen } x_{3/4} = \frac{3}{4} \pm \frac{5}{4}; \quad x_3 = 2 \vee x_4 = -\frac{1}{2}$$

Die Probe ergibt, dass $x_1 = -1{,}07 \vee x_2 = -1{,}76 \vee x_3 = 2$ Lösungen der Wurzelgleichung sind.

$$\underline{\underline{L = \{-1{,}07; -1{,}76; 2\}}}$$

2.3.11

Bestimmen Sie die Lösungsmenge des Gleichungssystems

$$\left|\begin{array}{r} 4\sqrt{x} - 3\sqrt{y} = 5 \\ \sqrt{x} + 9\sqrt{y} = 11 \end{array}\right|$$

2

$$\left| \begin{array}{r} 4\sqrt{x} - 3\sqrt{y} = 5 \\ \sqrt{x} + 9\sqrt{y} = 11 \end{array} \right| \begin{array}{l} (1) \quad | \cdot 3 \\ (2) \end{array}$$

$(1') + (2)$: $\quad 13\sqrt{x} = 26$

$\sqrt{x} = 2; \quad x = 4$

(3) in (1): $\quad 8 - 3\sqrt{y} = 5$

$3 = 3\sqrt{y}; \quad y = 1$

$\underline{\underline{L = \{(4; 1)\}}}$

2.3.12

Bestimmen Sie die Lösungsmenge des Gleichungssystems

$$\left| \begin{array}{r} \dfrac{8}{\sqrt{x+1}} - \dfrac{6}{\sqrt{y+4}} = 2 \\ \dfrac{4}{\sqrt{x+1}} + \dfrac{9}{\sqrt{y+4}} = 5 \end{array} \right|$$

$$\left| \begin{array}{r} \dfrac{8}{\sqrt{x+1}} - \dfrac{6}{\sqrt{y+4}} = 2 \\ \dfrac{4}{\sqrt{x+1}} + \dfrac{9}{\sqrt{y+4}} = 5 \end{array} \right| \begin{array}{l} (1) \\ (2) \quad | \cdot 2 \end{array}$$

$(1) - (2')$: $\quad \dfrac{-24}{\sqrt{y+4}} = -8$

$3 = \sqrt{y+4}$

$9 = y + 4$

$y = 5 \quad (3)$

(3) in (1): $\quad \dfrac{8}{\sqrt{x+1}} - 2 = 2$

$2 = \sqrt{x+1}$

$4 = x + 1; \quad x = 3$

$\underline{\underline{L = \{(3; 5)\}}}$

http://www.springer.com/978-3-658-07787-7

Übungsbuch Mathematik für Fachschule Technik und Berufskolleg
Anwendungsorientierte Aufgaben mit ausführlichen Lösungen
Rapp, H.; Rapp, J.M.
2015, IX, 421 S. 11 Abb., Softcover
ISBN: 978-3-658-07787-7