

2 Ein erster Überblick

2.1 Sternleichgewichte

In den voran gegangenen Abschnitten haben wir einige wichtige astronomische Grundlagen diskutiert. Einige der Kernaussagen fassen wir noch einmal zusammen. Die Gravitationswechselwirkung ist die wesentliche Wechselwirkung zwischen den astrophysikalischen Objekten auf sehr großen (makroskopischen) Skalen. Die Gravitationswechselwirkung auf großen Skalen wird ergänzt durch andere Wechselwirkungen auf kleineren Skalen – denken wir etwa an das nukleare Brennen im Sterninneren. Also insgesamt finden interessante astrophysikalische Prozesse auf recht unterschiedlichen Skalen statt. Es ist nicht übertrieben, bei den Skalen von Unterschieden in (mindestens) 14 Größenordnungen (z.B. in Längen oder Massen) auszugehen.

Je nach Fragestellung benutzen wir sehr unterschiedliche Zeitaufösungen. Bei der Entstehung des Kosmos werden Prozesse auf Bruchteilen von Sekunden relevant. Wir können allerdings keinerlei Zeitschritte kleiner als die Planck-Zeit

$$t_{\text{Pl}} = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^5}} = 5.391 \times 10^{-44} \text{ s} \quad (2.1.1)$$

aufösen. Wenn wir die jetzige und zukünftige Entwicklung der Kosmos untersuchen, bewegen wir uns auf Zeitabschnitten von Milliarden von Jahren. Eine obere Grenze in der Zeitvorhersage scheint durch etwa 10^{100} Jahre gegeben zu sein. Letztere ist die Zeit, die ein schwarzes Loch von der Masse einer Galaxie (ca. 10^{10} Sonnenmassen) braucht, bis es über einen quantenmechanischen Prozess zerstrahlt ist.

Die astrophysikalischen Objekte haben recht unterschiedliche Strukturen. Eine Übersicht findet sich in der nachfolgenden Tabelle. Wir können uns mit einzelnen Sternen beschäftigen, aber auch binäre Sterne, Cluster von $10^2 - 10^6$ Sternen, Galaxien mit $10^{10} - 10^{12}$ Sternen, Cluster von 1000 Galaxien usw. beobachten. Das macht einerseits die Astrophysik besonders spannend, aber andererseits auch höchst komplex.

Der uns bekannteste Stern ist die Sonne. Sie entstand etwa neun Milliarden Jahre nach dem Urknall und ist Teil der Galaxie „Milchstraße“ mit ca. 10^{11} sichtbaren Sternen und ca. 10^{10} Solarmassen in Gasform. Letztere ist wichtig für weitere Sternentstehungen.

Die Milchstraße ist mehr oder weniger eine Scheibe mit Radius 10 kpc (und dazu senkrechter Ausdehnung von 1kpc). Das Alter der Galaxie ist ungef. 10^{10} Jahre. Man nimmt an, dass die Milchstraße jetzt im (praktisch) „stationären“ Zustand ist.

Objekt	Lineardimension	Mittlere Entfernung der Teilsysteme	Anzahl der Teilsysteme	Masse des Objektes
Kugelsternhaufen	10-100 pc		$10^5 - 10^7$	$10^5 - 10^6 M_{\odot}$
offene Sternhaufen	2-20 pc		$10 - 10^3$	
Galaxien	1-100 kpc	3-5 pc	$10^2 - 10^3$ Kugelsternhaufen 10^{11} Sterne	$10^6 - 10^{13} M_{\odot}$
Galaxienhaufen	2-10 Mpc	1 Mpc	$10 - 10^4$	$10^{12} - 10^{15} M_{\odot}$
Superhaufen	$(50-150) h^{-1}$ Mpc	$25 h^{-1}$ Mpc	5-50	$\sim 10^{16} M_{\odot}$
Voids	$(25-100) h^{-1}$ Mpc	$50 h^{-1}$ Mpc		
Zelluläre Strukturen	$\sim (100-200) h^{-1}$ Mpc	$100 h^{-1}$ Mpc		

Tabelle 2.1.1: Die Tabelle zeigt typische Anhäufungen astrophysikalischer Objekte mit den entsprechenden Bezeichnungen, Dimensionen und charakteristischen Parametern.

Die Milchstraße wiederum ist Teil eines Galaxienhaufens. Galaxien sind eingebettet in den gesamten Kosmos, dessen Dynamik mittels der Kosmologie berechnet wird. Es gibt verschiedene kosmologische Modelle.

Wir werden uns hauptsächlich mit der Sternentwicklung, von der Entstehung bis zum Sterntod beschäftigen. Ein anderer wichtiger Aspekt wird aber hier nicht detaillierter behandelt werden. Gemeint ist die Problematik der Entstehung des Weltalls. Da dieser Bereich große Kenntnisse der Elementarteilchenphysik voraussetzt, kann er in dieser Darstellung keinen breiten Raum einnehmen. Trotzdem erwähnen wir hier nochmals das Szenario der ersten drei Minuten.

Die Expansion des Universums verleitet zu einer „Extrapolation zurück“ zu den Anfängen. Gehen wir ca. 10^{10} Jahre zurück, so ergibt die Rückwärts-Extrapolation etwas wie eine Singularität. Zusammen mit der Entdeckung der kosmischen (Mikrowellen) Hintergrundstrahlung durch Penzias und Wilson im Jahre 1965 [siehe Abbildung 2.1.1] kommt man dann zu folgendem Bild: Der „big bang“ passierte nicht irgendwo im Raum, sondern überall gleichzeitig. „Überall“ war zu

einem Punkt zusammengeschrumpft, sofern nach kosmologischen Vorstellungen das Universum geschlossen ist (s. allgemeine Relativitätstheorie). In Stichworten die Entwicklung nach dem Urknall:

$t \approx 10^{-9}s$:

Quark-Gluonen Plasma mit Leptonen und Antileptonen, Neutrinos und Antineutrinos, Photonen. Bei $T \leq 10^{14}K$ (Abkühlung durch Expansion) vernichteten sich Materie und Antimaterie. Aufgrund einer Asymmetrie blieben mehr Quarks übrig, die die Protonen und Neutronen bildeten (bei $T \approx 10^{12}K \hat{=} 10^2 MeV$).

$10^{-3}s \leq t \leq 1s$:

Plasma aus Protonen, Neutronen und Antineutrinos, Photonen, ... Bei $T \leq 10^{10}K$ ($1MeV$) entkoppeln Neutrinos vom Rest (d.h. keine Wechselwirkung mehr). [Aufgrund der Expansion des Universums hat sich dieses Neutrinogas heute auf ca. 2K abgekühlt.] Elektron-Positron Paare vernichten sich bei 0.5 MeV, so dass alle Positronen und fast alle Elektronen verschwunden sind.

$t \approx 100s$:

Bei ca. 10^9K ($0.1MeV$) bilden sich leichte Kerne aus Neutronen und Protonen. Es entstehen 75% Wasserstoffkerne und 25% Heliumkerne.

$t \approx 300\,000\,a$:

Bei $T \leq 4000K$ ($0.4eV$) können sich stabile Atome bilden, vornehmlich Wasserstoff und Helium. Die Photonen entkoppeln vom Rest, d.h. das System ist optisch durchlässig für Photonen bei ca. 4000 K. [Expansion führt zu einer Abkühlung auf 3 K heute; kosmische Hintergrundstrahlung. Die Photonen sind wärmer als die Neutrinos, da sie durch die Wärme bei der Elektronen-Positronen Annihilation aufgeheizt wurden.]

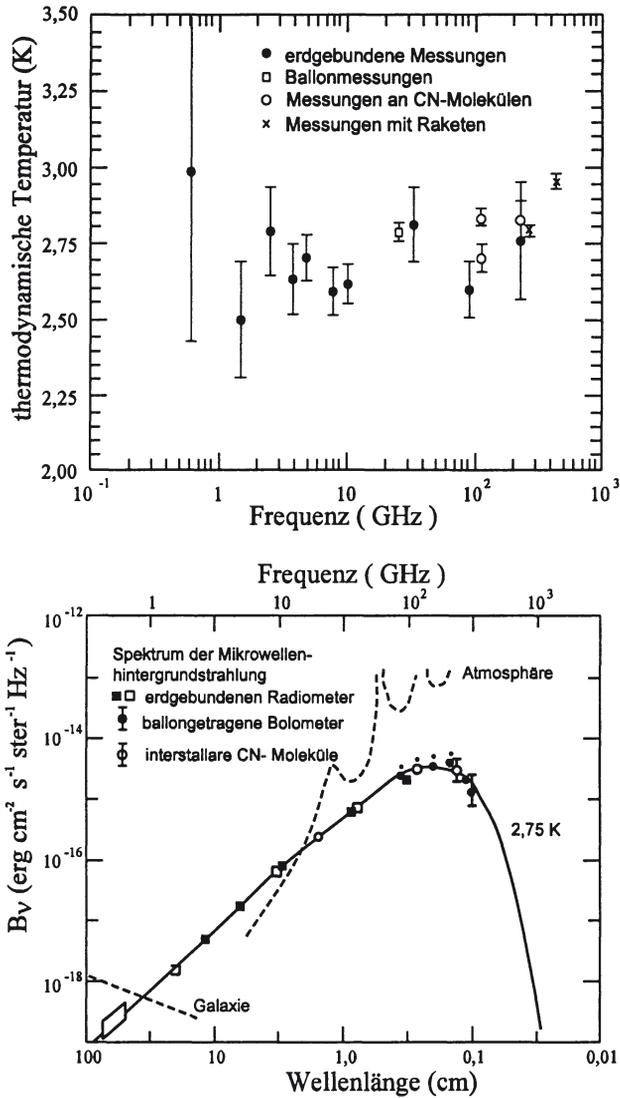


Abbildung 2.1.1: Übersicht über Resultate zur Messung der kosmischen Hintergrundstrahlung.

Die Existenzbereiche der verschiedenen Modellzonen ergeben sich im wesentlichen aus den Erzeugungs- und Vernichtungsraten (Querschnitte) der einzelnen Pro-

zesse. Als Konsequenz des obigen Szenarios können wir davon ausgehen, dass ca. 300 000 Jahre nach dem big bang Wasserstoff und Helium als Urstoffe für die Sternentstehung zur Verfügung standen. Durch Gravitation kann sich Materie zu Sternen (komprimierte Materie) zusammenballen. Thermonukleare Fusion und Druck sind für das Sternendasein ganz entscheidend.

Wir diskutieren jetzt die einfachsten Aspekte, die in dieser Entwicklung eine Rolle spielen und wählen am Ende unsere Sonne als Beispiel eines Sterns. Auf der Zeitskala, siehe Abbildung 2.1.2, befinden wir uns bei ca. 10^{10} Jahren. Folgende

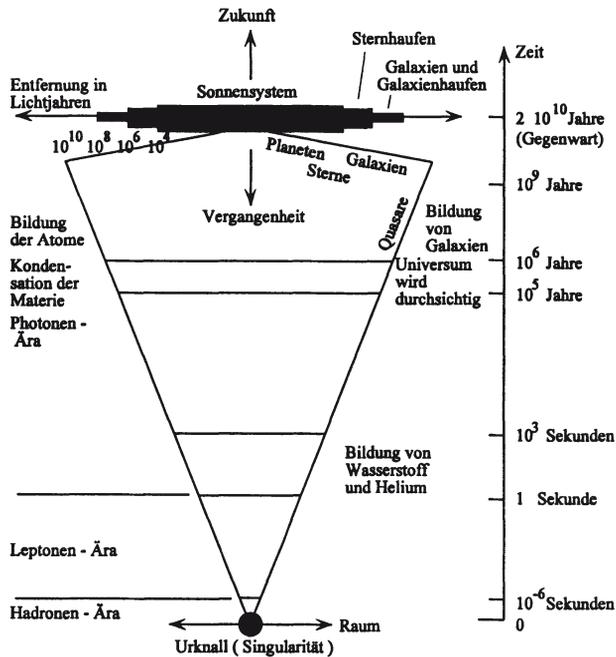


Abbildung 2.1.2: Schematische Darstellung der wesentlichen physikalischen Prozesse in der zeitlichen Entwicklung des Universums.

Punkte werden wir bei dieser ersten „Tour“ durch die Sternentwicklung genauer ansprechen:

- Kollaps einer Massenschale ohne Druckgradient

- Hydrostatisches Gleichgewicht und makroskopisches Virialtheorem
- Die klassischen (nicht-relativistischen und relativistischen) Adiabatenindices
- Qualitative Argumente für Strukturbildung
- Jeans-Instabilität und Jeans-Masse
- Temperatur und Druck bis zur quantenmechanischen Entartung
- Erzeugungs- und Verlustmechanismen am Beispiel der Sonne
- Fusionsprozesse und stellare Nukleosynthese
- Entwicklung der Sterne nach dem nuklearen Brennen

2.1.1 Kollaps einer Massenschale

Wir beginnen unsere Überlegungen zur Struktur eines Sterns mit einem sehr einfachen Modell. Der radial-symmetrische Stern bestehe aus Materie mit gegebener Massendichte zum Zeitpunkt $t = t_0$. Wir berücksichtigen lediglich die Gravitationswechselwirkung. Dann lautet die Impulsbilanz für ein Volumenelement (wir schreiben die totale Zeitableitung, vernachlässigen aber im Folgenden die nichtlinearen konvektiven Terme)

$$\rho \frac{d^2 r}{dt^2} = -G \frac{M_r \rho}{r^2} - \frac{\partial P}{\partial r}. \quad (2.1.2)$$

In unserem ersten einfachen Modell untersuchen wir jetzt die Konsequenzen, die sich aus einer Vernachlässigung des Druckgradienten ergeben. In anderen Worten, wir vereinfachen zu

$$-\frac{d^2 r}{dt^2} = g(r) \equiv G \frac{M_r}{r^2}, \quad (2.1.3)$$

wobei r der Ort einer Massenschale sei, und

$$M_r = \int_0^r \rho 4\pi r^2 dr \quad (2.1.4)$$

ist die innere Masse. Bezüglich der Gravitation wirkt die innere Masse so als ob sie im Zentrum konzentriert sei. Anschaulich erwarten wir einen radialen Kollaps, und wir machen die plausible Annahme, dass auch die innere Verteilung kollabiert und demgemäß die Masse $M_r = m_0$ im Inneren konstant bleibt.

Integration von (2.1.3) liefert

$$\frac{1}{2} \left[\frac{dr}{dt} \right]^2 = \frac{Gm_0}{r_0} - \frac{Gm_0}{r}, \quad (2.1.5)$$

wenn zur Zeit t_0 der Abstand r_0 ist und die Anfangsgeschwindigkeit verschwindet. Bezeichnen wir die Zeit für den freien Fall bis zum Zentrum $r = 0$ mit t_{FF} , so gilt

$$t_{FF} = \int_{r_0}^0 \frac{dt}{dr} dr = - \int_{r_0}^0 \frac{1}{\sqrt{\frac{2Gm_0}{r} - \frac{2Gm_0}{r_0}}} dr. \quad (2.1.6)$$

Führen wir die dimensionslose Variable $x = r/r_0$ ein, so folgt

$$t_{FF} = \sqrt{\frac{r_0^3}{2Gm_0}} \int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}} dx. \quad (2.1.7)$$

Das Integral auf der rechten Seite werten wir mit der Substitution $x = \sin^2 \theta$ aus und finden

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}} dx = 2 \int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta d\theta = \frac{\pi}{2}. \quad (2.1.8)$$

Führen wir noch die Abkürzung

$$\rho_0 := \frac{m_0}{\frac{4\pi}{3} r_0^3} \quad (2.1.9)$$

ein, so gilt

$$t_{FF} = \sqrt{\frac{3\pi}{32G\rho_0}}. \quad (2.1.10)$$

t_{FF} ist im allgemeinen sehr kurz auf der kosmischen Zeitskala. Zum Beispiel würde für die Sonne mit $\rho_0 = 1.4 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ die Kollapszeit

$$t_{FF} \approx \frac{1}{2} h \quad (2.1.11)$$

gelten.

Aus diesen einfachen Überlegungen folgt, dass der Druck, erzeugt durch das Brennen des Sterns, ganz wesentlich ist. Die nächste Frage ist natürlich, wie sich die Dynamik entwickelt, wenn man den Druckgradienten $-\partial P/\partial r$ einbezieht. Wir gehen die Frage in zwei Schritten an. Zunächst überlegen wir uns, wie ein hydrostatisches Gleichgewicht beschaffen sein könnte.

2.1.2 Virialtheorem

Eine Lösung der Gleichung

$$\frac{dP}{dr} = -\rho \frac{GM_r}{r^2} \quad (2.1.12)$$

erfordert die Kenntnis von $\rho(r)$. Früher hatten wir schon einmal für eine Abschätzung die Annahme $\rho = \text{const}$ gemacht, die aber nicht sehr gut ist. Schauen wir uns zunächst einmal an, was wir pauschal sagen können.

Multiplikation mit $4\pi r^3$ und Integration über r von 0 bis R liefert

$$\int_0^R dr 4\pi r^3 \frac{dP}{dr} = - \int \frac{GM_r}{r} dm \equiv E_{Gr}, \quad (2.1.13)$$

mit $dm = 4\pi r^2 \rho dr$. E_{Gr} ist die (potentielle) Gravitationsenergie der gesamten Massenverteilung.

Auf der linken Seite können wir partiell integrieren. Verschwindet der Druck auf der Oberfläche bei R , so folgt

$$-3\langle P \rangle V = E_{Gr}, \quad (2.1.14)$$

wobei

$$\langle P \rangle = \frac{\int P(r) dV}{\int dV} \quad (2.1.15)$$

der über das Volumen gemittelte Druck ist. Mehr als das Virialtheorem

$$\langle P \rangle = -\frac{1}{3} \frac{E_{Gr}}{V} \quad (2.1.16)$$

können wir ohne explizite Kenntnis der Zustandsgleichung(en) nicht herausfinden.

2.1.3 Klassische Adiabatenindices

Zunächst berechnen wir den Druck P über die allgemeine Formel der statistischen Thermodynamik

$$P = - \int_0^\infty \frac{d\varepsilon_p}{dV} f(\varepsilon_p) g(p) dp, \quad (2.1.17)$$

wobei für Bosonen

$$f(\varepsilon_p) = \frac{1}{e^{(\varepsilon_p - \mu)/kT} - 1} \quad (2.1.18)$$

mit

$$\varepsilon_p^2 = m^2 c^4 + c^2 p^2 \quad (2.1.19)$$

gilt. Da der Impuls durch

$$\vec{p} = \hbar \vec{k} = \hbar \frac{\pi}{L} \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} \quad (2.1.20)$$

gegeben ist, finden wir die Volumenabhängigkeiten

$$p \sim \frac{1}{V^{1/3}} \quad , \quad \varepsilon_p \sim \sqrt{m^2 c^4 + \dots \frac{1}{V^{2/3}}} . \quad (2.1.21)$$

Dieses Ergebnis erlaubt uns, die folgende Berechnung durchzuführen:

$$\frac{d\varepsilon_p}{dV} = \frac{1}{2\varepsilon_p} c^2 2p \frac{dp}{dV} = -c^2 \frac{p}{3V} \frac{p}{\varepsilon_p} = -\frac{p v_p}{3V} . \quad (2.1.22)$$

Wir haben

$$\frac{d\varepsilon_p}{dp} = \frac{pc^2}{\varepsilon_p} \equiv v_p \quad (2.1.23)$$

gesetzt. v_p ist die Geschwindigkeit eines relativistischen Teilchens mit dem Impuls p , m ist die Ruhmasse.

Die Geschwindigkeit folgt aus p/m_{gesamt} , wobei $\varepsilon_p = m_{\text{gesamt}} c^2$ ist. Damit berechnet sich

$$P = \frac{1}{3V} \int_0^\infty p v_p f(\varepsilon_p) g(p) dp = \frac{N}{3V} \langle p v_p \rangle . \quad (2.1.24)$$

Jetzt werten wir diese Beziehung für ein klassisches ideales Gas aus, indem wir

$$f(\varepsilon_p) \approx e^{\mu/kT} e^{-\varepsilon_p/kT} \quad (2.1.25)$$

setzen. Beachten wir

$$\begin{aligned} \int_0^\infty p^3 e^{-\varepsilon_p/kT} v_p dp &= -kT \int_0^\infty p^3 d \left[e^{-\varepsilon_p/kT} \right] \\ &= 3kT \int_0^\infty e^{-\varepsilon_p/kT} p^2 dp , \end{aligned} \quad (2.1.26)$$

so finden wir ganz allgemein

$$P = \frac{kT}{V} \int f(\varepsilon_p) g(p) dp = nkT . \quad (2.1.27)$$

Diese Formel gilt nicht-relativistisch wie relativistisch (für ein klassisches ideales Gas). Die kinetische Energie drücken wir auch explizit durch kT aus. Nicht-relativistisch gilt

$$E_{\text{kin}} = \int \frac{p^2}{2m} f(\varepsilon_p) g(p) dp = \frac{3}{2} NkT , \quad (2.1.28)$$

während ultra-relativistisch folgt

$$E_{\text{kin}} = \int pc f(\varepsilon_p) g(p) dp = 3NkT . \quad (2.1.29)$$

Zusammen mit der Beziehung $P = nkT$ haben wir damit

$$P = \begin{cases} \frac{2}{3} \frac{E_{\text{kin}}}{V} & \text{im nicht-relativistischen Fall,} \\ \frac{1}{3} \frac{E_{\text{kin}}}{V} & \text{im ultra-relativistischen Fall.} \end{cases}$$

In diesem Zusammenhang ist die Kenntnis der adiabatischen Indices γ interessant:

$$\gamma = \begin{cases} \frac{5}{3} & \text{für nicht-relativistische Teilchen,} \\ \frac{4}{3} & \text{für ultra-relativistische Teilchen.} \end{cases} \quad (2.1.30)$$

Für adiabatische Prozesse gilt nämlich $PV^\gamma = \text{const}$ oder

$$\gamma \frac{dV}{V} + \frac{dP}{P} = 0 . \quad (2.1.31)$$

Wir können dies auch in der Form

$$d(PV) = PdV + VdP = -(\gamma - 1)PdV \quad (2.1.32)$$

schreiben. Werden keine inneren Freiheitsgrade angeregt, so geht die Kompressionsarbeit $-PdV$ in kinetische Energie über:

$$dE_{\text{kin}} = -PdV , \quad (2.1.33)$$

und damit haben wir

$$dE_{\text{kin}} = \frac{1}{\gamma-1} d(PV), \quad (2.1.34)$$

was wir unmittelbar integrieren können. Es gilt also

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{\gamma-1} PV. \quad (2.1.35)$$

Vergleichen wir die Formel

$$P = (\gamma-1) \frac{E_{\text{kin}}}{V} \quad (2.1.36)$$

mit

$$P = \begin{cases} \frac{2}{3} \frac{E_{\text{kin}}}{V} & \text{im nicht-relativistischen Fall,} \\ \frac{1}{3} \frac{E_{\text{kin}}}{V} & \text{im ultra-relativistischen Fall} \end{cases}$$

klassischer Teilchen, so folgen die obigen Ausdrücke für γ .

2.1.4 Gültigkeit der klassischen Rechnung

Wir können uns jetzt fragen, wann die klassische Rechnung zusammenbricht und quantenmechanisch gerechnet werden muss.

Im Rahmen der klassischen Näherung haben wir

$$e^{(\epsilon_p - \mu)/kT} \gg 1 \quad (2.1.37)$$

gesetzt. Da

$$\epsilon_p = \sqrt{m^2 c^2 + c^2 p^2} \quad (2.1.38)$$

ist, können wir für den nicht-relativistischen Grenzfall $\epsilon_p > mc^2$ abschätzen. Damit ist die erste Ungleichung erfüllt, wenn

$$\mu - mc^2 \ll -1 \quad (2.1.39)$$

ist. Das chemische Potential μ können wir durch die Teilchenzahl ausdrücken:

$$N = \int_0^\infty f(\epsilon_p) g(p) dp \quad (2.1.40)$$

$$\approx e^{(\mu - mc^2)/kT} g_s \frac{V}{h^3} (2\pi mkT)^{3/2}$$

im nicht-relativistischen, klassischen Fall mit $\varepsilon_p \approx mc^2 + \frac{p^2}{2m}$. Damit folgt

$$\mu - mc^2 = -kT \ln \left[\frac{g_s n_Q}{n} \right] \quad (2.1.41)$$

mit

$$n_Q := \left[\frac{2\pi m kT}{h^2} \right]^{3/2}. \quad (2.1.42)$$

Die klassische, nicht-relativistische Rechnung ist also gültig für

$$n \ll n_Q. \quad (2.1.43)$$

Diese Bedingung stimmt (natürlich) mit der Bedingung überein, dass der mittlere Teilchenabstand groß gegen die thermische deBroglie-Wellenlänge $\lambda = h/\sqrt{m kT}$ ist.

Eine entsprechende Abschätzung im klassischen ultra-relativistischen Fall mit $\varepsilon_p \approx pc \approx 3kT$ führt zu

$$\mu = -kT \ln \left[\frac{g_s n_Q}{n} \right] \quad (2.1.44)$$

mit

$$n_Q = 8\pi \left[\frac{kT}{hc} \right]^3. \quad (2.1.45)$$

$n \ll n_Q$ stimmt wieder mit der Bedingung überein, dass der mittlere Teilchenabstand groß gegen die thermische deBroglie Wellenlänge $\lambda = h/[3kT/c]$ ist.

Mit dem Virialtheorem und der Kenntnis der Adiabatenindices haben wir bereits entscheidende Informationen für einfache Abschätzungen parat. Allerdings setzen wir (noch) voraus, dass das Sternleichgewicht klassisch beschrieben werden kann. Im nächsten Abschnitt präsentieren wir für den klassischen Grenzfall einfache Szenarien der Strukturbildung.

2.2 Strukturbildung

Das Virialtheorem stellt ein sehr mächtiges Werkzeug dar, das sich zur qualitativen Diskussion exzellent nutzen lässt. Im letzten Abschnitt hatten wir die Beziehung

$$\langle P \rangle = -\frac{1}{3} \frac{E_{Gr}}{V} \quad (2.2.1)$$

hergeleitet. Setzen wir darin

$$P = (\gamma - 1) \frac{E_{kin}}{V} \quad (2.2.2)$$

ein, so finden wir (bei adiabatischen Prozessen) die Relation

$$\langle P \rangle = (\gamma - 1) \frac{E_{kin}}{V} \stackrel{!}{=} -\frac{1}{3} \frac{E_{Gr}}{V} \quad (2.2.3)$$

oder

$$3(\gamma - 1)E_{kin} + E_{Gr} = 0. \quad (2.2.4)$$

Die gesamte Energie wird durch die Summe von kinetischer und potentieller Energie gebildet. Diesen Zusammenhang drücken wir in

$$E_{kin} + E_{Gr} \equiv E_{tot} = -(3\gamma - 4) E_{kin} \quad (2.2.5)$$

aus. Zwei erste Schlüsse lassen sich unmittelbar ziehen:

Für $\gamma = \frac{5}{3}$ (nicht-relativistisch) folgt $E_{kin} + E_{Gr} = -E_{kin}$.

Für $\gamma = \frac{4}{3}$ (ultra-relativistisch) folgt $E_{kin} + E_{Gr} = 0$.

Die kinetische Energie ist eine positiv definite Größe. Im klassischen, nicht-relativistischen Fall gilt daher

$$E_{kin} + E_{Gr} \equiv E_{total} = -E_{kin} = \frac{1}{2} E_{Gr} < 0. \quad (2.2.6)$$

Offensichtlich folgen daraus die Aussagen:

1. $E_{total} < 0$, d.h. wir haben einen gebundenen Zustand (s.u.).
2. Stark gebundene Zustände ($E_{total} < 0$ und $|E_{total}|$ groß) haben große kinetische Energien, d.h. sie sind heiß.
3. Wenn durch „irgendwelche“ Prozesse ein Stern Energie verliert und die Gesamtenergie abnimmt, kontrahiert der Stern, und er wird heißer.

Unter ultra-relativistischen Bedingungen mit

$$E_{\text{kin}} + E_{Gr} = 0 \quad (2.2.7)$$

liegt offensichtlich ein kritischer Grenzfall vor, auf den wir noch eingehend zu sprechen kommen.

Kehren wir zum nicht-relativistischen Bereich zurück. Zum anschaulichen Verständnis der angegebenen Aussagen ruft man sich zunächst am besten noch einmal die Formel für die Gravitationsenergie,

$$- \int \frac{GM_r}{r} dm \equiv E_{Gr} \quad (2.2.8)$$

ins Gedächtnis. Anders ausgedrückt, wenn wir eine Masse Δm aus dem Unendlichen in den Abstand r an eine Masse M_r heranbringen, nimmt die Gravitationsenergie (potentielle Energie) des Gesamtsystems um den Wert

$$\Delta E_{Gr} = - \frac{GM_r}{r} \Delta m \quad (2.2.9)$$

ab. Beachte, dass der Nullpunkt bei unendlicher Separation liegt und das Vorzeichen durch die Massenanziehung definiert ist (die potentielle Energie nimmt bei Annäherung ab). Ein gravitative Bindung erfordert $E_{\text{total}} < 0$ bzw. $|E_{Gr}| > E_{\text{kin}}$. Dann kann selbst eine vollständige Umwandlung der kinetischen Energie in Gravitationsenergie das System nicht völlig (ins Unendliche) auseinander treiben.

Soweit die Überlegungen zu gravitativen „Gleichgewichten“. Wir haben noch nichts über die Stabilität der Gleichgewichte gesagt. $|E_{Gr}| > E_{\text{kin}}$ wird oft als Kriterium für den Gravitationskollaps angegeben (siehe auch Jeans Kriterium). Ein Stabilitätskriterium (oder Instabilitätskriterium) zu finden, ist keinesfalls trivial. Das wird uns noch eingehender beschäftigen. Trotzdem schauen wir uns die Ungleichung an dieser Stelle schon einmal genauer an.

Qualitativ erhalten wir für eine homogene Massenverteilung ($\rho = \text{const}$)

$$E_{Gr} = - \int_0^R \frac{Gm(r)\rho(r)}{r} 4\pi r^2 dr \quad (2.2.10)$$

$$= - \frac{(4\pi)^2}{3} G\rho^2 \int_0^R r^4 dr = - \frac{3}{5} \frac{GM^2}{R} \sim O\left(-\frac{GM^2}{R}\right). \quad (2.2.11)$$

Die kinetische Energie ist

$$E_{\text{kin}} = \frac{3}{2} NkT \quad (2.2.12)$$

so dass die (approximative) Ungleichung lautet

$$\frac{GM^2}{R} > \frac{3}{2} NkT, \quad (2.2.13)$$

bzw.

$$\rho \equiv \frac{M}{\frac{4\pi}{3}R^3} > \left(\frac{3kT}{2G\bar{m}}\right)^3 \frac{3}{4\pi M^2} \equiv \rho_{\text{Jeans}}. \quad (2.2.14)$$

Wir haben $M = N\bar{m}$ gesetzt. Die Temperatur T und die mittlere Atom- oder Molekülmasse \bar{m} sind keine extensiven Größen (letztere wachsen proportional zum Volumen). Anders sieht es bei der Masse M aus.

Wir antizipieren für den Moment die Hypothese, dass eine Gravitationskontraktion zu erwarten ist, falls $\rho > \rho_{\text{Jeans}}$ ist. (Diese Hypothese wird bald besser begründet.) Welche Schlussfolgerungen lassen sich schon jetzt daraus ziehen?

1. Je größer die Gesamtmasse M (bei fester Temperatur und gegebener Zusammensetzung), desto wahrscheinlicher ist eine Gravitationskontraktion. Eine Wasserstoffwolke bei $T = 20\text{K}$ und der Masse $M = 10^3 M_{\odot}$ hat $\rho_{\text{Jeans}} \approx 10^{-22} \text{kg m}^{-3}$ oder 10^5 Moleküle pro m^3 als kritische Dichte.
2. In der Entwicklung des Universums kontrahierten erst die schweren Wolken, deren Massen Tausende von Sonnenmassen waren. Die Dichte ρ wuchs und überschritt den kritischen Wert für die Kontraktion von Substrukturen mit kleinerer Masse (z.B. Sonnenmasse). [An dieser Stelle stoppen wir, da wir hier noch nicht über nukleares Brennen sprechen wollen.]

2.2.1 Eine etwas bessere Argumentation

Die Frage nach der Stabilität, also wann sich etwa Gaswolken zusammenballen und astrophysikalisch erkennbare Strukturen (bis hin zu brennenden Sternen) bilden, ist zentral für das Verständnis unseres gegenwärtigen Kosmoszustands. Deshalb widmen wir uns immer wieder dieser Frage in unterschiedlichen Zusammenhängen. Im folgenden werden wir das bereits erwähnte Instabilitätskriterium durch eine Plausibilitätsbetrachtung weiter begründen.

Wir denken uns aus einer homogenen Massenverteilung eine Kugel vom Radius r herausgenommen und anschließend radial komprimiert; siehe Abb. 2.2.1.

Von r gehen wir zu $r - \delta$ über, was zur Folge hat, dass das Volumen um den Faktor $(1 - \alpha)$ verkleinert wird mit $\alpha = 3\delta/r$. Die Dichte wird dann um

$$\rho_1 \approx \alpha \rho_0 \quad (2.2.15)$$

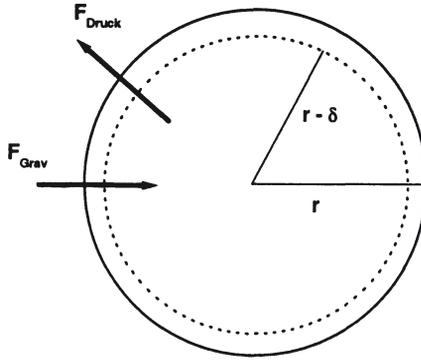


Abbildung 2.2.1: Kompression einer Kugel zur Veranschaulichung des Jeans-Kriteriums.

größer. Die neue Massendichte ist $\rho = \rho_0 + \rho_1$. Damit folgt wegen $P\rho^{-\gamma} = \text{const}$ [bzw. $P = P(\rho)$]

$$P_1 \approx \frac{dP}{d\rho_0} \alpha \rho_0 = \alpha v_s^2 \rho_0 \tag{2.2.16}$$

mit der Schallgeschwindigkeit v_s . Die nach außen gerichtete *zusätzliche* Druckkraft pro Einheitsmasse

$$\Delta F \approx |-\nabla P_1|/\rho \tag{2.2.17}$$

schätzen wir weiter ab, indem wir als charakteristische Länge den Sternradius r benutzen:

$$\Delta F \approx |-\nabla P|/\rho \sim \frac{P_1}{\rho_0 r} \sim \frac{\alpha v_s^2}{r}. \tag{2.2.18}$$

Als Gegenkraft nach innen wirkt die Gravitationskraft. Pro Einheitsmasse finden wir die Änderung

$$\Delta F \sim \frac{GM}{(r-\delta)^2} - \frac{GM}{r^2} \sim \frac{GM\alpha}{r^2}. \tag{2.2.19}$$

Diese Differenz ergibt sich aus dem Kraftausdruck auf eine Masse m auf der Oberfläche, wobei die potentielle Energie durch

$$E_{\text{pot}} = -\frac{GM}{r} m \tag{2.2.20}$$

gegeben ist und bei der Ableitung des Potentials wiederum die charakteristische Länge r benutzt wird.

Wenn die resultierende Kraft nach außen gerichtet ist, ist das System stabil, da die Kompression wieder rückgängig gemacht wird. Instabilität tritt für den Fall

$$G\rho_0 r \alpha > \frac{\alpha v_s^2}{r} \quad (2.2.21)$$

oder

$$r^2 > \frac{v_s^2}{G\rho_0} \quad (2.2.22)$$

auf. Man sagt auch oft, dass ein System gegen langwellige Störungen instabil ist.

Die gerade diskutierte Bedingung können wir auch in der Form

$$\frac{GM}{r} > v_s^2 = \gamma \frac{N}{V} kT \frac{1}{\rho} \quad (2.2.23)$$

bzw.

$$\frac{GM^2}{r} > NkT \quad (2.2.24)$$

schreiben, was mit der früheren Bedingung (2.2.13) qualitativ übereinstimmt.

2.2.2 Jeans Instabilität

Eine exakte Instabilitätsrechnung ist – wie bereits gesagt – im allgemeinen kompliziert. Man muss zunächst den Zustand genau kennen, den man auf Stabilität untersuchen will. Dann linearisiert man um den zu untersuchenden Zustand, was auf ein Eigenwertproblem führt. Letzteres ist im allgemeinen nicht einfach zu lösen. Findet man jedoch eine instabile Mode, kann man auf Instabilität schließen. Noch schwieriger ist ein Stabilitätsbeweis, da man bei ihm alle instabilen Moden ausschließen muss.

Wir versuchen jetzt ein Instabilitätskriterium für eine Gaswolke herzuleiten. Dazu starten wir von den Fluid-Gleichungen

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0, \quad (2.2.25)$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla P - \nabla \phi, \quad (2.2.26)$$

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho . \quad (2.2.27)$$

Wir haben die uns bereits bekannten Gleichungen lediglich um die Kontinuitätsgleichung für die Massendichte ρ ergänzt, da die Massendichte bei einer Kontraktion selbst verändert wird.

Es liegt nun nahe, um eine stationäre Lösung zu linearisieren. Ein Problem stellt die Ermittlung einer stationären Lösung dar. Wenn wir etwa

$$\rho_0 = \text{const} , \quad \vec{v}_0 = 0 , \quad P_0 = \text{const} , \quad \phi_0 = \text{const} \quad (2.2.28)$$

heranziehen wollen, so ist die letzte Gleichung nicht erfüllt, außer wenn man $\rho_0 = 0$ setzen würde, was aber an unserer physikalischen Ausgangsfragestellung völlig vorbei ginge. Wenn man eine Lösung ($\rho_0 \neq 0$) trotzdem für eine Linearisierung benutzt, so bezeichnet man das als so genannten Jeans Schwindel („Jeans swindle“). Das zeigt nur, wie schwierig i.a. Stabilitätsprobleme sind, und bei späteren Problemen greifen wir auf bessere Methoden (z.B. Variationsprinzipien) zurück.

Den „Jeans Schwindel“ kann man für zwei Fälle gut akzeptieren. Erstens, wenn die Längenskalen der Störungen wesentlich kürzer sind als die Ausdehnung der stationären Lösung. Und zweitens, wenn man das Gleichgewicht nicht durch Druckgradienten sondern durch Rotation aufrecht hält. Dann kann man auch einen homogenen Zustand als Anfangswert betrachten.

Zum ersten Fall die folgende Anmerkung. Man geht dann von $\rho_0 = \rho_0(\epsilon \vec{r})$ aus und kann in niedrigster Ordnung die räumliche Variation jeweils vernachlässigen (z.B. $\vec{v}_1 \cdot \nabla \rho_0 \ll \rho_0 \nabla \cdot \vec{v}_1$). Das Gleichgewicht wird dann durch

$$\vec{v}_0 = 0 \quad (2.2.29)$$

zusammen mit

$$0 = -\frac{1}{\rho_0} \nabla P_0 - \nabla \phi_0 , \quad (2.2.30)$$

$$\nabla^2 \phi_0 = 4\pi G \rho_0 . \quad (2.2.31)$$

bestimmt.

Linearisierung um den Zustand (2.2.29)-(2.2.31) führt zu

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \vec{v}_1 = 0 , \quad (2.2.32)$$

$$\frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = -\nabla h_1 - \nabla \phi_1 , \quad (2.2.33)$$

$$\nabla^2 \phi_1 = 4\pi G \rho_1 . \quad (2.2.34)$$

Hierbei haben wir die Terme

$$\frac{\rho_1}{\rho_0^2} \nabla P_0 - \frac{1}{\rho_0} \nabla P_1 \equiv -\nabla h_1 \quad (2.2.35)$$

über die Enthalpiestörung h_1 ausgedrückt. Wir setzen voraus, dass der Druck nur von ρ abhängt und schreiben

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \nabla P(\rho) &= \frac{1}{\rho} \frac{dP}{d\rho} \nabla \rho = \nabla \int_0^{\rho(\vec{r})} \frac{1}{\rho} \frac{dP}{d\rho} d\rho \\ &= \nabla \int_0^{\rho} \frac{dP}{\rho} \equiv \nabla h . \end{aligned} \quad (2.2.36)$$

Damit folgt für h_1

$$h_1 = \int_{\rho_0}^{\rho_0 + \rho_1} \frac{1}{\rho} \frac{dP}{d\rho} d\rho \approx \left. \frac{dP}{d\rho} \right|_0 \frac{\rho_1}{\rho_0} \equiv v_s^2 \frac{\rho_1}{\rho_0} . \quad (2.2.37)$$

Die Gleichungen für die Störungen können dann zu

$$\frac{\partial^2 \rho_1}{\partial t^2} - v_s^2 \nabla^2 \rho_1 - 4\pi G \rho_0 \rho_1 = 0 \quad (2.2.38)$$

kombiniert werden. Nach Fourier Transformation erhalten wir die Dispersionsbeziehung

$$\omega^2 = v_s^2 k^2 - 4\pi G \rho_0 , \quad (2.2.39)$$

wobei aufgrund des Ansatzes

$$\rho \sim e^{i\vec{k}\cdot\vec{r} - i\omega t} \quad (2.2.40)$$

ein positiver Imaginärteil von ω exponentielles Anwachsen (Instabilität) bedeutet. Dieser Fall tritt ein für

$$k^2 < k_J^2 \equiv \frac{4\pi G \rho_0}{v_s^2} . \quad (2.2.41)$$

Im Lichte der früheren Resultate können wir das zu

$$\lambda^2 \equiv \left(\frac{2\pi}{k} \right)^2 > \lambda_J^2 \equiv \frac{\pi v_s^2}{G \rho_0} \quad (2.2.42)$$

umschreiben. Es lässt sich eine Jeans-Masse definieren,

$$M_J = \frac{4\pi}{3} \rho_0 \left(\frac{1}{2} \lambda_J \right)^3 = \frac{1}{6} \pi \rho_0 \left(\frac{\pi v_s^2}{G \rho_0} \right)^{3/2}. \quad (2.2.43)$$

Wenn die Masse M der Wolke,

$$M = \frac{4\pi}{3} \rho_0 R^3, \quad (2.2.44)$$

größer als die Jeans-Masse ist, kann sich eine Instabilität ausbilden.

Die Jeans-Instabilität kann auch im Rahmen eines kinetischen Modells diskutiert werden. Dann geht man von

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} - \nabla \phi \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = 0, \quad (2.2.45)$$

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G \int f(\vec{r}, \vec{v}, t) d^3v \quad (2.2.46)$$

aus.

Die Jeans-Instabilität gibt uns die Möglichkeit, die Ausbildung von Strukturen in astrophysikalischen Systemen verständlich zu machen. Die Zusammenballungen, die sich aufgrund der Jeans-Instabilität entwickeln, nennt man Proto-Sterne. Darauf kommen wir gleich zurück. Zuvor noch ein grobes Argument für einen stabilen Endzustand.

Für Sternleichgewichte haben wir ein Virialtheorem hergeleitet. Wenn wir mit Hilfe der Adiabatengleichungen im nicht-relativistischen Grenzfall

$$2E_{kin} + E_{Gr} = 0 \quad (2.2.47)$$

oder (ohne Zahlenfaktoren!)

$$NkT \sim \frac{M^2}{R} G \quad (2.2.48)$$

ansetzen, so folgt für die Ausdehnung R

$$R \sim \frac{GM}{v_{th}^2} \quad (2.2.49)$$

bzw.

$$R^2 \sim \frac{v_{th}^2}{G\rho_0} \sim \lambda_J^2. \quad (2.2.50)$$

Daraus folgt, dass wir derartige Konfigurationen als (wahrscheinlich) stabil erwarten.

2.2.3 Entwicklung der Proto-Sterne

Wir gehen von folgender Hypothese im Folgenden aus: Durch Jeans Instabilität werden Proto-Stern ähnliche Gebilde entstehen, die annähernd durch ein hydrostatisches Gleichgewicht beschreiben werden können.

Nehmen wir beispielsweise eine Wolke aus molekularem Wasserstoff bei 20K und einer Gesamtmasse $M = 2 \times 10^{33}$ kg ($10^3 M_\odot$). Sie wird kontrahieren, wenn ihre Dichte größer als 10^{-22} kg m^{-3} ist. Ist die Masse $M \approx M_\odot$, so tritt Kontraktion erst bei der 10^6 -fachen Dichte ein.

Eine Gaswolke erfülle

$$\rho > \rho_J \equiv \frac{3}{4\pi M^2} \left[\frac{3kT}{2G\bar{m}} \right]^3, \quad (2.2.51)$$

d.h. die Bedingung für Kontraktion, so folgt bei

$$T = 20K \quad , \quad M \approx M_\odot \quad , \quad \rho_J \approx 10^{-16} \text{ kg } m^{-3} \quad (2.2.52)$$

$R \approx 10^{15}m$ als der kritische Radius. Die Wolke wird zunächst kontrahieren und (Gravitations-)Energie freisetzen. In der ersten Phase wird die frei werdende Gravitationsenergie in Dissoziationsenergie für Wasserstoff-Moleküle und Ionisationsenergie der Wasserstoff-Atome verbraucht:

$$\epsilon_D = 4.5 eV \quad [\text{Dissoziationsenergie}] ; \quad (2.2.53)$$

$$\epsilon_I = 13.6 eV \quad [\text{Ionisationsenergie}] . \quad (2.2.54)$$

Für die Bilanz setzen wir an

$$\frac{GM^2}{R_2} - \frac{GM^2}{R_1} \approx \frac{M}{2m_H} \epsilon_D + \frac{M}{m_H} \epsilon_I, \quad (2.2.55)$$

wobei der Wert des Terms auf der rechten Seite $3 \times 10^{39}J$ für $M = M_\odot$ ist. Daraus errechnet man den Übergang

$$R_1 \approx 10^{15}m \quad \rightarrow \quad R_2 \approx 10^{11}m \quad (2.2.56)$$

in der Zeit (freier Fall ohne Druckgradient)

$$t \approx 200\,000 \text{ Jahre} . \quad (2.2.57)$$

Es ist allerdings zu bemerken, dass der detaillierte Prozess nur mit gekoppelten Transportgleichungen richtig erfasst werden kann.

Mit höherer Dichte wird die Wolke optisch dicht. Beachte die Dichteabhängigkeit der Plasmafrequenz

$$\omega_{pe} = \sqrt{\frac{4\pi n e^2}{m}} . \quad (2.2.58)$$

Die weiter frei werdende Gravitationsenergie wird in thermische Energie umgewandelt. Es gilt approximativ für die Gravitationsenergie

$$E_{Gr} \approx -\frac{GM^2}{R_2} \approx -\left\{ \frac{M}{2m_H} \varepsilon_D + \frac{M}{m_H} \varepsilon_I \right\} . \quad (2.2.59)$$

Davon wird nur ein kleiner Teil für den Aufbau des kinetischen Druckes, der für ein hydrostatisches Gleichgewicht benötigt wird, verwendet.

Im hydrostatischen Gleichgewicht gilt

$$2E_{kin} + E_{Gr} = 0 . \quad (2.2.60)$$

Daraus folgt die Abschätzung

$$kT \approx \frac{1}{12} [\varepsilon_D + 2\varepsilon_I] \approx 2.6 \text{ eV} , \quad (2.2.61)$$

da

$$E_{kin} \approx \frac{M}{m_H} 3kT \quad (2.2.62)$$

für Ionen plus Elektronen ist. Die Abschätzung (2.2.61) ist deshalb brauchbar, weil für den Druckaufbau nur ein Bruchteil der Gravitationsenergie aufgewendet werden muss ($2.6 \text{ eV} \ll 4.5 + 13.6 = 18.1 \text{ eV}$).

Zusammenfassend erwarten wir, dass sich ein Stern mit der inneren Temperatur von ungefähr 30 000 K bildet. Dies (mit Aufbau des kinetischen Drucks) ist die zweite Phase.

Anschließend (dritte Phase) verliert der Stern langsam weiter Energie (durch Abstrahlung), die hauptsächlich durch Gravitationsenergie geliefert werden soll.

Im nahezu hydrostatischen Gleichgewicht wird die Hälfte der gelieferten Gravitationsenergie in kinetische Energie umgewandelt, d.h. der Stern wird heißer. Das geht solange bis neue Prozesse, z.B. thermonukleare Fusion, einsetzen. (Auf die thermonukleare Fusion gehen wir im nächsten Abschnitt ein.) Fängt der Proto-Stern durch Fusion an zu brennen, spricht man von einem echten Stern (stardom). Die Frage ist, ob die Entwicklung tatsächlich über Fusion (bei 10^6 K) ablaufen muss. Dazu schätzen wir ab. Aus

$$2E_{kin} + E_{Gr} = 0 = 2NkT \frac{3}{2} - \frac{GM^2}{R} \quad (2.2.63)$$

folgt

$$kT = \frac{GM^2}{3RN} \approx G\bar{m}M^{2/3}\rho^{1/3}. \quad (2.2.64)$$

Halten wir also M fest, so steigt die Temperatur mit $\rho^{1/3}$. Die Frage ist, ob die Temperatur Fusionstemperatur erreicht *bevor* ρ so groß wird, dass quantenmechanische Effekte eine Rolle spielen. Klassisch können wir rechnen solange

$$\frac{\bar{m}}{r^3} \sim \rho \ll \frac{\bar{m}}{\lambda_{\text{deBrogl.}}^3} \quad \text{mit} \quad \lambda_{\text{deBrogl.}} \approx \frac{h}{\sqrt{m_e kT}} \quad (2.2.65)$$

gilt, d.h.

$$\rho \ll \bar{m} \frac{(m_e kT)^{3/2}}{h^3} \quad (2.2.66)$$

ist. Quantenmechanische Effekte spielen auf jeden Fall eine Rolle wenn

$$\rho \approx \bar{m} \frac{(m_e kT)^{3/2}}{h^3}, \quad (2.2.67)$$

bzw. mit der obigen Abschätzung für kT ,

$$\begin{aligned} kT &\approx G\bar{m}M^{2/3}\bar{m}^{1/3} \frac{(m_e kT)^{1/2}}{h} \\ &\approx \left[\frac{G^2 \bar{m}^{8/3} m_e}{h^2} \right] M^{4/3} \end{aligned} \quad (2.2.68)$$

wird. Bei dieser Temperatur können die Elektronen bereits Entartungsdruck zeigen. Die Temperatur wird dann nicht weiter ansteigen. Insofern ist diese Temperatur der Maximalwert. Wir sehen, dass die kritische Temperatur ($T \geq 1\text{keV}$) von der Masse abhängt. Für $M = M_\odot$ folgt $T \approx 1\text{keV}$.

Genauere Abschätzungen zeigen, dass für thermonukleares Brennen $M \geq 0.08M_\odot$ nötig ist. Ansonsten endet eine Wolke als „Brauner Zwerg“. Bei Braunen Zwergen wird Elektronen-Entartung wichtig, ohne dass jemals thermonukleares Brennen eingesetzt hat.

Andererseits, wenn Strahlungsdruck wesentlich wird, haben wir den Druck durch „ultra-relativistische Teilchen“, und es existiert kein stabiles hydrostatisches Gleichgewicht. Das wird die Existenz auf $M \leq 100M_\odot$ einschränken!

Oft wird der Einfluss der Photonen auf den Druck und den Wärmetransport unterschätzt. Deshalb zum Abschluss eine Tabelle mit charakteristischen Daten für Photonen.

		$T \approx 6\,000\,K$	$T = 6\,000\,000\,K$
Energie	$2.7kT$	$1.4eV$	$1.4keV$
Photonendichte	$n = bT^3$	$4 \times 10^{18} m^{-3}$	$4 \times 10^{27} m^{-3}$
Energiedichte	$u = aT^4$	$1 Jm^{-3}$	$10^{12} Jm^{-3}$
Druck	$P = \frac{1}{3}u$	$0.33 Pa$	$0.33 \times 10^{12} Pa$
Abstrahlung	σT^4	$73 MW m^{-2}$	$73 \times 10^{12} MW m^{-2}$

Aus dieser Tabelle wird ersichtlich, dass bei höheren Temperaturen beispielsweise der Photonendruck beträchtlich, u.U. sogar dominant werden kann.

2.3 Sternbrennen

2.3.1 Sonnenparameter

Viel können wir an dieser Stelle von dem uns am besten bekannten Stern, der Sonne, lernen. Da während der geologisch überschaubaren Zeit (Millionen Jahre) sich die Sonne nicht verändert hat, nehmen wir an, dass sie im hydrostatischen Gleichgewicht ist. Die Gravitationsenergie schätzen wir als

$$E_{Gr} \approx -\frac{GM_{\odot}^2}{R_{\odot}} \quad (2.3.1)$$

[auf genaue Zahlenfaktoren legen wir momentan keinen großen Wert] ab. Hierbei bedeutet R_{\odot} der Sonnenradius und M_{\odot} die Sonnenmasse. Diese beiden Parameter wurden zu

$$M_{\odot} = 1.99 \times 10^{30} \text{ kg} , \quad (2.3.2)$$

$$R_{\odot} = 6.96 \times 10^8 \text{ m} \quad (2.3.3)$$

gemessen. Die Lebensdauer der Sonne gibt man gewöhnlich mit

$$t_{\odot} \approx 4.55 \times 10^9 \text{ y} \quad (2.3.4)$$

an. Aus Leuchtkraftmessungen (L_{\odot}) kann man auf die Oberflächentemperatur T_{\odot} schließen. Die numerischen Werte sind

$$L_{\odot} = 3.86 \times 10^{26} \text{ W} , \quad (2.3.5)$$

$$T_{\odot} = 5780 \text{ K} . \quad (2.3.6)$$

Bleiben noch die charakteristischen Werte für Temperatur, Massendichte und Druck im Zentrum der Sonne,

$$T_c = 15.6 \times 10^6 \text{ K} , \quad (2.3.7)$$

$$\rho_c = 1.48 \times 10^5 \text{ kg m}^{-3} , \quad (2.3.8)$$

$$P_c = 2.29 \times 10^{16} \text{ Pa} . \quad (2.3.9)$$

Die letzteren Werte folgen aus einem Sonnenmodell, auf das wir hier nicht weiter eingehen. Es fällt auf, dass z.B. die Temperatur an der Oberfläche der Sonne wesentlich geringer ist als im Zentrum.

Setzen wir in das Virialtheorem $\langle P \rangle V \approx -E_{Gr}/3$ ein, so finden wir mit den obigen Sonnenparametern

$$\langle P \rangle \approx 10^{14} \text{ Pa} . \quad (2.3.10)$$

Beachte, dass es sich um den mittleren Druck handelt. Im Zentrum ist die Materie unter extremen Bedingungen zu erwarten. Bei den angegebenen Werten der Sonnenparameter dürfen wir auch im Inneren noch klassisch rechnen, allerdings ist die Näherung eines idealen Gases fraglich (s. später). Trotzdem übernehmen wir für den Augenblick die ideale thermische Zustandsgleichung

$$\langle P \rangle = nkT = \frac{\langle \rho \rangle}{\bar{m}} kT, \quad (2.3.11)$$

und rechnen daraus, zusammen mit (2.3.10), die Temperatur

$$\langle T \rangle \approx 6 \times 10^6 \text{ K} \quad (2.3.12)$$

aus. Diese Temperatur ist im Mittel nötig, um das hydrostatische Gleichgewicht aufrecht zu erhalten. Die Temperatur ist wesentlich höher als die, welche man aus der Leuchtstärke an der Oberfläche der Sonne gewinnt. Aus

$$L_{\odot} = 4\pi R_{\odot}^2 \sigma T_{\odot}^4 \quad (2.3.13)$$

finden wir nämlich

$$T_{\odot} \equiv T_{\odot} \approx 6000 \text{ K}, \quad (2.3.14)$$

also einen um 3 Größenordnungen (10^3) kleineren Wert.

Der große Wert $T_c \approx 15.6 \times 10^6 \text{ K}$ ermöglicht Wasserstoff-Brennen. Wäre der Temperaturwert auch an der Oberfläche so hoch, so würden wir hier nicht von Photonen im sichtbaren Bereich, sondern von Röntgenstrahlung „bombardiert“ werden.

Offensichtlich herrscht in der Sonne ein starker Temperaturgradient, der durch ein „Standard-Modell“ der Sonne erklärt werden muss. Außerdem kann die Strahlung nicht ungehindert aus dem Inneren kommen. Die Sonne ist gegenüber Röntgenstrahlung (zum Glück) optisch dicht. Der Strahlungstransport ist ein so wichtiger Prozess, dass wir ihm ein eigenes Kapitel widmen werden. An dieser Stelle nur so viel. Wir werden später die Formel

$$L(r) = -\frac{16\pi r^2 acT^3}{3\kappa\rho} \frac{dT}{dr} \quad (2.3.15)$$

für die Leuchtstärke herleiten, wobei κ der Absorptionskoeffizient ist, der mit der mittleren freien Weglänge λ der Photonen über

$$\lambda = \frac{1}{\kappa\rho} \quad (2.3.16)$$

verknüpft ist. Die Größe a hängt mit der Stefan-Boltzmann Konstanten σ über $\sigma = ac/4$ zusammen. Die Leuchtstärke im Abstand r vom Zentrum ist demnach

$$L(r) \sim \frac{\lambda}{R_{\odot}} 4\pi r^2 \sigma T_c^4, \quad (2.3.17)$$

wobei wir den Temperaturgradienten über

$$-\frac{dT}{dr} \sim \frac{T_c}{R_{\odot}} \quad (2.3.18)$$

abgeschätzt haben. Gegenüber der (naiven) Formel $L(R_{\odot}) = 4\pi R_{\odot}^2 \sigma T_c^4$ haben wir einen Reduktionsfaktor

$$\frac{\lambda}{R_{\odot}} \ll 1. \quad (2.3.19)$$

Wir können dieses Ergebnis auch in der Form

$$T_O = \left(\frac{\lambda}{R_{\odot}} \right)^{1/4} T_c \quad (2.3.20)$$

ausdrücken. Der Unterschied von 10^3 in den Temperaturen legt

$$\frac{\lambda}{R_{\odot}} = 10^{-12} \quad (2.3.21)$$

fest. Das bedeutet, dass bei $R_{\odot} \sim 10^9$ m die mittlere freie Weglänge der Photonen im Bereich von Millimetern liegt!

Benutzen wir zum Abschluss noch die Relation (2.2.64), $T \sim M^{2/3}$, so folgt nach kurzer Rechnung

$$L_{\odot} = \frac{\lambda}{R_{\odot}} 4\pi R_{\odot}^2 \sigma T_c^4 \approx \frac{(4\pi)^2}{3^5} \frac{\sigma}{k^4} G^4 \bar{m}^4 \langle \rho \rangle \lambda M_{\odot}^3. \quad (2.3.22)$$

Das erinnert uns an die früher angegebene Masse-Leuchtkraft-Beziehung $L \sim M^{7/2}$, wobei damals schon gesagt wurde, dass der Exponent $7/2$ nur ungefähr richtig ist. (Der Exponent 3 ist also gar nicht so schlecht!)

Die Leuchtkraft-Masse-Beziehung führt uns sofort auf ein überraschendes Ergebnis: Massive Sterne leben kürzer. Da der Energieverbrauch proportional zu M^3 ist, das Energiereservoir aber nur proportional zu M ist, fällt die Lebensdauer $\sim M^{-2}$.

2.3.2 Thermonukleare Fusion

In der Sonne sorgt die Kernverschmelzung für den Energiegewinn, so dass die Sonne trotz Abstrahlung in einem Zustand des stabilen (stationären) hydrostatischen Gleichgewichts verbleibt.

Energie durch Kernverschmelzung leichter Kerne erreichen wir wegen des Minimums der Kurve für die Bindungsenergie pro Nukleon. In der Abb. 2.3.1 ist dieser

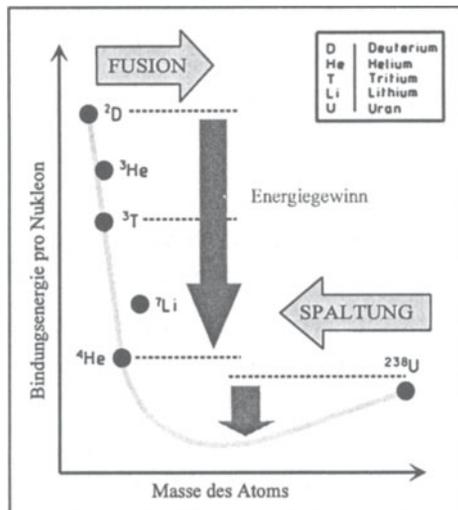


Abbildung 2.3.1: Qualitativer Verlauf der Bindungsenergie pro Nukleon in Abhängigkeit von der Masse des Atoms.

Zusammenhang, der einerseits Energiegewinn durch Fusion und andererseits Energiegewinn durch Spaltung erlaubt, qualitativ dargestellt.

Wegen der grundsätzlichen Bedeutung widmen wir der Kernfusion ein eigenes Kapitel. Hier nur so viel: Positiv geladene Kerne stoßen sich ab. Für eine Annäherung an den Abstand r_c benötigen wir die Energie

$$E = \frac{Z_A Z_B e^2}{4\pi\epsilon_0 r_c} \approx \frac{1.4 Z_A Z_B}{(r_c \text{ in Fermi})} \text{ MeV} . \tag{2.3.23}$$

Ein Fermi = $10^{-15}m$. In der Nähe der Atomkerne schlägt Abstoßung in Anziehung um: Die Atome fallen in einen „Potentialtopf“, wenn die Geschwindigkeit stimmt.

Bei einer Temperatur von 10^7K ($\hat{=}1keV$) steht kein MeV zur Verfügung, außer bei den wenigen schnellen Teilchen im Schwanz der Maxwell-Verteilung. Diesen Bruchteil können wir durch $\exp(-1000)$ abschätzen. Trotzdem ist Fusion im keV-Bereich möglich, da ein Durchtunneln der Coulomb-Barriere quantenmechanisch möglich ist. Wir werden auf diesen Effekt, der auf den Gamov Faktor

$$e^{-\sqrt{E_G/E}} \approx e^{-22} \quad \text{bei } kT \approx 1eV \quad (2.3.24)$$

mit

$$E_G = (\pi\alpha Z_A Z_B)^2 2mc^2 \quad (2.3.25)$$

führt, noch eingehend zu sprechen kommen. Insgesamt ist die Fusionswahrscheinlichkeit proportional zu

$$e^{-E/kT} \times e^{-(E_G/E)^{1/2}} ; \quad (2.3.26)$$

sie hat ein Maximum bei 2×10^7K für Wasserstoff-Brennen. Genauer – insbesondere zu Fusionsquerschnitten – in einem gesonderten Kapitel.

Bei der kontrollierten Kernfusion auf der Erde will man die Deuterium-Tritium Verschmelzung zu Helium (plus Neutron) nutzen. Dass man diese Reaktion, z.B. im

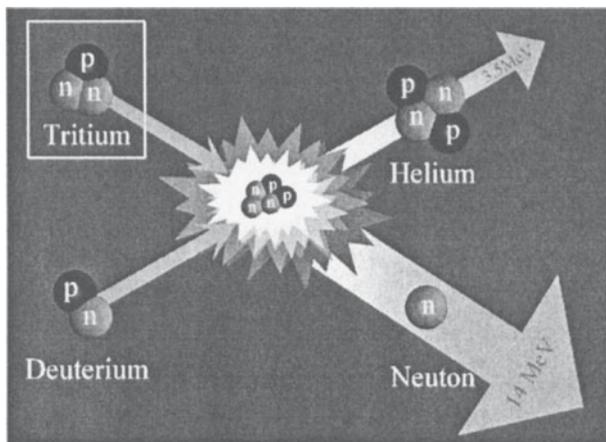


Abbildung 2.3.2: Die Fusion von Deuterium mit Tritium führt zu einem Energiegewinn, da die mittlere Bindungsenergie pro Nukleon im entstehenden Helium geringer ist.

Gegensatz zur Deuterium-Deuterium Verschmelzung, hier nutzen will, liegt hauptsächlich an dem niedrigeren Wirkungsquerschnitt. Deuterium kann man aus Meerwasser gewinnen. Das Tritium muss aus ${}^6\text{Li}$ gebrütet werden; siehe Abb. 2.3.3. Man

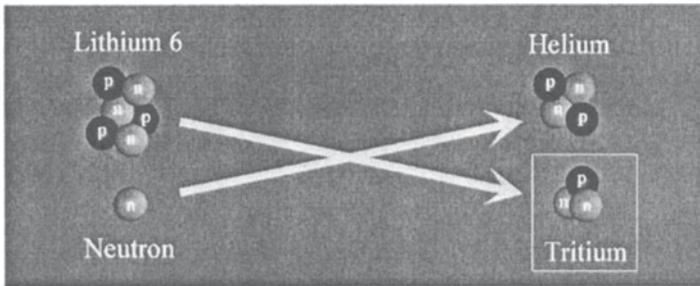


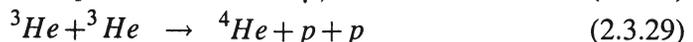
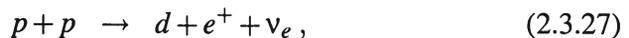
Abbildung 2.3.3: Die Tritium-Brutreaktion aus Lithium.

kann sich die positive Perspektive der kontrollierten Kernfusion daran veranschaulichen, dass nur wenige Liter Meerwasser und einige Steine (für das Deuterium bzw. Lithium) nötig sein werden, um den Energieverbrauch einer vierköpfigen Familie für ein Jahr sicherzustellen.

2.3.3 Fusion in der Sonne

Im Inneren der Sonne (und bei anderen leichten Sternen ähnlich der Sonne) nimmt man die pp-Kette als dominierenden Fusionsprozess an. Der Plasmaeinschluss erfolgt in der Sonne durch Gravitation (Dichte 160 g cm^{-3}), die Heizung zunächst durch Kompression (Temperatur 15 Millionen Kelvin). Die Leistungsdichte aufgrund der Fusion ist ca. 0.28 mW cm^{-3} .

Beim Wasserstoff-Brennen läuft der Zyklus



ab. Pro erzeugtem ${}^4\text{He}$ -Kern werden 26 MeV frei. Diese Energie muss mit einer Rate von 4×10^{26} Watt freigesetzt werden, um die Abstrahlung der Sonne zu gewährleisten.

Allerdings läuft die Verschmelzung mit geringer Wahrscheinlichkeit ab. Nehmen wir ein Proton im Zentrum der Sonne, so zeigt eine Abschätzung, dass es erst nach einer mittleren Zeit von 5×10^9 Jahren $= 1.5 \times 10^{17}$ sec mit einem anderen verschmilzt. Vier Protonen sind effektiv für einen ${}^4\text{He}$ -Kern nötig. Dabei entstehen $26\text{ MeV} \hat{=} 26 \times 1.6 \times 10^{-13}$ Joule. Um nun die Gesamtleistung von 4×10^{26} Watt zu erzeugen, brauchen wir

$$\frac{4 \times 4 \times 10^{26}}{26 \times 1.6 \times 10^{-13}} = 4 \times 10^{38} \frac{\text{Protonen}}{\text{sec}}, \quad (2.3.30)$$

die fusionieren. Dabei entstehen 2×10^{38} Neutrinos pro Sekunde, die ungehindert bis zur Erde kommen können. Hieraus ergeben sich die Neutrino-Fragen, die wir eingangs diskutierten.

Wenn wir andererseits $4 \times 10^{26}\text{ W}$ durch die Masse der Sonne teilen, erreichen wir 0.2 mW pro kg Sonnenmasse im Durchschnitt. Die Leistungsdichte des menschlichen Körpers ist höher!

Es gibt ungefähr 7×10^{56} Protonen in der Sonne. 4×10^{38} werden pro Sekunde verbraucht, um $10^{38} \times 26 \times 1.6 \times 10^{-13} = 4 \times 10^{26}$ Gesamtleistung (Watt) stationär aufrecht zu erhalten.

$7 \times 10^{56} / 4 \times 10^{38} \approx 2 \times 10^{18}$ sec ≈ 50 Milliarden Jahre ist demnach eine Obergrenze für die Lebensdauer der Sonne in ihrer jetzigen Form. Tatsächlich ist die Zeit um einen Faktor 10 eher kleiner, da nicht alle Protonen verbraucht werden und wir das vollständige Wasserstoff-Brennen annehmen.

Während des Wasserstoff-Brennens ist die Sonne ein sich selbst regelnder Thermostat. Sollte sich die Temperatur im Kern spontan erhöhen, so wird die Fusionsrate größer, und mehr Energie wird erzeugt als stationär abgeführt werden kann. Die Gesamtenergie steigt. Das Virialtheorem im hydrostatischen Gleichgewicht sagt uns, dass die Gravitationsenergie zunimmt und die kinetische Energie abnimmt. Die Sonne expandiert und kühlt gleichzeitig ab, was der ursprünglichen „Störung“ entgegen wirkt. Umgekehrt, wenn die Temperatur abnehmen sollte, wird die Gesamtenergie kleiner, damit fällt auch die Gravitationsenergie, und gleichzeitig steigt die kinetische Energie durch Kontraktion.

Wenn das Wasserstoff-Brennen infolge Brennstoff-Mangels zu Ende geht, kollabiert der Kern weiter und wird heißer. Wasserstoff kann auch in den äußeren Schalen verschmelzen. Das geschieht solange, bis Helium-Brennen einsetzt. Ein Roter

Riese entsteht. Temperaturen von $2 \times 10^8 K$ und Massendichten bis zu $10^8 kg m^{-3}$ entstehen im Kern. Die untere Masse ist $0.5 M_{\odot}$ für diese Entwicklung.

Ein Stern kann verschiedene Stadien des Brennens durchlaufen, wie die folgende Übersicht zeigt.

$T = 10^7 K$ $M > 0.08 M_{\odot}$	Wasserstoff	→	Helium
$T = 10^8 K$ $M > \frac{1}{2} M_{\odot}$	Helium	→	Kohlenstoff, Sauerstoff
$T = 5 \times 10^8 K$ $M > 8 M_{\odot}$	Kohlenstoff	→	Sauerstoff, Neon, ...
$T = 10^9 K$	Neon	→	Sauerstoff, Magnesium
$T = 2 \times 10^9 K$	Sauerstoff	→	Magnesium bis Schwefel
$T = 3 \times 10^9 K$ $M > 11 M_{\odot}$	Silizium	→	Eisen, ...

Interessant ist, dass in der kosmologischen Entwicklung die Temperaturen zwar groß genug waren, aber die Dichten zu gering, um Fusion zu ermöglichen. Erst die Formation massiver Sterne leitete die Fusion ein. Die Brennzyklen stoppen bei ${}^{56}Fe$, da dort die Bindungsenergie pro Nukleon das Minimum hat.

Schwere Elemente entstehen durch Neutroneneinfang und anschließenden Beta-Zerfall (des Neutrons in ein Proton und ein Elektron).

2.3.4 Qualitatives zur weiteren Sternentwicklung

In der Sonne kann nach dem ersten Ausbrennen des Kerns ein Wasserstoff-Brennen in den Schalen und ein Helium-Brennen im Kern einsetzen. Da bei der höheren Temperatur die äußeren Ränder expandieren, entsteht ein Roter Riese mit hoher Leuchtstärke und niedriger Oberflächentemperatur, z.B. $L = 1000 L_{\odot}$, $T_O = 4000 K$, $R = 70 R_{\odot}$, während im Zentrum Temperaturen von $10^8 K$ und Massendichten in der Größenordnung $10^8 kg m^{-3}$ vorzufinden sind. Aber irgendwann (keine Sorge für uns) wird der Brennstoff-Vorrat versiegen. Ein nicht-thermischer Ursprung für den Druck wird durch die quantenmechanische Entartung geliefert. Die Entartung der Elektronen sorgt für den dominanten Druck (den wir noch berechnen). Die entscheidende Frage ist, ob die Elektronen nicht-relativistisch entartet sind oder in der quantenmechanischen Entartung ultra-relativistisch beschrieben werden müssen. Im letzten Fall ist das hydrostatische Gleichgewicht fragil. Die beiden Fälle werden durch die Gesamtmasse „reguliert“. Ist die Masse kleiner als

$1.4M_{\odot}$ (Chandrasekhar Masse), so bleiben wir im nicht-relativistischen Bereich. Die Sonne wird also als Weißer Zwerg enden, mit $L = L_{\odot}/100$, $T_O = 16.000K$, $R = R_{\odot}/70$, $\rho \approx 10^9 \text{ kg m}^{-3}$.

Massive Sterne können die quantenmechanische Entartung der Elektronen „müheles“ durchschreiten. Supernovae (Aufbrechen beim explosiven Freiwerden gravitativer Energie) entstehen, und der ursprüngliche Kern kann als Neutronenstern enden. Hier wird der Druck durch nicht-relativistische Neutronen geliefert. Mas-sendichten von $10^{14} \div 10^{17} \text{ kg m}^{-3}$ können auftreten, Temperaturen von $10^8 K$ sind typisch (trotz Entartung), Radien bewegen sich in der Größe von 17 km. Das Verhalten der Materie in diesem Bereichen ist noch nicht völlig aufgeklärt.

Ähnlich wie bei Weißen Zwergen gibt es auch für Neutronensterne eine obere Masse, $M \approx 3M_{\odot}$. Für große Massen werden die entarteten Neutronen ultra-relativistisch, und das hydrostatische Gleichgewicht wird fragil. Wenn nicht durch Supernovae Explosionen die Masse vorher aufbricht, entsteht ein Schwarzes Loch.

So viel zur Sternenentwicklung im ersten Überblick. Wir müssen jetzt einige physikalische Grundlagen bereitstellen, um die Entwicklung im notwendigen Detail aufklären zu können.



<http://www.springer.com/978-3-642-33579-2>

Astrophysik

Eine Einführung in Theorie und Grundlagen

Spatschek, K.-H.

2003, 301 S., Softcover

ISBN: 978-3-642-33579-2