Aufgaben

1 a) Übertrage die Tabelle in dein Heft und fülle sie aus.

x	$5\cdot x-1$	$7\cdot x-1-3\cdot x$	$-x+6\cdot x-1$	$1+4\cdot x-2$	$(x-1)+4\cdot x$	$4\cdot x+1$
3						
15						
−5						
−7						

b) Welche Terme sind wertgleich, welche sind nicht wertgleich? Begründe, indem du die Terme umformst.

2 Vereinfache den Term im Kopf.
a) $s+s+s+s$ b) $x+x+2x+x$ c) $t+t+2t+t$ d) $-d-d-d-d-d$
e) $x-x+x-x$ f) $k+k+k-k-k$ g) $2b+3b+b$ h) $6f+3f+f+9f$
i) $60g-30g$ j) $2{,}3s+1{,}3s$ k) $6{,}5t-2{,}3t-t$ l) $60{,}3y-42y+2y$

Vereinfachen bedeutet:
1. erstes Vereinfachen
2. Klammern auflösen
3. Ordnen
4. Zusammenfassen
(jeweils wenn nötig)

3 Vereinfache den Term und berechne den Wert für $x = 2, 3, -4$ bzw. -5.
a) $3x-7x+13x$ b) $-23x+34x+x$ c) $2{,}5x-1{,}7x+3x$ d) $0{,}23x-0{,}27x-x$
e) $\frac{2}{3}x+\frac{5}{3}x$ f) $\frac{5}{12}x-\frac{11}{12}x+\frac{19}{12}x$ g) $-\frac{1}{4}x+\frac{3}{16}x-\frac{5}{8}x$ h) $\frac{1}{3}x-\frac{5}{6}x+\frac{11}{12}x$

4 Vereinfache den Term.
a) $d\cdot 2+5d$ b) $1096\cdot x-x\cdot 96$ c) $f\cdot 6+7f-2f$ d) $-3\cdot 2x+6x$
e) $2\cdot 3{,}5x-4\cdot x\cdot 2$ f) $\frac{2}{4}x+\frac{1}{2}x-x$ g) $x\cdot\frac{5}{9}-\frac{1}{3}x+x$ h) $\frac{1}{3}x-x\cdot\frac{1}{6}+2x$

5 Forme mithilfe des angegebenen Rechengesetzes in einen wertgleichen Term um.
Kommutativgesetz: a) $5\cdot s+6$ b) $c\cdot 9$ c) $3\cdot t-9$
Assoziativgesetz: d) $2\cdot(3\cdot x)$ e) $2+(3\cdot x+4)$ f) $(d\cdot 3)\cdot 6$

6 Vereinfache den Term durch Ausmultiplizieren mithilfe des Distributivgesetzes.
a) $4\cdot(d+5)$ b) $3\cdot(2x+4)$ c) $2\cdot(s-6)$ d) $(2t-5)\cdot 12$
e) $(0{,}5+3x)\cdot 6$ f) $(-1)\cdot(z+2)$ g) $(2-5k)\cdot(-3)$ h) $0{,}5\cdot(10x+20)$

7 Vereinfache und berechne dann den Wert des Terms für $n = 1{,}5, -2, -3$ bzw. 6.
a) $n+(-3)\cdot n+2n$ b) $12\cdot n-n\cdot 32$ c) $0{,}33n+n\cdot 2{,}5$ d) $-5\cdot 2n-n\cdot 3$
e) $6n+(2n-3n)$ f) $(-2\cdot n)-34\cdot n$ g) $n\cdot 6\cdot 3-3n+n$ h) $5\cdot n\cdot 3+2n-n$
i) $0{,}75n+n-\frac{1}{2}n$ j) $n\cdot\frac{5}{9}+\frac{7}{3}-\frac{1}{3}n+\frac{6}{5}$ k) $4\cdot\left(n-2\frac{1}{2}\right)-4n\,|$ l) $8-5{,}2n-2^3+\frac{1}{5}n$

8 a) Übertrage die Tabelle in dein Heft und fülle sie aus.

d	$5\cdot d-3\cdot d-1$	$3\cdot d+(1-d)$	$d+2\cdot d+3$	$(1-d)+4\cdot d$	$2d-1$	$6\cdot d$
1						
8						
22						
60						

b) Welche Terme sind wertgleich, welche nicht? Begründe jeweils.
c) Mit welchem der Terme aus a) kann man die Anzahl der Streichhölzer berechnen, die man zum Legen einer beliebig langen Streichholzquadratkette (Fig. 1 auf Seite 9) benötigt? Begründe.
d) Wieso ergeben in diesem Zusammenhang negative Zahlen keinen Sinn?

9 Vereinfache so weit wie möglich und nenne jeweils das verwendete Rechengesetz.
a) $4\cdot(5+x)+3\cdot(2x-4)$
b) $7\cdot(n-2)+5(1+2n)$
c) $5\cdot(d+3)+4(2-2d)$
d) $-5\cdot(4+2v)+1{,}5\cdot(2-4v)$
e) $-\frac{3}{5}\cdot\left(\frac{5}{2}\cdot x+1\right)+\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{3}{2}-4x\right)$
f) $-\frac{5}{6}\left(\frac{3}{4}b-\frac{4}{9}\right)-\left(-\frac{3}{7}\right)\cdot\left(14-\frac{7}{9}b\right)$

Kopiervorlage
CAS-Aufgabe
mj43xu

10 Zeige durch Anwenden geeigneter Rechengesetze, dass die Terme wertgleich sind.
a) $(3\cdot n+5)+10\cdot n$ und $13\cdot n+5$
b) $7+x\cdot 2+15-x$ und $2\cdot(-x)+22+3\cdot x$
c) $7\cdot s-(3-2\cdot s)$ und $9\cdot s-3$
d) $5\cdot x+3-9\cdot x$ und $-4\cdot x+3$
e) $2\cdot(5-2\cdot d)-13$ und $4\cdot(1-d)-7$
f) $(3v+5)\cdot 5-v$ und $32+7\cdot(2v-1)$

11 Welche Terme sind wertgleich? Begründe durch eine Rechnung.
a) $2+d\cdot 4$ und $4d+2$
b) $2\cdot(1+2x)$ und $4+4x$
c) $27-7s$ und $s\cdot 7-27$
d) $5a-55$ und $5\cdot(a-11)$
e) $3\cdot(0{,}5+2t)$ und $6t+2{,}5$
f) $5\cdot x+2{,}5$ und $(x+0{,}5)\cdot 5$

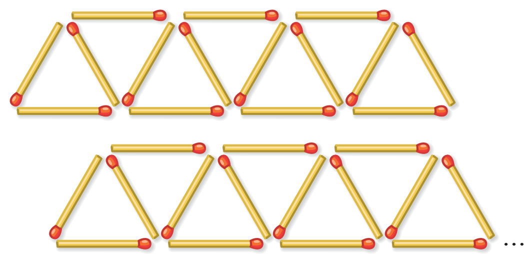
12 Untersuche, ob die Terme $2\cdot x+5-3\cdot x$ und $3-x+2$ wertgleich sein können.

Bist du schon sicher?

13 Welche der angegebenen Terme sind jeweils wertgleich? Begründe.
(1) $5d-4-d$
(2) $2d-5+d$
(3) $2d-8+2d+4$
(4) $6d-4-3\cdot d-1$

14 Vereinfache und berechne den Wert des Terms für $a=-2$ und $a=3$.
a) $3a+a\cdot 5-2$
b) $-2{,}5-5a+1{,}4$
c) $5a-8+a-a\cdot 7$
d) $2\cdot a\cdot 5-a\cdot 3+2$

15 Die Anzahl der Streichhölzer für zwei Reihen zusammenhängender Dreiecke kann man mit den Termen $2\cdot(1+2\cdot d)$ und $2+d\cdot 4$ berechnen, wobei d die Anzahl der Dreiecke pro Reihe beschreibt.
a) Mit welchen Überlegungen wurden die Terme wohl gefunden?
b) Zeige, dass die Terme wertgleich sind.



Lösungen | Seite 164

16 Löse die Klammern auf und vereinfache.
a) $4x+(2x-5)$
b) $9v-(2-5v)+10$
c) $-(7-6x)+4x+5$
d) $(-10)\cdot d-(7+7d)\cdot 2$
e) $5a+[3a-(4a+1)]$
f) $[(7x-4)-(5x+8)]+9$

Löse erst die „inneren Klammern“ auf und dann die „äußeren Klammern“.

17 Gegeben ist der Term $4x+3$. Gib einen Term an, der für die Einsetzung $x=2$ denselben Wert hat, aber nicht wertgleich zu $4x+3$ ist.

18 Die Freunde Horst, Helmut und Hanna finden in einer Zeitschrift eine Skizze für ein Drahtmodell des Buchstabens H (Fig. 1) mit dem Titel: Für jeden die gewünschte Größe. Jeder überlegt sich einen Plan zum Nachbauen und stellt einen Term für die benötigte Drahtlänge auf.
Horst: $2\cdot x+2\cdot 2\cdot x+x+2\cdot x+2\cdot 2\cdot x+x+2\cdot 5\cdot x$
Helmut: $x+2\cdot x+x+2\cdot x+x+5\cdot x+x+2\cdot x+x+2\cdot x+x+5\cdot x$
Hanna: $2\cdot(3\cdot x)+4\cdot 2\cdot x+2\cdot 5\cdot x$
a) Erläutere mithilfe einer Skizze, welche Überlegungen sich Horst, Helmut und Hanna beim Aufstellen ihres Terms jeweils gemacht haben müssen.
b) Begründe, dass die Terme wertgleich sind.
c) Gib einen einfacheren Term zur Berechnung der Drahtlänge an.

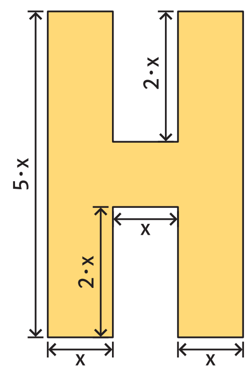


Fig. 1

24 Ein Weg, der um eine Dreieckspyramide herumführt, soll mit Platten der Form eines gleichseitigen Dreiecks gepflastert werden (Fig. 1).
Zur Berechnung der Anzahl der benötigten Platten werden mehrere Terme vorgeschlagen. Die Variable n gibt dabei die Anzahl der Dreiecksgrundlinien entlang einer Seite der Pyramide an. In Fig. 1 ist $n = 5$.

$3 \cdot (2n - 3)$	$3 \cdot (2n - 1) - 3 \cdot 2$	$4 \cdot (n + 2) - 4 \cdot 2$
$3 \cdot (n - 1) + 3n$	$3 \cdot n + (2n - 1) \cdot 3$	$3 \cdot 2(n - 1) - 3 \cdot 1$

a) Mit welchen der angegebenen Terme kann man die Anzahl der Platten zum Bau des Weges bestimmen? Begründe mit einer Skizze, die die Termzusammensetzung jeweils erklärt.
b) Bestätige die Wertgleichheit der in Teilaufgabe a) ausgewählten Terme rechnerisch.
c) Die Grundseite der Pyramide beträgt 50 m. Wie viele Platten werden für den Weg benötigt, wenn die Kantenlänge der Dreiecksplatten 2 m bzw. 2,50 m beträgt?

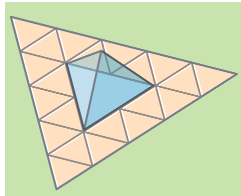


Fig. 1

25 Die Wiese in Fig. 2 soll eingezäunt werden. Stelle hierzu einen Term für die Länge des Drahtes auf und vereinfache ihn so, dass eine Berechnung möglichst schnell geht.

26 Der Term $2 \cdot (5x + 3) + 2 \cdot 7$ beschreibt den Umfang einer Figur. Erstelle eine beschriftete Skizze zu dieser Figur.

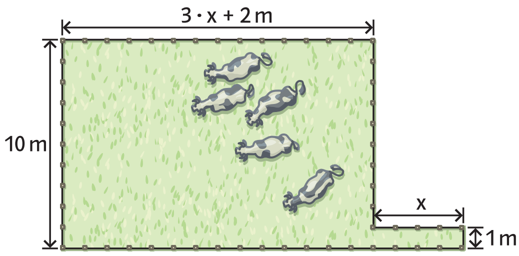


Fig. 2

27 Begründe durch geeignete Termumformungen, dass die Aussage wahr ist.
a) Addiert man zum 5-Fachen einer Zahl das 3-Fache der Zahl, so erhält man das 8-Fache der Zahl.
b) Vermehrt man das Doppelte einer Zahl um 4, so erhält man das Doppelte der um 2 vermehrten Zahl.
c) Addiert man 7 zur Hälfte einer Zahl, so erhält man die Hälfte der um 14 vergrößerten Zahl.
d) Multipliziert man eine um 8 vergrößerte Zahl mit 3 und subtrahiert man von diesem Produkt 20, so erhält man das um 4 vergrößerte 3-Fache der Zahl.

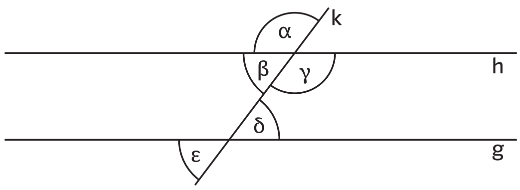
28 Karin stellt fest: Wenn ich drei aufeinanderfolgende Zahlen wie zum Beispiel 5, 6 und 7 oder 21, 22 und 23 addiere, ist die Summe durch 3 teilbar.
a) Kontrolliere Karins Behauptung an einigen Zahlenbeispielen. Warum ist damit Karins Aussage noch nicht begründet?
b) Versuche, die Behauptung allgemein zu erklären.

Terme helfen, Aussagen allgemein zu begründen.

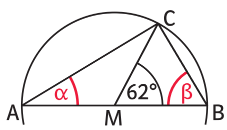
29 Addiere das Vierfache einer Zahl zu der um 5 erhöhten Zahl.
Begründe, warum diese Summe immer durch 5 teilbar ist.

Kannst du das noch?

30 Die Geraden g und h sind parallel zueinander.
a) Gib alle Scheitelwinkel, Nebenwinkel und Stufenwinkel an.
b) Bestimme die Größen der Winkel ε, γ, δ und β für $\alpha = 127°$.



31 $\overline{AB}$ ist Durchmesser eines Kreises mit dem Mittelpunkt M. Der Punkt C liegt auf diesem Kreis. Berechne die Größen der Winkel α und β.



vgl. Seiten 160 und 161
Lösung | Seite 165

5 Lösen von Gleichungen durch Äquivalenzumformungen

In jeder Schachtel befinden sich gleich viele Hölzchen. Links und rechts der roten Linie befinden sich ebenfalls gleich viele Hölzchen. Wie viele Hölzchen befinden sich in einer Schachtel?
Stelle zu dem Rätsel eine Gleichung auf.
Warum lässt sich diese Gleichung nicht durch Rückwärtsrechnen lösen?
Löse das Rätsel durch geeignetes Wegnehmen von Hölzchen bzw. Schachteln auf beiden Seiten der roten Linie.

Nicht alle Gleichungen lassen sich durch Rückwärtsrechnen lösen. Bei der Gleichung $5x + 2 = 2x + 8$ ist dieses zum Beispiel nicht möglich, weil die Variable x auf beiden Seiten der Gleichung vorkommt.

Mithilfe des **Waagenmodells** kann man die Lösung schrittweise ermitteln. Dazu stellt man sich vor, x sei das Gewicht eines Ziegelsteines (in kg). Dann besagt die Gleichung, dass die Waage im Gleichgewicht sein soll, wenn auf der rechten Waagschale fünf Ziegelsteine und zwei 1-kg-Gewichte und auf der rechten Waagschale zwei Ziegelsteine und acht 1-kg-Gewichte stehen.

Physikalisch korrekt wäre es, statt von Gewicht von Masse zu sprechen.

$$5x + 2 = 2x + 8$$

Als Erstes wird **auf beiden Seiten** des Gleichheitszeichens die gleiche Anzahl von Einergewichten **subtrahiert** – hier 2-mal 1 kg:

$$5x + 2 = 2x + 8 \quad \big|\; -2$$
$$5x = 2x + 6$$

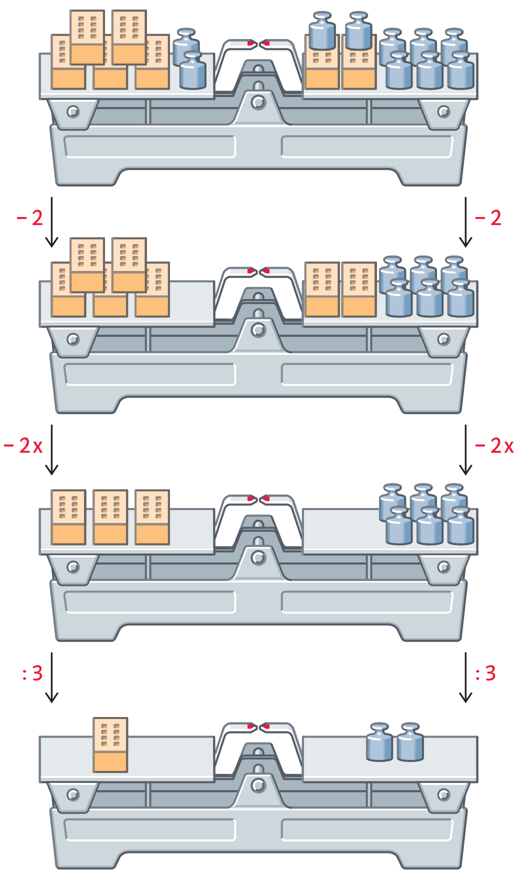
Anschließend wird **auf beiden Seiten** die gleiche Anzahl Ziegelsteine (unbekannten Gewichtes) **subtrahiert** – hier jeweils 2 Steine:

$$5x = 2x + 6 \quad \big|\; -2x$$
$$3x = 6$$

Abschließend wird **auf beiden Seiten alles durch 3 dividiert**:

$$3x = 6 \quad \big|\; :3$$
$$x = 2$$

Die **Lösung** ist demnach, dass ein Ziegelstein 2 kg wiegt.



Durch die Überlegungen am Waagenmodell wurde die Ausgangsgleichung schrittweise in neue Gleichungen umgeformt, die genau dieselbe Lösung haben wie die Ausgangsgleichung. Gleichungen mit gleicher Lösungsmenge nennt man zueinander **äquivalente** Gleichungen. Eine Umformung, mit der eine Gleichung in eine äquivalente Gleichung umgeformt wird, heißt **Äquivalenzumformung**.

	Gleichung		Äquivalenzumformung
	$5x + 2 = 2x + 8$	$\mid -2$	Auf beiden Seiten der Gleichung wird die Zahl 2 subtrahiert.
$\Leftrightarrow$	$(5x + 2) - 2 = (2x + 8) - 2$	$\mid$TU	Termumformung
$\Leftrightarrow$	$5x = 2x + 6$	$\mid -2x$	Auf beiden Seiten der Gleichung wird der Term $2x$ subtrahiert.
$\Leftrightarrow$	$5x - 2x = (2x + 6) - 2x$	$\mid$TU	Termumformung
$\Leftrightarrow$	$3x = 6$	$\mid :3$	Beide Seiten der Gleichung werden durch 3 dividiert.
$\Leftrightarrow$	$(3x):3 = 6:3$	$\mid$TU	Termumformung
$\Leftrightarrow$	$1x = 2$		

Zwischen zwei äquivalente Gleichungen schreibt man das Äquivalenzzeichen $\Leftrightarrow$ („ist äquivalent zu"). Hier darf kein Gleichheitszeichen stehen!

Statt $(3x):3 = 6:3$ kann man auch $\frac{3x}{3} = \frac{6}{3}$ schreiben.

Die letzte Gleichung $1x = 2$ hat also dieselbe Lösungsmenge wie die Ausgangsgleichung $5x + 2 = 2x + 8$. Im Gegensatz zur Ausgangsgleichung steht hier aber die Variable x allein auf einer Seite der Gleichung. Daher kann man hier die Lösungsmenge sofort ablesen: $L = \{2\}$.

Formt man eine Gleichung mithilfe einer **Äquivalenzumformung** um, so erhält man eine zur Ausgangsgleichung **äquivalente** Gleichung, die genau dieselbe Lösungsmenge hat.

Wichtige Äquivalenzumformungen sind:
- Termumformungen der Terme auf der rechten und linken Seite der Gleichung,
- die Addition (oder Subtraktion) derselben Zahl oder desselben Terms auf beiden Seiten der Gleichung,
- die Multiplikation beider Seiten mit derselben von null verschiedenen Zahl bzw. die Division beider Seiten durch dieselbe von null verschiedenen Zahl.

Man versucht beim Lösen einer Gleichung, die gegebene Gleichung durch Äquivalenzumformungen so umzuformen, dass man die Lösungsmenge ablesen kann. Dazu sollte die Variable zum Schluss allein auf einer Seite der Gleichung stehen.

Beispiel 1 Lösen einer Gleichung durch Äquivalenzumformungen
Löse die Gleichung $2x + 2 = 5x + 8$ durch Äquivalenzumformungen. Gib die einzelnen Äquivalenzumformungen an und mache zum Schluss eine Probe.
Lösung

	Gleichung		Äquivalenzumformung
	$2x + 2 = 5x + 8$	$\mid -2$	*Auf beiden Seiten der Gleichung wird die Zahl 2 subtrahiert.*
$\Leftrightarrow$	$2x = 5x + 6$	$\mid -5x$	*Auf beiden Seiten der Gleichung wird der Term 5x subtrahiert.*
$\Leftrightarrow$	$-3x = 6$	$\mid :(-3)$	*Beide Seiten der Gleichung werden durch (−3) dividiert.*
$\Leftrightarrow$	$1x = -2$		

Probe an der Ausgangsgleichung: Setzt man für x die Zahl −2 ein, so hat der Term auf der linken Seite der Ausgangsgleichung den Wert $2 \cdot (-2) + 2 = -2$. Der Term auf der rechten Seite hat den Wert $5 \cdot (-2) + 8 = -2$. Damit wird die Gleichung mit dieser Einsetzung zu einer wahren Aussage.

Eine Probe gibt Sicherheit, ist zur Lösung einer Gleichung aber nicht notwendig.

Kopiervorlage
Äquivalenzumformungen von Gleichungen mit einem CAS
2xb6hy

Beispiel 2 **Vereinfachen einer Gleichung mit Brüchen bzw. Dezimalbrüchen**
Führe Äquivalenzumformungen so durch, dass in der Gleichung keine Brüche bzw. Dezimalbrüche mehr auftreten.

a) $\frac{3}{5}x + 2 = \frac{4}{3}x - 4$ b) $0{,}2x + 0{,}8 = 1{,}4 - 0{,}7x$

Lösung

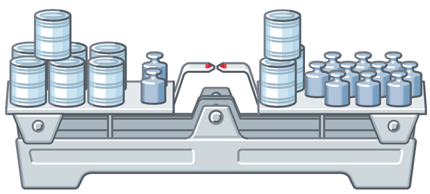
a)
$$\frac{3}{5}x + 2 = \frac{4}{3}x - 4 \quad |\cdot 15$$
$$\Leftrightarrow \quad 15\cdot\left(\frac{3}{5}x + 2\right) = 15\cdot\left(\frac{4}{3}x - 4\right) \quad |\,\text{TU}$$
$$\Leftrightarrow \quad 9x + 30 = 20x - 60$$

b)
$$0{,}2x + 0{,}8 = 1{,}4 - 0{,}7x \quad |\cdot 10$$
$$\Leftrightarrow \quad 10\cdot(0{,}2x + 0{,}8) = 10\cdot(1{,}4 - 0{,}7x) \quad |\,\text{TU}$$
$$\Leftrightarrow \quad 2x + 8 = 14 - 7x$$

Beim Multiplizieren mit einer Zahl müssen jeweils die gesamten Terme auf beiden Seiten der Gleichung mit dieser Zahl multipliziert werden. Gleiches gilt für die Division durch eine Zahl.

Aufgaben

1 Auf der abgebildeten Tafelwaage befinden sich neben Wägestücken von je 1 kg zehn gleich schwere Dosen. Die Waage ist im Gleichgewicht. Wie kann man das Gewicht einer Dose durch geeignetes „Abräumen" der Waage bestimmen?



2 Zeige, dass die Gleichungen äquivalent zueinander sind.
a) $8b = 3b + 5$ und $5b = 5$ b) $7x - 2 = 3 - x$ und $8x = 5$
c) $5d + 10 = 2d + 16$ und $d = 2$ d) $6n - 6 = 3 - 3n$ und $6n = 6$
e) $15 - 3x = 0$ und $2x = 5 + x$ f) $2d + 3 - d = -5d$ und $d + 4 = -2 - 11d$

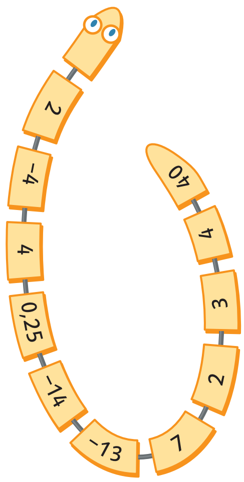
3 Löse die Gleichung durch systematisches Probieren und mithilfe von Äquivalenzumformungen. Mache eine Probe. Vergleiche die Lösungswege miteinander.
a) $5x - 10 = 25$ b) $4k + 12 = 62$ c) $3{,}4t + 83 = 100$ d) $8b + 12 = 12$
e) $5{,}5p + 10 = 26{,}5$ f) $5 - 2{,}5y = 7{,}5$ g) $0{,}1g + 8 = 18$ h) $d\cdot(-3) = 15$
i) $\frac{1}{2}a + 6 = 13$ j) $\frac{1}{4} - x = \frac{3}{4}$ k) $\frac{3}{4} = \frac{1}{4}b + 3$ l) $7 - \frac{1}{2}x = 1$

Kopiervorlage
Gleichungen mit einem CAS lösen
sn8yp6

4 Löse die Gleichung. Mache anschließend eine Probe.
Warum kann man die Gleichung nicht durch Rückwärtsrechnen lösen?
a) $9b + 3 = 7b + 11$ b) $5 + 7x = 45 + 3x$ c) $5d + 4 = 4 + d$ d) $16v + 7 = 15v + 1$
e) $8n - 15 = 3n$ f) $12k = 15k - 60$ g) $5{,}5 + 3t = t - 2{,}5$ h) $5{,}5z = -9 + 4{,}5z$
i) $\frac{1}{2}a + 6 = 13 - a$ j) $6 - \frac{1}{2}x = 1 + 2x$ k) $\frac{3}{4}b = \frac{1}{4}b + 3$ l) $\left(-\frac{1}{4}\right)\cdot x = \frac{3}{4}x - 1$

5 Finde zu jeder Gleichung die richtige Lösung in der Schlange auf dem Rand.

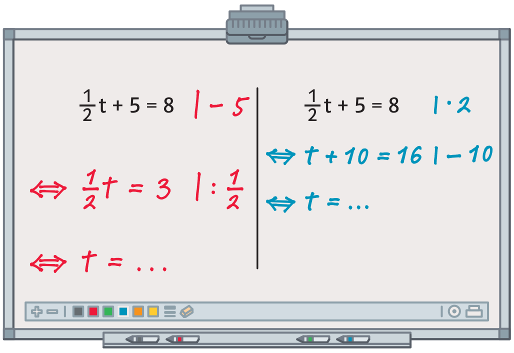
$2b - 3 = 3b + 1$ $5\cdot(b + 3) = 25$ $\frac{4}{7}b = -8$ $2\cdot(x + 1) = 10$
$10 - n = 23$ $8 + 0{,}5x = 2{,}5x$ $x : 8 = 5$ $3{,}5\cdot(x + 1) = 10{,}5$
$6d + 2\cdot(d - 13) = d\cdot 5 - 5$ $(v - 5)\cdot 3 + 5v + 3 = 4v$ $\left(-\frac{3}{4} + k\right)\cdot 2 + \frac{5}{4} = \frac{1}{4}$



6 Karl soll die Gleichung $15 = 3x$ im Kopf lösen. Er sagt: „Zuerst muss man auf beiden Seiten $3x$ subtrahieren, dann auf beiden Seiten 15 subtrahieren und als Letztes auf beiden Seiten durch -3 dividieren. Das kann ich aber nicht im Kopf!"
a) Formuliere jeden Schritt von Karls Äquivalenzumformungen in Gleichungen und gib jeweils an, welche Umformung Karl vorgeschlagen hat.
b) Gib einen leichteren Lösungsweg an. Welchen „Gedankenfehler" hat Karl gemacht?

Beachte:
Die Seiten einer Gleichung kann man vertauschen, z. B. kann man $2d + 10 = 10d - 5$
auch so schreiben:
$10d - 5 = 2d + 10$.

7 Die Gleichung $\frac{1}{2}t + 5 = 8$ haben Kristine und Andreas am Whiteboard gelöst:
a) Welche Lösung erhält Kristine (linke Seite am Whiteboard), welche Andreas (rechte Seite)?
b) Vergleiche die beiden Lösungswege. Welcher Lösungsweg erscheint dir einfacher? Begründe deine Antwort.
c) Löse die Gleichung $2 + \frac{1}{3}x = \frac{2}{3}x + 4$ auf drei verschiedenen Wegen und vergleiche die Wege miteinander.



8 Vereinfache zunächst beide Seiten der Gleichung und löse dann mithilfe von Äquivalenzumformungen. Mache abschließend die Probe.
a) $32x + 43 - 20x = -25 - 45x + 30$
b) $12 - 9b + 15 - 5b = 14 - 8b + 6$
c) $-41 + 26t = 2t + 20t - 53 + 72$
d) $4f + 49 - 13f - 78 + 23f = 0$
e) $3 \cdot (a - 4) + 3 \cdot (4 - a) + 2a - 1 = 3$
f) $13 \cdot (s - 5) - 4 \cdot (s - 1) + s = 5$
g) $3 \cdot (2x - 5) + 6 = 5 \cdot (3 - 5x) + 6x$
h) $4 \cdot (v + 3) - 5 \cdot (3v - 8) = 12 - 2 \cdot (3v + 1)$

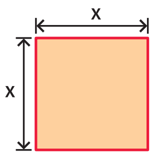
Bist du schon sicher?

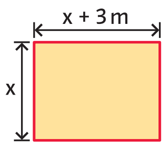
9 Löse die Gleichung.
a) $9x + 3 = 7x - 2$
b) $5 \cdot (2v - 7) = 4v - 17$
c) $(4z + 6) \cdot 3 + 14 = 4 \cdot (5 - 2z) - 4z$
d) $(x - 4)^2 = x^2 - 8x + 16$

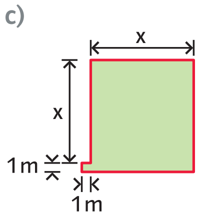
10 Begründe, ob die gegebenen Gleichungen äquivalent zueinander sind.
a) $3b + 5 = 1$ und $9b = -12$
b) $4z + 5 = 6z - 7$ und $2z = -2$
c) $3(2x + 1) = 5(1 - x)$ und $6x = 5(1 - x) - 3$
d) $2x + 1 = x + 4$ und $x = x + 6$

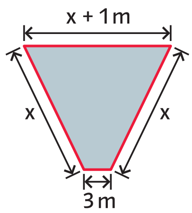
Lösungen | Seite 165

11 Wie lang muss x sein, damit der Umfang des Grundstücks 50 m beträgt?

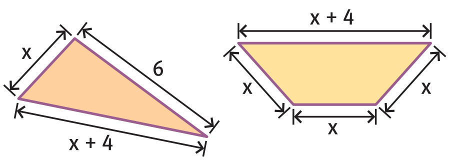
a)


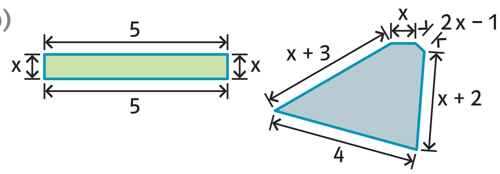
b)


c)


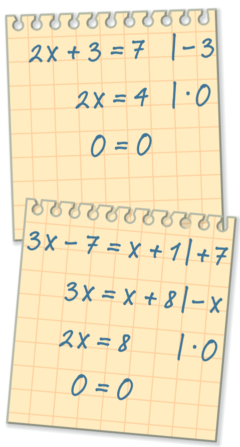
d)


12 Der Umfang der skizzierten Figuren ist jeweils gleich. Wie groß ist die Seitenlänge s?

a)


b)


13 **Weitergedacht**
Rolf hat versucht, die Gleichungen $2x + 3 = 7$ und $3x - 7 = x + 1$ zu lösen.
Seine Rechnungen sind auf dem Rand zu sehen. Rolf überlegt: „Dann ist ja bei beiden Gleichungen die Lösung 0. Aber das kann ich mit der Probe kontrollieren: $2 \cdot 0 + 3 = 3 \neq 7$ und $3 \cdot 0 - 7 = -7 \neq 0 + 1$. Also sind meine Ergebnisse falsch!“
a) Ermittle die richtigen Lösungen. Wo steckt Rolfs Fehler?
b) Kommentiere die Behauptung:
„Multiplikationen mit null sind keine Äquivalenzumformungen.“



14 **Gleichung gesucht**

Überlege dir eine Gleichung, die eine der folgenden Zahlen als Lösung hat. Lass nun deinen Partner deine Gleichung lösen. Vergleicht anschließend die Ergebnisse.

$\frac{1}{2}$; $-\frac{3}{4}$; 4; 7; −5; −2; 3,5; −1,7; 25; 2,55; 8; 11,5; −12

15 Herr Heinl hat typische Fehler der Klassenarbeit aufgeschrieben. Finde und korrigiere sie.

a)
$12 + 2b = 22 \quad | +12$
$2b = 34 \quad | :2$
$b = 17$ f

b)
$2d + 3 = d + 3 \quad | -3$
$2d = d \quad | :d$
$d = 1$ f

c)
$-2(x + 3) = x \quad |$ vereinfachen
$-2x + 6 = x \quad | -6$
$-2x = x - 6 \quad | -x$
$-x = -6$ f

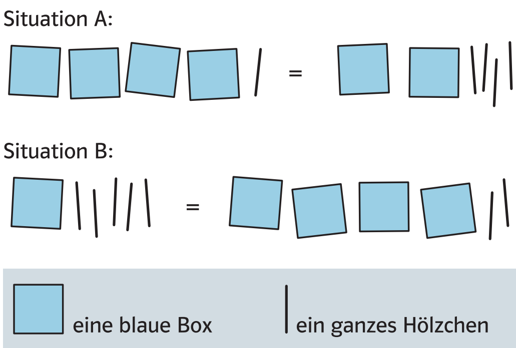
d)
$3 \cdot (2 - s) = 2s - (s + 6) \quad |$ vereinfachen
$6 - 3s = s + 6 \quad | -6 + 3s$
$6 = 2s \quad | :2$
$s = 3$ f

16 **Magisches Quadrat einmal anders**

Für a, b und c sind rationale Zahlen so einzusetzen, dass die Summe der drei Termwerte jeder Zeile, jeder Spalte und jeder Diagonalen gleich ist.
Ermittle a, b und c sowie die gemeinsame Summe.

4a	18	2a
2b + 8	5a	14
4c	2a+2b	6a

17 In der Figur sind die blauen Boxen mit Hölzchen gefüllt. Damit kann man Gleichungen legen. Dabei liegen links und rechts vom Gleichheitszeichen insgesamt gleich viele Hölzchen. Die Hölzchen in den blauen Boxen können auch halbiert, gedrittelt … sein. Dann entsprechen beispielsweise zwei halbe Hölzchen einem ganzen Hölzchen. Zudem liegen in den blauen Boxen jeweils gleich viele ganze oder halbe oder gedrittelte oder … Hölzchen.



Tipp:
Man kann die Situation selbst mit Boxen und Hölzchen nachlegen.

a) Wie viele Hölzchen welcher Länge liegen jeweils in den blauen Boxen?
b) Beschreibe die Situationen A und B jeweils durch eine Gleichung. Kontrolliere dein Ergebnis aus Teilaufgabe a) mithilfe dieser Gleichungen.
c) Erfinde eigene Aufgaben und lasse sie von deinem Partner lösen.

18 Für $x = 2$ ist $2x^2 = 9x - 10$ eine wahre Aussage. Rechne nach. Max rechnet weiter:

$$2x^2 = 9x - 10 \quad | -4x$$
$$2x^2 - 4x = 5x - 10 \quad | \text{Ausklammern}$$
$$2x(x - 2) = 5(x - 2) \quad | :(x - 2)$$
$$2x = 5$$

Da die Ausgangsgleichung für $x = 2$ eine wahre Aussage ergibt, müsste dies auch für $2x = 5$ gelten. Wo steckt Max' Fehler?

Kannst du das noch?

19 Der Kurs einer Aktie steigt in der ersten Woche um 15 %. In der zweiten Woche fällt er um 7 % und in der dritten Woche fällt er um 8 %. Wie viel Prozent des Anfangswertes ist die Aktie nach der dritten Woche noch wert?

Lösung | Seite 165

18 Weitergedacht II

Betrachte $x \cdot (x - 2) = 0$ und lege für die Lösungen die natürlichen Zahlen zugrunde.

a) Bestimme alle Lösungen dieser Gleichung.

b) Rolf sagt: „Bei dieser Gleichung kann man doch wie bei den Äquivalenzumformungen beide Seiten durch x dividieren, dann erhält man $x - 2 = 0$ und kann die Lösung direkt ablesen.“ Nina meint: „Nein, ich würde beide Seiten mit 0 multiplizieren. Dann ergibt sich die Gleichung $0 = 0$. Also kann ich für x alle natürlichen Zahlen einsetzen.“
Vergleiche die Lösungen mit deiner Antwort aus Teilaufgabe a) und begründe, warum die beiden Lösungsvorschläge von Rolf und Nina falsch sind.

c) Gib die Lösungen der Gleichungen $(x - 5) \cdot x = 0$ und $0 = x \cdot (6 - x)$ an. Formuliere eine Regel, wie man Gleichungen dieser Form leicht lösen kann.

Multiplikation mit 0 und Division durch x (wenn $x = 0$ eine Lösung der Gleichung ist) sind keine Äquivalenzumformungen.

19 Tina möchte den Tarif für ihr Handy wechseln. Sie hat folgende Angebote:

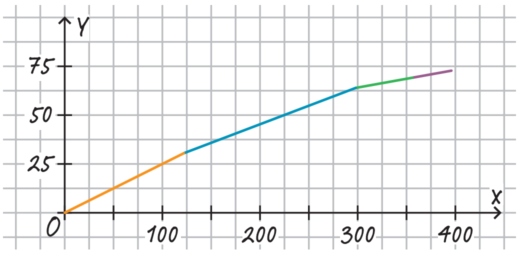
Tarif 1: „Günstiko“

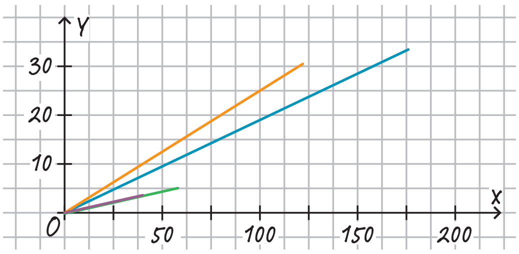
Tarif 2: „Telefun“

a) Tina telefoniert nach Absprache mit ihren Eltern nur am Wochenende und nur ins deutsche Festnetz. Den Bereitstellungspreis braucht Tina nicht mehr zu bezahlen, da sie bereits einen Vertrag hat und nur ihren Tarif wechseln möchte. Welchen sollte sie wählen?

b) Der Verkäufer versucht Tina zu überreden, zusätzlich eine Telefon-Flatrate zu nehmen. Hierbei könnte sie für 20 € monatlich so viel telefonieren, wie sie möchte. Wie viele Minuten müsste Tina monatlich telefonieren (wieder nur am Wochenende), damit sich diese Flatrate lohnt?

c) Tinas großer Bruder Sebastian hat sich ebenfalls mit dem Tarif 2 beschäftigt, seine Kosten ausgerechnet und grafisch auf zwei Wegen dargestellt. Er hat dabei seine Telefondaten des letzten Monats verwendet: 122 Minuten in der „Sonnenzeit“, 176 Minuten in der „Mondzeit“, 58 Minuten in der „Wochenendzeit“ und insgesamt 40 SMS.





Wie viel müsste Sebastian für den letzten Monat beim Tarif 2 bezahlen? Erläutere, wie die beiden Graphen Sebastians Telefonkosten beschreiben. Wofür stehen hier x und y?

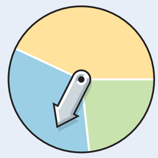
d) Sebastian sagt: „Wenn ich beim Tarif 2 für alle Teiltarife gleich viele Minuten vertelefonieren würde, könnte ich meine Kosten mit $0{,}25x + 0{,}19x + 0{,}09x + 0{,}09s$ oder mit $0{,}53x + 0{,}09s$ berechnen.“ Wofür stehen hier x und s? Hat Sebastian recht? Begründe.

Erkennungsmerkmale eines Zufallsexperiments
1. Zu einem Zufallsexperiment wird eine Ergebnismenge festgelegt.
2. Es wird genau ein Ergebnis aus der Ergebnismenge eintreten.
3. Welches der möglichen Ergebnisse auftreten wird, lässt sich nicht vorhersagen.
4. Das Experiment kann unter den gleichen Bedingungen beliebig oft wiederholt werden.

Werfen einer Münze
Ergebnismenge z.B.: S = {Wappen; Zahl}

Würfeln
Ergebnismenge z.B:
S = {gerade Zahl; ungerade Zahl}

Wahrscheinlichkeiten und relative Häufigkeiten
Wenn man ein Zufallsexperiment oft wiederholt, dann sind die ermittelten relativen Häufigkeiten der Ergebnisse gute Schätzwerte für deren Wahrscheinlichkeiten.
Die den einzelnen Ergebnissen zugeordneten Wahrscheinlichkeiten müssen zusammen 1 (= 100 %) ergeben.



2000-maliges Drehen des Glücksrades:

Ergebnis	*„gelb“*	*„grün“*	*„blau“*
absolute Häufigkeit	*871*	*460*	*669*
relative Häufigkeit	*43,55 %*	*23,00 %*	*33,45 %*
geschätzte Wahrscheinlichkeit	*43,5 %*	*23,0 %*	*33,5 %*

Laplace-Experimente
Zufallsexperimente, bei denen man eine Ergebnismenge so angeben kann, dass alle Ergebnisse gleich wahrscheinlich sind, nennt man Laplace-Experimente.

Beim Werfen eines Würfels sind die sechs Ergebnisse „1“, „2“, „3“, „4“, „5“ und „6“ alle gleich wahrscheinlich.

Ereignis
Mehrere Ergebnisse eines Zufallsexperiments können zu einem Ereignis zusammengefasst werden.

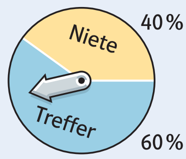
Ereignisse beim Würfeln: „gerade Augenzahl“ oder „Augenzahl durch 3 teilbar“

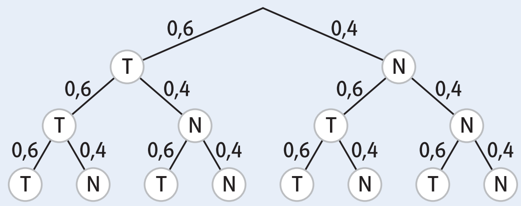
Pfadregel
Mehrstufige Zufallsexperimente kann man durch Baumdiagramme beschreiben. Die Wahrscheinlichkeit für einen Pfad (ein Ergebnis des mehrstufigen Zufallsexperiments) erhält man, indem man die Wahrscheinlichkeiten längs des Pfades multipliziert.

Summenregel
Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist die Summe der Wahrscheinlichkeiten der zugehörigen Ergebnisse. Besteht ein Ereignis aus mehreren Pfaden, dann ist seine Wahrscheinlichkeit die Summe der Wahrscheinlichkeiten der zugehörigen Pfade.

Komplementärregel
Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses und die Wahrscheinlichkeit des zugehörigen Gegenereignisses ergänzen sich immer zu 1:
P (Ereignis) + P (Gegenereignis) = 1.

Wahrscheinlichkeit für zwei Treffer bei drei Versuchen bzw. für höchstens zwei Nieten:





Nach der Pfadregel hat jeder der Pfade „TTN“, „TNT“ und „NTT“ die Wahrscheinlichkeit $0{,}6 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4 = 0{,}144$.
Also beträgt die gesuchte Wahrscheinlichkeit nach der Summenregel
$0{,}144 + 0{,}144 + 0{,}144 = 0{,}432 = 43{,}2\,\%$.
P (höchstens 2 Nieten) = 1 − P (3 Nieten)
$= 1 - 0{,}4 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}4 = 0{,}936 = 93{,}6\,\%$

Simulation
Die Nachahmung eines Zufallsexperiments durch ein anderes gleichwertiges Zufallsexperiment mit den gleichen Wahrscheinlichkeiten bezeichnet man als Simulation.
Die relativen Häufigkeiten, die sich dabei ergeben, kann man als Schätzwerte für die Wahrscheinlichkeiten des ursprünglichen Zufallsexperiments verwenden.

Mithilfe des wiederholten Münzwurfs kann man z.B. die Verteilung von Jungen und Mädchen in Familien mit mehreren Kindern simulieren.

Runde 1

Lösungen | Seite 179

1 Aus dem Behälter in Fig. 1 wird zufällig eine Kugel gezogen.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass
a) die Kugel weiß ist, **b)** eine gerade Zahl auftritt?

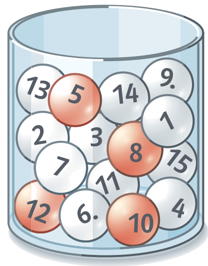


Fig. 1

2 Ein Glücksrad mit den Feldern A, B und C wurde gedreht (Fig. 2). Bei 96 Drehungen trat 39-mal A und 27-mal B auf. Bestimme die relativen Häufigkeiten und schätze die Wahrscheinlichkeiten für die Ergebnisse „A“, „B“ und „C“.

3 Aus einem Korb mit fünf roten, vier gelben und drei grünen Äpfeln wählst du zufällig vier Früchte aus. Mit welcher Wahrscheinlichkeit bekommst du
a) nur rote Äpfel, **b)** mindestens einen grünen Apfel?

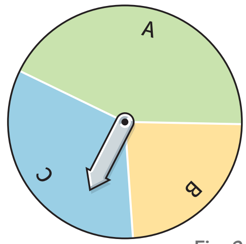


Fig. 2

4 Zwei Würfel werden gemeinsam geworfen.
a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit zeigt einer der Würfel eine Eins und der andere keine?
b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist mindestens eine Eins dabei?

5 Beim Torwandschießen trifft Lukas erfahrungsgemäß mit einer Wahrscheinlichkeit von 20 %. Er hat sechs Versuche. Mit welcher Wahrscheinlichkeit trifft er
a) mindestens einmal, **b)** höchstens einmal?

Runde 2

Lösungen | Seite 179

1 Elke trifft Fred auf dem Heimweg erfahrungsgemäß mit einer Wahrscheinlichkeit von 50 % und Thomas mit einer Wahrscheinlichkeit von 70 %. Sie denkt sich: „Nach der Summenregel treffe ich wenigstens einen der beiden mit einer Wahrscheinlichkeit von 120 %.“ Aber Wahrscheinlichkeiten können doch höchstens 100 % betragen. Außerdem hat sie heute weder Fred noch Thomas getroffen.
a) Kläre anhand eines Baumdiagramms, wo Elkes Denkfehler steckt.
b) Übertrage Elkes Gedankengang auf Münzwurfbeispiele.

2 Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei einem Münzwurf die Münze auf „Wappen“ landet, beträgt 50 %.
a) Berechne und vergleiche die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass bei
(1) vier Münzwürfen zweimal „Wappen“,
(2) sechs Münzwürfen dreimal „Wappen“,
(3) acht Münzwürfen viermal „Wappen“
auftritt.
b) Vergleiche und kommentiere die Ergebnisse aus Teilaufgabe a).
c) Simuliere die Münzwürfe mithilfe einer Tabellenkalkulation. Vergleiche die relativen Häufigkeiten mit den berechneten Wahrscheinlichkeiten.

3 Oliver zieht aus dem Behälter in Fig. 3 zufällig drei Kugeln und legt sie in der gezogenen Reihenfolge hintereinander.
a) Zeichne ein Baumdiagramm für alle möglichen Ergebnisse.
b) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass das Wort „OLI“ entsteht.
c) Untersuche die Wahrscheinlichkeit für „OLI“, wenn man ein drittes O hineinlegt.

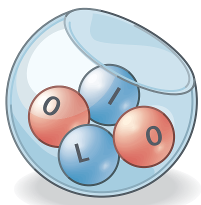


Fig. 3

4 Laura hat beobachtet, dass 20 % der Autos, die an ihrem Fenster vorbeifahren, eine dunkle Farbe haben. Als sie eines Tages aus dem Fenster schaut, ist erst das sechste vorbeifahrende Auto dunkel. „Das war jetzt aber sehr unwahrscheinlich“, denkt sie. Wie groß war die Wahrscheinlichkeit dafür?

Checkliste – Kapitel III

	Das kann ich gut.	Da bin ich noch unsicher.	Das kann ich nicht mehr.	Lerntipp
1. Ich kann Anteile als Bruch und in Prozent angeben.	☐	☐	☐	Basiswissen, Seite 156
2. Ich kann Brüche erweitern und kürzen.	☐	☐	☐	Basiswissen, Seite 156
3. Ich kann Brüche addieren und subtrahieren.	☐	☐	☐	Basiswissen, Seite 157
4. Ich kann Brüche multiplizieren und dividieren.	☐	☐	☐	Basiswissen, Seite 157
5. Ich kann absolute und relative Häufigkeiten bestimmen.	☐	☐	☐	Basiswissen, Seite 163

Kopiervorlage
Checkliste
9rh4hh

Überprüfe deine Einschätzungen.

1 Darstellen von Anteilen

a) Schreibe als Bruch. Kürze so weit wie möglich.
(1) 1 % (2) 6 % (3) 25 % (4) 60 %

b) Gib in Prozent an.
(1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{4}{5}$ (3) $\frac{80}{200}$ (4) $\frac{2}{3}$

2 Erweitern, Kürzen und Vergleichen

a) Erweitere $\frac{7}{15}$ mit 4.

b) Kürze $\frac{81}{63}$ mit 9.

c) Kürze $\frac{120}{75}$ so weit wie möglich.

d) Ordne $\frac{5}{6}$, $\frac{13}{15}$ und $\frac{7}{10}$ der Größe nach.

3 Addieren und Subtrahieren von Brüchen

Übertrage die Rechenkette ins Heft und vervollständige sie.

a) $\frac{1}{3} \xrightarrow{+\frac{1}{2}} \bigcirc \xrightarrow{+\frac{1}{4}} \bigcirc \xrightarrow{-\frac{5}{6}} \bigcirc \xrightarrow{+\frac{1}{3}} \bigcirc \xrightarrow{-\frac{5}{12}} \bigcirc \xrightarrow{+\frac{1}{6}} \frac{1}{3}$

b) $\frac{1}{4} \xrightarrow{+\frac{2}{5}} \bigcirc \xrightarrow{-\frac{1}{2}} \bigcirc \xrightarrow{\square} \frac{7}{20} \xrightarrow{\square} \frac{3}{5} \xrightarrow{-\frac{1}{2}} \bigcirc \xrightarrow{+\frac{1}{4}} \frac{7}{20}$

4 Multiplizieren und Dividieren von Brüchen

Übertrage die Rechenkette ins Heft und vervollständige sie.

a) $\frac{2}{3} \xrightarrow{:\frac{5}{3}} \bigcirc \xrightarrow{\cdot\frac{3}{4}} \bigcirc \xrightarrow{:\frac{9}{5}} \bigcirc \xrightarrow{\cdot\frac{14}{15}} \bigcirc \xrightarrow{:\frac{1}{15}} \bigcirc \xrightarrow{\cdot\frac{11}{7}} \bigcirc$

b) $\frac{3}{4} \xrightarrow{\cdot\frac{2}{5}} \bigcirc \xrightarrow{\square} \frac{9}{25} \xrightarrow{\cdot\frac{5}{3}} \bigcirc \xrightarrow{:\frac{2}{3}} \bigcirc \xrightarrow{\square} \frac{9}{8} \xrightarrow{:\frac{27}{16}} \bigcirc$

5 Relative Häufigkeiten aus absoluten Häufigkeiten bestimmen

Ein Reiseveranstalter führt eine Befragung nach den beliebtesten Urlaubsgebieten durch:

Gebiet	Deutschland	Italien	Spanien	Griechenland	Frankreich	Portugal
Anzahl	20	112	143	41	84	11

Bestimme die relativen Häufigkeiten für die einzelnen Urlaubsgebiete.

Lösungen | Seite 187

2 Basiswissen aus früheren Jahrgangsstufen

Zahlen und Operationen

Terme

Wenn nur Punktrechnungen (· und :) oder nur Strichrechnungen (+ und −) vorkommen, dann wird von links nach rechts gerechnet.

$12 + 7 - 8 = 19 - 8 = 11$
$119 : 17 \cdot 5 = 7 \cdot 5 = 35$

Bei Termen mit Klammern berechnet man zuerst das, was in der Klammer steht.

$7 \cdot (12 - 8) = 7 \cdot 4 = 28$

Punktrechnungen (· und :) werden vor Strichrechnungen (+ und −) ausgeführt.

$23 - (4 + 5 \cdot 8) : 11 = 23 - (4 + 40) : 11$
$= 23 - 44 : 11 = 23 - 4 = 19$

Anteile als Bruch, Dezimalbruch und in Prozent

Anteile kann man als Bruch, als Dezimalbruch oder in Prozent angeben.
Die Zahl über dem Bruchstrich heißt der Zähler und die Zahl unter dem Bruchstrich der Nenner des Bruches. Der Nenner gibt an, in wie viele gleich große Teile man ein Ganzes teilt. Der Zähler gibt an, wie viele dieser Teile man betrachtet.
Anteile werden auch häufig in Prozent angegeben.
Dabei ist 1% eine andere Schreibweise für $\frac{1}{100}$. Dies entspricht dem Dezimalbruch 0,01.

Das Ganze wurde in zehn gleiche Teile geteilt. Der gefärbte Anteil ist $\frac{4}{10}$ oder 0,4 oder $\frac{40}{100} = 40\,\%$.

$0{,}4 = \frac{4}{10} = \frac{40}{100} = 40\,\%$

Erweitern und Kürzen

Ein Bruch wird erweitert, indem man den Zähler und den Nenner mit derselben natürlichen Zahl (ungleich null) multipliziert.
Ein Bruch wird gekürzt, indem man den Zähler und den Nenner durch dieselbe natürliche Zahl (ungleich null) dividiert.
Alle Brüche, die aus einem Bruch durch Erweitern oder Kürzen entstehen, bezeichnen dieselbe Zahl.

$\frac{5}{6}$ mit 3 erweitert ergibt $\frac{15}{18}$.
$\frac{8}{12}$ mit 4 gekürzt ergibt $\frac{2}{3}$.

Dezimalbrüche und Brüche

Dezimalbrüche mit einer, zwei, drei … Nachkommastellen sind eine andere Schreibweise für Brüche mit dem Nenner 10, 100, 1000 …
Will man einen Bruch in einen Dezimalbruch umwandeln, so erweitert oder kürzt man den Nenner auf eine Zehnerpotenz, oder man dividiert den Zähler durch den Nenner.
Wandelt man einen Bruch durch Division in einen Dezimalbruch um, so erhält man einen abbrechenden oder einen periodischen Dezimalbruch.

$0{,}4 = \frac{4}{10}$
$0{,}17 = \frac{17}{100}$
$0{,}513 = \frac{513}{1000}$
$\frac{12}{75} = \frac{4}{25} = \frac{16}{100} = 0{,}16$
$\frac{15}{40} = 15 : 40 = 0{,}375$
$\frac{15}{99} = 15 : 99 = 0{,}151515\ldots = 0{,}\overline{15}$

Bruchzahlen vergleichen

Dezimalbrüche vergleicht man, indem man die Ziffern stellenweise miteinander vergleicht.
Brüche lassen sich vergleichen, indem man sie so erweitert oder kürzt, dass die Nenner oder die Zähler gleich sind. Sind die Nenner gleich, so ist der Bruch mit dem größeren Zähler größer. Sind die Zähler gleich, so ist der Bruch mit dem kleineren Nenner größer.

$0{,}4 < 0{,}5$ $\quad 0{,}091 < 0{,}126 \quad$ $0{,}0102 < 0{,}02$

$\frac{2}{5} < \frac{1}{2}$, denn $\frac{2}{5} < \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$
$\frac{1}{7} < \frac{4}{21}$, denn $\frac{1}{7} = \frac{3}{21} < \frac{4}{21}$