1

Plus, minus, mal und geteilt – die Basis der Mathematik

In diesem Kapitel …

- Gesetze anwenden
- Neutrale Elemente bilden
- Inverse Elemente bestimmen
- Operation kontra Gegenoperation verstehen
- Die fünf Schreiber-S nutzen

Nach meinen Ausführungen in der Einführung zu diesem Buch können Sie sich also vorstellen, wofür Sie die Wirtschaftsmathematik benötigen. Damit Sie nun auch in der Lage sind, die verschiedensten Problemstellungen lösen zu können, müssen Sie so langsam durchstarten, denn:

Die Klammer sprach:
»Zuerst komm ich, gefolgt vom Punkt und dann der Strich.«

So bespreche ich mit Ihnen in den ersten Abschnitten die einfache Arithmetik aus plus, minus, mal und geteilt mit den dafür notwendigen Gesetzen. Sie verstehen anschließend, was das neutrale oder auch das inverse Element mit der Operation und Gegenoperation eines Terms zu tun hat. Am Ende dieses Kapitels sind Sie dann in der Lage, selbst sehr verschachtelte Ausdrücke oder Gleichungen ohne Schwierigkeiten zu lösen.

Auch hier brauchen Sie zuerst Gesetze

Die einfache »Arithmetik« beschäftigt sich mit der Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division von Zahlen und Ausdrücken. Damit Sie auch in diesen Rechnungen mit Ihrem Wissen begeistern können, müssen zu Beginn ein paar Gesetze definiert werden.

Kommutativgesetz

Das Kommutativgesetz bedeutet ja »Vertauschungsgesetz«, das heißt, Sie dürfen die beteiligten Komponenten hin und her wechseln.

Kommutativgesetz für die

- ✓ Addition: $a + b = b + a$
- ✓ Multiplikation: $a \cdot b = b \cdot a$

Aber nicht für die Subtraktion und die Division!

Jetzt sehen Sie schon ein kleines Problem, denn die Gesetze sind von den benutzten Rechensymbolen beziehungsweise den Operatoren abhängig. Also haben Sie ein Plus-, Minus-, Mal- oder Geteiltzeichen in der Formel stehen. Aber auch hier können Sie auf einen kleinen Trick zurückgreifen, denn Sie können jede Subtraktion als Addition mit einer negativen Zahl und jede Division als Multiplikation mit dem Kehrwert darstellen:

- ✓ Subtraktion: $a - b = a + (-1) \cdot b$
- ✓ Division: $a \div b = a \cdot \frac{1}{b}$

Durch diese Umformung können Sie auch für die Subtraktion und Division das Kommutativgesetz nutzen. In Kapitel 23 bezeichne ich die Operatoren als sogenannte Junktoren, wobei es sich im Grunde um zwei Begriffe für ein und dasselbe Symbol handelt.

Assoziativgesetz

Das Assoziativgesetz können Sie sich als »Klammervertauschungsgesetz« merken. Wenn Sie also eine Gleichung haben, in der nur »gleiche Junktoren« einer Ebene vorkommen (wie plus und mal), dann dürfen Sie die Klammern setzen, wie Sie möchten.

Assoziativgesetz für die

- ✓ Strichrechnung: $(a + b) + c = a + (b + c)$
- ✓ Punktrechnung: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

Aufgrund des Tricks mit der Subtraktion und Multiplikation können Sie auch folgende Umformung durchführen:

- ✓ Subtraktion:

$$(a - b) + c = (a + (-1) \cdot b) + c$$

$$(a + (-1) \cdot b) + c = a + ((-1)\, b + c)$$

$$a + ((-1)\, b + c) = a + (-b + c)$$

✓ Division:

$$(a \div b) \cdot c = \left(a \cdot \frac{1}{b}\right) \cdot c$$

$$\left(a \cdot \frac{1}{b}\right) \cdot c = a \cdot \left(\frac{1}{b} \cdot c\right)$$

Wie Sie sehen, ist es bei der Subtraktion besonders wichtig, das »Minus als Vorzeichen« zu betrachten, während Sie bei der Multiplikation den »Kehrwert als gesamte Einheit« sehen müssen. Eine Kombination aus Strich- und Punktrechnung gibt es nicht, da ja die Punktrechnung eine höhere Priorität besitzt.

Distributivgesetz

Merken Sie sich das Distributivgesetz als »Klammerauflösegesetz«, durch das Sie jeden Bestandteil einer Summe oder Differenz separat mit einem Faktor multiplizieren. Also benutzen Sie dieses Gesetz, wenn Sie eine Klammer auflösen müssen.

Distributivgesetz zum

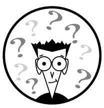
✓ Auflösen: $a \cdot (x + y) = a \cdot x + b \cdot y$

✓ Ausklammern: $x \cdot a - x \cdot b = x \cdot (a - b)$

Bei einer Gleichung, in der eine Punktrechnung auf einen Strichausdruck trifft, gibt es also zwei Möglichkeiten:

✓ Ohne Klammern: Hier müssen Sie zuerst die Punktrechnung durchführen und sich anschließend die Strichrechnung vornehmen.

✓ Mit Klammern: Sie müssen also das Distributivgesetz immer dann anwenden, wenn eine Summe oder Differenz in Klammern steht und gleichzeitig vor der Klammer ein Term mit einem Punktoperator (Multiplikation oder Division) auftaucht.



Auflösen: $2a \cdot \left(3x + \frac{1}{4}\right) = 2a \cdot 3x + 2a \cdot \frac{1}{4} = 6ax + \frac{1}{2}\,a$

Ausklammern: $16xy - 12yz = 4y \cdot 4x - 4y \cdot 3z = 4y \cdot (4x - 3z)$

Ich zeige Ihnen jetzt, wie Sie in wenigen Schritten einen Term so weit wie möglich zusammenfassen können.

Ein Beispiel:

$$2x \cdot (3 \cdot (4 - 2y) - (2 + y)) - (5x + 3y)$$

1. **Lösen Sie die inneren Klammern auf.**

   Dazu multiplizieren Sie jedes Element der Klammer mit dem Faktor davor.

   $$2x \cdot (12 - 6y - 2 - y) - (5x + 3y)$$

2. **Fassen Sie den neu entstandenen Ausdruck zusammen.**

   Addieren oder subtrahieren Sie die passenden Variablen oder Zahlen.

   $$2x \cdot (10 - 7y) - (5x + 3y)$$

3. **Multiplizieren Sie nun die restlichen Klammern aus.**

   Auch hier wenden Sie das Distributivgesetz an und multiplizieren den Term beziehungsweise das Vorzeichen mit jedem Ausdruck in der Klammer.

   $$20x - 14xy - 5x - 3y$$

4. **Addieren/subtrahieren Sie am Ende die passenden Variablen.**

   Nun fassen Sie die restlichen Terme zusammen, indem Sie auf die gleiche Variable achten.

   $$15x - 14xy - 3y$$

Wie Sie sehen, können Sie eine komplizierte Gleichung durch kleine Schritte sehr einfach lösen. Konzentrieren Sie sich dabei stets auf die Berechnungen, die Sie als Nächstes machen wollen. Weil es beim Lösen von Gleichungen ab und zu auch notwendig sein kann, maximal auszuklammern, habe ich auch hier ein weiteres Beispiel für Sie:

$$54xy - 18xyz + 24xz$$

1. **Suchen Sie den gemeinsamen Teiler der Zahlen und klammern Sie diesen aus.**

   Suchen Sie eine Zahl, durch die alle vorhandenen Faktoren gleichzeitig teilbar sind.

   $$6 \cdot (9xy - 3xyz + 4xz)$$

2. **Suchen Sie nun die gemeinsamen Buchstaben und klammern Sie diese aus.**

   Konzentrieren Sie sich jetzt auf die Variablen und schauen Sie, welcher Buchstabe überall vorkommt.

   $$6x \cdot (9y - 3yz + 4z)$$

Was sind das neutrale und das inverse Element?

Gehen Sie einmal von einer Abstimmung aus. Was machen Sie, wenn Sie sich neutral verhalten? Richtig! Sie enthalten sich und verändern somit das Wahlergebnis nicht. Genauso verhält sich auch das »neutrale Element« in der Arithmetik. Das heißt, es darf den Ausgangsterm nicht verändern, wodurch man für die möglichen Operatoren eine Zahl erwartet, die eigentlich nichts bewirkt.

Neutrales Element für

- ✓ die Addition/Subtraktion ist die 0, denn $a + 0 = 0 + a = a$ und $a - 0 = 0 - a = a$.
- ✓ die Multiplikation/Division ist die 1, denn $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ und $a \div 1 = a$.

Ein Bierchen am Abend

Sollten Sie heute Abend in Ihr Stammlokal gehen, gehen Sie doch mal zum Wirt und sagen Sie:

»Ich hätte gern das neutrale Element der Multiplikation in Form eines Gerstensaftes und möchte das neutrale Element der Addition dafür bezahlen.«

Wenn Sie nicht rausgeworfen werden, sondern ein Bier bekommen und nichts dafür bezahlen müssen, haben Sie gewonnen.

Jetzt fragen Sie sich hoffentlich (bestimmt), was dann unter »invers« verstanden wird. Umgangssprachlich würde ich mir unter dem Begriff invers so etwas Ähnliches wie »Gegenteil« vorstellen. Das klappt sogar in der Mathematik, denn wenn Sie sich mal das Gegenteil von der Multiplikation überlegen, dann kommen Sie doch auf die Division, und invers zur Addition müsste dann doch die Subtraktion sein. Aber warum? Dies liegt daran, dass ein Ausgangselement kombiniert mit dem inversen Element immer zum neutralen Element führen muss.

Inverses Element für

- ✓ die Strichrechnung ist $-a$, denn $a + (-a) = (-a) + a = 0$.
- ✓ die Punktrechnung ist $\frac{1}{a}$, denn $a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1$.

Wie Sie sehen, wird bei der Addition die Null erzeugt und bei der Multiplikation kommt die Eins heraus, was in beiden Fällen ja das neutrale Element ist.

Jede Operation hat auch eine Gegenoperation

Hier nutzen Sie die vorherige Definition des neutralen und inversen Elements, denn beim Lösen einer Gleichung können Sie nur durch die »Gegenoperation« das Ergebnis berechnen.

Gehen Sie gedanklich mal ein paar Jahre zurück. Sagen wir mal in die siebte Klasse. Wenn Sie da eine Gleichung lösen sollten, dann sagten Sie immer, dass Sie die störenden Zahlen auf die andere Seite des Gleichheitszeichens bringen müssen.

Gehen Sie mal von dem Beispiel $2 \cdot x + 5 = 9$ aus.

Dann war doch Ihr erster Schritt, dass Sie die Fünf »auf die andere Seite brachten«. Allerdings gibt es keine mathematische Operation, die so heißt. Sie haben im Grunde genommen die Eigenschaften des inversen und neutralen Elements genutzt, ohne dies zu wissen. Die korrekte Lösung sähe nämlich wie folgt aus:

$$
\begin{aligned}
& 2 \cdot x + 5 = 9 && \mid -5 \quad \text{inverses Element zu 5} \\
\Leftrightarrow\ & 2 \cdot x + 5 - 5 = 9 - 5 && \\
\Leftrightarrow\ & 2 \cdot x + 0 = 4 && \mid \cdot \frac{1}{2} \quad \text{inverses Element zu 2} \\
\Leftrightarrow\ & \frac{1}{2} \cdot (2 \cdot x + 0) = \frac{1}{2} \cdot 4 && \\
\Leftrightarrow\ & 1 \cdot x + 0 = 2, \text{ da } 0;\ 1 \text{ neutral sind, muss } x = 2 \text{ die Lösung sein.} &&
\end{aligned}
$$

Klammer auf und Klammer zu und schon wird vieles einfacher

Nun habe ich schon einiges besprochen, was in der Arithmetik möglich ist und sein muss. Aber was haben Sie davon beziehungsweise was können Sie darauf aufbauen?

Prinzipiell müssen Sie zur Lösung einer Aufgabe mittels der inversen/neutralen Elemente die Gleichung so umformen, dass Sie die gesuchte Variable auf einer Seite isolieren. Ich stelle Ihnen eine Art »Standardmethode« vor, mit deren Hilfe Sie Gleichungen vereinfachen und lösen können.

Sechs-Schritte-Lösungsmethode:

1. Sollten Brüche vorhanden sein, so multiplizieren Sie mit dem Hauptnenner, um die Brüche zu beseitigen.
2. Sie lösen alle existierenden Klammern auf, damit Sie nur noch einfache Terme übrig haben.
3. Fassen Sie diese entstandenen Ausdrücke weiter zusammen, um die Anzahl zu reduzieren.
4. Sie dividieren durch gleiche Faktoren, weil Sie dadurch kleinere Zahlen in der Gleichung erhalten.
5. Isolieren Sie den Term mit der Variablen. Also alle Variablen nach links, den Rest nach rechts.
6. Lösen Sie nach der Variablen auf und schon haben Sie die Lösung der Aufgabe berechnet.

Wenn Sie diese sechs Schritte konsequent anwenden, sollte Ihnen keine Aufgabe mehr große Probleme bereiten. Sie müssen jedoch nicht immer alle sechs Schritte benutzen; wenn zum Beispiel keine Brüche da sind, können Sie Schritt eins überspringen.

Beispiel zur Sechs-Schritte-Lösungsmethode:

$$\frac{2}{3} \cdot (4 - 2 \cdot (3x + 5)) = \frac{1}{2} \cdot (2x + 4 \cdot (3 - 2x))$$

1. **Multiplizieren Sie mit dem Hauptnenner 6.**

   $$4 \cdot (4 - 2 \cdot (3x + 5)) = 3 \cdot (2x + 4 \cdot (3 - 2x))$$

2. **Lösen Sie die Klammern auf.**

   $$4 \cdot (4 - 6x - 10) = 3 \cdot (2x + 12 - 8x)$$

   $$16 - 24x - 40 = 6x + 36 - 24x$$

3. **Fassen Sie die Terme zusammen.**

   $$-24 - 24x = -18x + 36$$

4. **Dividieren Sie durch gleiche Faktoren 6.**

   $$-4 - 4x = -3x + 6$$

5. **Isolieren Sie den x-Term (+3x + 4).**

   $$-4 - 4x = -3x + 6$$
   $$-x = 10$$

6. **Isolieren Sie x (÷(–1)).**

   $$x = 10 \Rightarrow \mathbb{L} = \{-10\}$$

Wie Sie sehen, habe ich in Schritt fünf die Berechnung auf das neutrale Element der Addition bezogen und deswegen $+3x + 4$ gerechnet. Im sechsten Schritt habe ich mittels der Division durch -1 das neutrale Element der Multiplikation erzeugen können.

Eine Handvoll S von Schreiber

Aufgrund meiner langjährigen Erfahrungen im Unterrichten von Mathematik und den damit verbundenen Klausuren, habe ich festgestellt, dass diese »fünf Schreiber-S« nicht nur sehr wichtig sind, sondern meistens dabei helfen, Fehler beim Lösen von Aufgaben zu vermeiden.

Bisher haben Sie sich bestimmt so tolle Sätze gemerkt wie: »Aus der Summe kürzt nur der Dumme«. Diesen Satz habe ich ein wenig erweitert, denn eine »Summe« ist so ziemlich das Schlimmste, was Ihnen passieren kann, denn Sie dürfen hier nichts machen.

»**S**chreiber **s**agt, **S**ummen **s**ind **s**chlecht« **(fünfmal das S)**.

Damit Sie mir auch glauben, zeige ich diese Faustregel anhand der folgenden Beispiele:

- Brüche: $\frac{2x-18ax}{16ax-8x}=\frac{2x\cdot(1-9a)}{8x\cdot(2a-1)}=\frac{1-9a}{4\cdot(2a-1)}=\frac{1-9a}{8a-4}$

  Jetzt sehen Sie, dass bei diesem Bruch auf den ersten Blick nahezu alle Zahlen und Buchstaben zum Kürzen einladen. Jedoch dürfen Sie hier nicht einfach so loslegen, sondern müssen zuerst ein Produkt aus dem Nenner und Zähler machen. Anschließend dürfen Sie kürzen. Dies liegt daran, dass im Zähler und Nenner eine Summe steht, also entweder Finger weg oder ein Produkt daraus machen!

- Wurzel: $\sqrt{25+16}\neq 5+4,$ denn $\sqrt{41}=6,4,$

  Auch hier kamen Sie bestimmt auf den ersten Blick in Versuchung, die Wurzeln separat zu ziehen. Aber denken Sie auch hier daran: »Schreiber sagt, Summen sind schlecht!«

In dem folgenden Beispiel präsentiere ich Ihnen die wesentlichen Schritte zum Kürzen und Zusammenfassen von Brüchen:

$$\frac{16x+48y}{8y+2x}\cdot\frac{12a-9}{-15+20a}$$

1. **Klammern Sie im Nenner und Zähler maximal aus.**

   Suchen Sie auch hier die Zahl, die in den Summen gleichzeitig vorkommt.

   $$\frac{16\cdot(x+4y)}{2\cdot(4y+x)}\cdot\frac{3\cdot(4a-3)}{5\cdot(-3+4a)}$$

2. **Wenden Sie das Kommutativgesetz an.**

   Damit die Klammerausdrücke auch gleich aussehen, müssen Sie diese umdrehen und wenden somit das Kommutativgesetz an.

   $$\frac{16\cdot(x+4y)}{2\cdot(x+4y)}\cdot\frac{3\cdot(4a-3)}{5\cdot(4a-3)}$$

3. **Kürzen Sie alle gemeinsamen Faktoren und berechnen Sie die Lösung.**

   Sie dürfen ja nur Faktoren kürzen, sodass Sie hier diese suchen müssen und anschließend einfach streichen können.

   $$\frac{8}{1}\cdot\frac{3}{5}=\frac{24}{5}=4\,\frac{4}{5}$$

Wenden Sie bei den Aufgaben die Gesetze und Eigenschaften der Arithmetik an.

Aufgabe 1.1

Fassen Sie die gegebenen Terme so weit wie möglich zusammen.

$$-(2x+1)\cdot(3-2y)-2\cdot(2xy-x+2y)$$

Aufgabe 1.2

Klammern Sie den maximalen Term aus.

$$36a\cdot 0{,}5xy-42x\cdot ax+48ay\div 4$$

Aufgabe 1.3

Kürzen Sie die folgenden Brüche.

$$12\cdot\frac{12bx-8by}{72ax-48ay}\div\frac{3bx-18b}{5ax-30a}$$

Aufgabe 1.4

Lösen Sie die folgende Gleichung.

$$\frac{2}{3}\cdot(6x-4)+2\,\frac{2}{3}=\frac{1}{2}\cdot((x-2)\cdot 6-4x)$$