

Gegenseitige Lage von Geraden

An den Richtungsvektoren zweier Geraden erkennt man, ob die Geraden parallel bzw. identisch sind oder ob sie sich schneiden bzw. windschief sind.

Beispiel 1: Bei den beiden Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $k: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$

sind die **Richtungsvektoren Vielfache voneinander**, g und k sind also **parallel oder identisch**. Da der Stützvektor von g , zu dem der Punkt $P(2|1|0)$ gehört, nicht auf k liegt, sind die beiden Geraden parallel.

Sind die beiden **Richtungsvektoren keine Vielfachen voneinander**, **schneiden** sich die Geraden oder sind **windschief**. Wie viele **gemeinsame Punkte** zwei Geraden haben, überprüft man, in dem man die rechten Seiten der Geradengleichungen gleichsetzt und das Gleichungssystem löst.

Beispiel 2:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Aufstellen des LGS:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ bzw. } s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Das LGS hat keine Lösung, g und h sind entweder parallel oder windschief. Da die beiden Richtungsvektoren keine Vielfachen voneinander sind, sind die beiden Geraden windschief.

```
rref([A])
[[1 -2 3 ]
 [4 -3 -1]
 [3 1 -2]]
[[1 0 0]
 [0 1 0]
 [0 0 1]]
```

Beispiel 3:

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ und } k: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$$

haben einen gemeinsamen Punkt, da das

$$\text{dazugehörige LGS } t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

genau eine Lösung besitzt: $t = 0$ und $r = 1$. Der Schnittpunkt liegt also bei $S(0|6|5)$.

```
rref([A])
[[1 0 0]
 [0 1 1]
 [0 0 0]]
```

Bemerkung: Bei diesen Aufgaben müssen Sie darauf achten, dass die Parameter der beiden Geraden unterschiedlich bezeichnet sind. Benennen Sie ggf. einen Parameter um.

1 Bestimmen Sie anhand der Vektoren, welche Aussage jeweils zutrifft, und kreuzen Sie an.

	Geraden scheiden sich	Geraden sind parallel	Geraden sind windschief
a) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
b) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
c) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
d) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
e) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 13,5 \\ -27 \end{pmatrix}, h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1,5 \\ 3 \end{pmatrix}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
f) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>