2 Kinematik der Massenpunkte

Die Kinematik ist die Lehre von den Bewegungen der Körper (Griechisch: Kinema = Bewegung). Dabei werden die Ursachen der Bewegungen, d.h. die beteiligten Kräfte, und die Wirkungen der Bewegungen auf andere Körper nicht untersucht. Die Kinematik ist eine rein mathematische Disziplin und berechnet Bahnkurven, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen.

Ruhe und Bewegung sind relative Begriffe. Für einen im Zug reisenden Beobachter ist eine neben ihm sitzende Person in Ruhe, für einen draußen am Bahnsteig stehenden Beobachter hingegen ist diese Person in Bewegung. Deshalb haben die Begriffe ‘Ruhe’ und ‘Bewegung’ nur dann einen eindeutigen Sinn, wenn das Bezugssystem angegeben wird, auf das sie sich beziehen. *Wenn nichts anderes vereinbart wird, ist in der Physik und in der Technik stets ein mit der Erde fest verbundenes Bezugssystem zugrunde gelegt.*

2.1 Idealisierungen

Bei der Berechnung von Bewegungen ist es oft zulässig und sinnvoll, von der Ausdehnung des Körpers abzusehen und den Körper als *Punktmasse* – auch *Massenpunkt genannt* – zu idealisieren. Dies hat den Vorteil, dass

- der Körper sich nicht drehen kann
- alle auf den Körper einwirkenden Kräfte in einem Punkt angreifen.

Obwohl es in Wirklichkeit keine Massenpunkte gibt, ist die Näherung verschwindender Ausdehnung in der Theorie oft zweckmäßig und erlaubt, wenn die Bahnabmessung wesentlich größer ist als die Ausdehnung des Körpers (siehe z. B. die Bewegungen der Planeten im Sonnensystem). Darüber hinaus werden wir in Unterkapitel 6.1 sehen, dass sich *Punktmassen wie die Schwerpunkte ausgedehnter Körper bewegen*. Danach stimmen die für Massenpunkte berechneten Bewegungen mit den Schwerpunktbewegungen ausgedehnter Körper überein, falls die Massen und die Summe aller Kräfte in beiden Fällen gleich groß sind.

Ganz allgemein werden Idealisierungen, die die Wirklichkeit nicht exakt beschreiben, sondern bestimmte Eigenschaften und Sachverhalte bewusst und gezielt außer acht lassen, sehr häufig in der Physik mit großem Erfolg vorgenommen. Die Vernachlässigung unerwünschter Nebeneffekte und die Konzentration auf das Wesentliche sind so typisch für die Arbeitsweise des Physikers, dass wir kurz über Zulässigkeit und Nutzen von Idealisierungen bzw. Vernachlässigungen sprechen müssen.

- *Die Zulässigkeit von Idealisierungen hängt von dem untersuchten Objekt und der Aufgabenstellung ab.* Dazu drei Beispiele:
  1) Bei einer fallenden Stahlkugel kann die Luftreibung vernachlässigt werden, bei einer fallenden Feder nicht.
  2) Bei der Berechnung der Planetenbahnen können die Planeten als punktförmig angesehen werden, in der Wetterkunde nicht.

3) Im Maschinenbau dürfen die Corioliskräfte der Erdrotation vernachlässigt werden, in der Wetterkunde aber spielen sie eine ganz entscheidende Rolle.
In jedem einzelnen Fall ist zu entscheiden, ob die vorgesehenen Idealisierungen zu tolerierbaren Ungenauigkeiten führen oder nicht.

- Die *exakte* Beschreibung der Vorgänge in Natur und Technik ist in nahezu allen Fällen unmöglich. Deshalb müssen Randeffekte außer acht gelassen und dafür kleine – evtl. sogar vernachlässigbare – Ungenauigkeiten in Kauf genommen werden. Viele Vernachlässigungen sind sehr gebräuchlich und weit verbreitet. Kein Maschinenbauer käme auf die Idee, relativistische Massenänderungen oder Corioliskräfte der Erdrotation zu berücksichtigen. Auch Reibungskräfte werden oft nicht in Betracht gezogen.
  Zulässige Idealisierungen sind sinnvoll, wenn man dadurch den Rechen- oder Arbeitsaufwand gering halten oder den Blick auf das Wesentliche richten kann.

Es kommt nicht darauf an, ob Idealisierungen auch in der Wirklichkeit realisiert werden können. Seit Galileo Galilei arbeitet die Wissenschaft oft mit *fiktiven Modellen*, die wenig Bezug zur Wirklichkeit haben, aber *leicht überschaubar sind und sich auf das Wesentliche, auf die zu untersuchende Frage konzentrieren.*

Wir nehmen im Folgenden an, dass die betrachteten Körper punktförmig sind. Punktmassen können sich nicht drehen und ihre zeitabhängige Position wird durch den sog. „Ortsvektor" $\mathbf{r}(t)$ beschrieben, der vom Ursprung des Koordinatensystems zum Ort der Punktmasse reicht.

2.2 Geschwindigkeit

Wir definieren die Geschwindigkeit und betrachten zuerst den einfachsten Fall, die *gleichförmige Bewegung*. Darunter versteht man eine geradlinige Bewegung, bei der der Quotient aus zürückgelegter Strecke Δx und benötigter Zeit Δt für alle Zeiten Δt gleich groß ist. Der konstante Quotient $\Delta x / \Delta t$ wird „Geschwindigkeit" v der gleichförmigen Bewegung genannt:

$$v := \frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad \text{für gleichförmige Bewegungen} \qquad (2.2\text{–}1)$$

Die Einheit der Geschwindigkeit ist nach dieser Gl. m/s. Häufig wird auch die Einheit km/h verwendet. Zwischen diesen beiden Einheiten gibt es folgende Umrechnung

$$3{,}6\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = 1\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \qquad (2.2\text{–}2)$$

Wenn eine gleichförmige Bewegung zur Zeit $t=0$ im Punkt $x(0)=:x_0$ beginnt, so gilt

$$v = \frac{x(t) - x(0)}{t - 0} = \frac{x(t) - x_0}{t}$$

$$\Rightarrow \qquad x(t) = x_0 + v\,t \qquad \text{nur für gleichförmige Bewegungen mit } v = \text{const} \qquad (2.2\text{–}3)$$

Das sog. „Orts-Zeit-Diagramm” einer gleichförmigen Bewegung ist eine Gerade (siehe Abb. 2.2–1) mit der Steigung *v*.

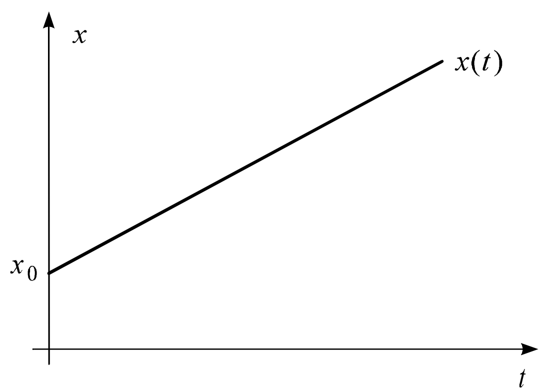

Abb. 2.2–1 Orts-Zeit-Diagramm einer gleichförmigen Bewegung

Als nächstes betrachten wir *ungleichförmige Bewegungen* auf einer Geraden. Jetzt werden in gleich großen Zeitintervallen nicht mehr gleich große Strecken zurückgelegt, so dass das Orts-Zeit-Diagramm in Abb. 2.2–2 eine gekrümmte Kurve ist.

Man nennt den Quotienten

$$v_{\mathrm{m}} := \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad (2.2\text{–}4)$$

„mittlere Geschwindigkeit” oder „Durchschnittsgeschwindigkeit” in dem Intervall $[t_1, t_2]$.

In Physik und Technik und beim Autofahren interessiert man sich aber gewöhnlich nicht für die mittlere, sondern für die momentane Geschwindigkeit $v(t)$. Vor der Einführung der Radartechnik wurden momentane Geschwindigkeiten im Verkehr mit zwei Lichtschranken ermittelt. Lichtschranken messen – genaugenommen – die mittlere Geschwindigkeit v_{m}. Wenn aber der Abstand der Lichtschranken so klein ist, dass ein Fahrzeug seine Geschwindigkeit auf der kurzen Messstrecke kaum ändern kann, dann sagt man: Die gemessene Geschwindigkeit ist – in genügend guter Näherung – die momentane Geschwindigkeit.

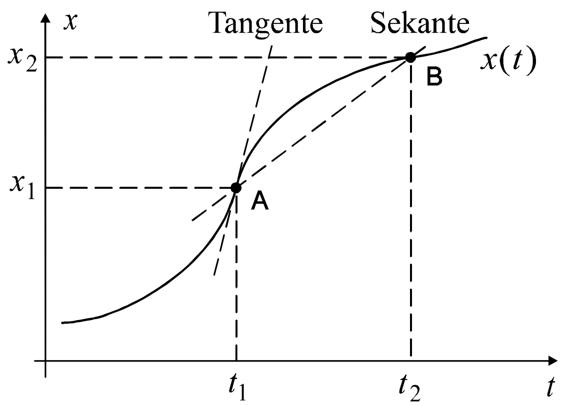

Abb. 2.2–2 Für $t_2 \to t_1$ geht die Steigung der Sekante über in die Steigung der Tangente. Die Steigung der Tangente ist laut Definition die momentane Geschwindigkeit $v(t_1)$.

Diese Aussage ist umso genauer, je kleiner der Abstand der beiden Lichtschranken ist. Daraus ergibt sich die Definition der momentanen Geschwindigkeit wie folgt:

Die momentane Geschwindigkeit

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad (2.2\text{–}5)$$

oder genauer – wenn wir die Zeit deutlich in die Definition einbeziehen –

$$v(t) := \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \frac{dx(t)}{dt} = \dot{x}(t) \qquad (2.2\text{–}6)$$

ist *die zeitliche Ableitung des Ortes* $x(t)$. Es ist allgemein üblich, die zeitliche Ableitung nicht durch einen Strich, sondern durch einen Punkt zu kennzeichnen.

Bisher waren alle Bewegungen geradlinig. Nun wollen wir auch *krummlinige Bahnen* betrachten. Die zeitabhängige Lage des Massenpunktes wird durch den sog. „Ortsvektor" $\mathbf{r}(t)$ beschrieben, der vom Ursprung des Koordinatensystems zum Ort des Teilchens zeigt (siehe weiter unten Abb. 2.5–2). Der Ortsvektor lässt sich mit seinen drei kartesischen Koordinaten $x(t), y(t), z(t)$ und den sog. „Basisvektoren" $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$, die die Länge Eins haben und auf den drei Koordinatenachsen liegen, als eine Linearkombination schreiben:

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{e}_x + y(t)\,\mathbf{e}_y + z(t)\,\mathbf{e}_z = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \tag{2.2–7}$$

Bemerkung: Die Ortsvektoren dürfen im Gegensatz zu den Vektoren in der Mathematik nicht parallel verschoben werden. Die Ortsvektoren sind ortsfest; ihr Anfang liegt immer im Koordinatenursprung. (Nach einer Parallelverschiebung würde das Ende der Ortsvektoren nicht mehr auf den Ort der Teilchen zeigen.)

Vektoren werden komponentenweise differenziert und integriert. Daher ergibt sich der Geschwindigkeitsvektor $\mathbf{v}(t)$ durch die zeitliche Ableitung der drei Koordinaten:

$$\mathbf{v}(t) = \begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \\ v_z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \begin{pmatrix} x(t+\Delta t) - x(t) \\ y(t+\Delta t) - y(t) \\ z(t+\Delta t) - z(t) \end{pmatrix} \tag{2.2–8}$$

2.3 Einführung in die Integralrechnung

Nach Unterkapitel 2.2 ergibt sich die momentane Geschwindigkeit $v(t)$ durch Ableiten des Ortes $x(t)$ nach der Zeit. Wir wollen nun die umgekehrte Aufgabe lösen: $v(t)$ ist gegeben – z. B. durch den Fahrtenschreiber eines LKWs – und $x(t)$ ist gesucht. $x(t)$ ist die Stammfunktion von $v(t)$.

Wir fangen wie üblich mit dem einfachsten Fall an, mit der gleichförmigen Bewegung, für die $v(t) = \text{const} =: v_0$ gilt. Im Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm ist $v(t)$ eine Gerade parallel zur Abszisse. Die Integration ist hier besonders einfach: Nach Gl. (2.2–3) wird in dem Zeitintervall $[t_1, t]$, dessen untere Grenze t_1 fest und dessen obere Grenze t variabel ist, folgender Weg zurückgelegt:

$$x(t) - x(t_1) = v_0 \cdot (t - t_1)$$

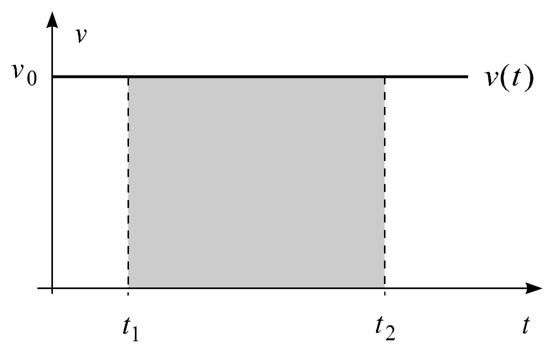

Abb. 2.3–1 Die graue Fläche im Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm ist gleich dem zurückgelegten Weg.

Der Zuwachs $x(t) - x(t_1)$ der Stammfunktionen ist gleich der Fläche unter der Kurve $v(t) = v_0$ im Intervall $[t_1, t]$. Hier deutet sich schon der Zusammenhang zwischen Fläche und Integral an. Der Zuwachs ist die graue Fläche in Abb. 2.3–1. Mit $c := x(t_1) - v_0 \cdot t_1$ folgt:

$$x(t) = v_0\, t + c \qquad \text{für} \quad v(t) = v_0 = \text{const} \tag{2.3–1}$$

Damit ist die Stammfunktion $x(t)$ einer konstanten Geschwindigkeit $v(t) = v_0$ bestimmt.

Als nächstes untersuchen wir eine beliebige *un*gleichförmige Bewegung auf der x-Achse. Da die Geschwindigkeit $v(t)$ nicht konstant ist, kann der in dem Zeitintervall $[t_1, t]$ zurückgelegte Weg nicht so ohne weiteres als Produkt $v(t')\cdot(t-t_1)$ geschrieben werden – zumal man überhaupt nicht wüsste, welche Zeit t' in v einzusetzen wäre.

Wir müssen deshalb anders vorgehen und davon ausgehen, dass die *Geschwindigkeit in genügend kleinen Zeitintervallen* Δt *nahezu konstant ist*. Der in dem kleinen Zeitintervall $[\hat{t}, \hat{t}+\Delta t]$ zurückgelegte Weg ist daher näherungsweise

$$\Delta x = x(\hat{t} + \Delta t) - x(\hat{t}) \approx v(t')\, \Delta t$$

mit t' = *beliebige* Zeit aus $\left[\hat{t}, \hat{t} + \Delta t\right]$.

Welche Zeit t' man aus dem Zeitintervall wählt, ist nicht entscheidend, da sich $v(t')$ in dem sehr kleinen Zeitbereich Δt kaum ändert.

Mit dieser Überlegung können wir nun den in der Zeit $[t_1, t]$ zurückgelegten Weg berechnen: Wir unterteilen das Zeitintervall $[t_1, t]$ in n gleich große Teilintervalle der Breite

$$\Delta t = \frac{t - t_1}{n} \tag{2.3–2}$$

und berechnen die Geschwindigkeiten $v[t_1 + (i-1)\,\Delta t]$ zu Beginn[1] der Teilintervalle ($i = 1, \ldots n$). Dann ist der im Gesamtintervall zurückgelegte Weg gleich der Summe der in den Teilintervallen zurückgelegten Wege:

$$\begin{aligned} x(t) - x(t_1) &= \sum_{i=1}^{n} \left[x\Big(t_1 + i\,\Delta t\Big) - x\Big(t_1 + (i-1)\,\Delta t\Big)\right] \approx \\ &\approx \sum_{i=1}^{n} v\Big(t_1 + (i-1)\,\Delta t\Big)\, \Delta t \end{aligned} \tag{2.3–3}$$

mit $\Delta t = (t - t_1)/n$. (Der Leser kann sich am besten von der Richtigkeit dieser Gl. überzeugen, indem er $i = 1$, danach $i = 2$ usw. einsetzt und die einzelnen Summanden so interpretiert.)

Die letzte Summe in Gl. (2.3–3), die wir "Zwischensumme" nennen wollen, *ist gleich der grauen Fläche unter der Stufenfunktion in Abb.* 2.3–2.

---

[1] Genauso gut hätte man die Geschwindigkeiten am Ende der Teilintervalle oder irgendwo innerhalb der Teilintervalle berechnen können, weil die n Teilintervalle sehr klein sind und sich die Geschwindigkeit daher innerhalb eines Teilintervalles kaum ändert.

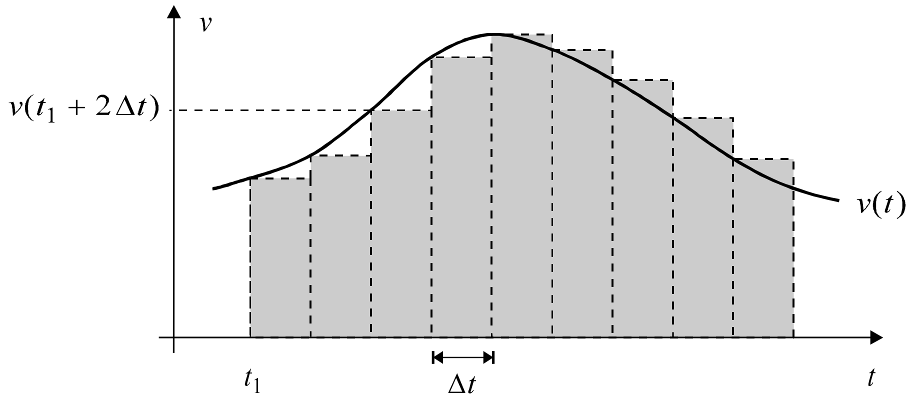

Abb. 2.3–2 Der gesamte zurückgelegte Weg ist die Summe der in den Teilintervallen zurückgelegten Teilwege. Für kleine Δt ist jeder Teilweg ungefähr gleich der Geschwindigkeit am Anfang des Teilweges mal Δt.

Wir lassen nun die Zahl n der Teilintervalle größer und größer werden. Dabei wird die Breite $\Delta t = (t - t_1)/n$ der Teilintervalle immer kleiner. Je schmaler Δt wird, desto weniger ändert sich die Geschwindigkeit $v(t)$ innerhalb der Teilstrecken und desto genauer beschreibt die Zwischensumme den zurückgelegten Weg $\Delta x = x(t) - x(t_1)$. Für $n \to \infty$ strebt die Zwischensumme gegen einen Grenzwert, den man das <u>“Integral”</u> der Funktion $v(t)$ nennt:

$$x(t) - x(t_1) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} v\left(t_1 + (i-1)\frac{t-t_1}{n} \right) \cdot \frac{t-t_1}{n} =: \int_{t_1}^{t} v(t')\, dt' \qquad (2.3\text{–}4)$$

Das Integral ist einerseits gleich der Fläche zwischen der Funktion $v(t)$ und der Abszisse im Intervall $[t_1,\ t]$ und andererseits gleich dem Zuwachs $x(t) - x(t_1)$ der Stammfunktion.

Wenn wir $x(t_1)$ in Gl. (2.3–4) auf die rechte Seite bringen, erhalten wir den Ort des Teilchens zur Zeit t bei gegebener Geschwindigkeit $v(t)$:

$$x(t) = x(t_1) + \int_{t_1}^{t} v(t')\, dt' \qquad (2.3\text{–}5)$$

$x(t)$ ist die Stammfunktion des sog. “Integranden” $v(t)$. In *Verallgemeinerung* dieser Aussagen auf andere Funktionen erhalten wir die folgenden Integraleigenschaften, die von zentraler Bedeutung für die Mathematik und Physik sind:

- Das Integral

$$\int_{t_1}^{t} f(t')\, dt' := \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(t_1 + (i-1)\frac{t-t_1}{n} \right) \cdot \frac{t-t_1}{n}$$

ist gleich der Fläche, die von der Funktion $f(t)$ und der Abszisse im Intervall $[t_1, t]$ eingeschlossen wird.

- Das Integral über eine Funktion $f(t)$ ist gleich der Änderung

$$F(t) - F(t_1) = \int_{t_1}^{t} f(t')\, dt' \tag{2.3–6}$$

der Stammfunktion des Integranden im Integrationsbereich. Daraus folgt insbesondere

$$\frac{d}{dt}\int_0^t f(t')dt' = \frac{d}{dt}[F(t) - F(0)] = f(t)$$

2.4 Beschleunigung

Im Gegensatz zum alltäglichen Sprachgebrauch werden in Physik und Technik nicht nur Bewegungen mit zunehmendem Geschwindigkeitsbetrag $|\mathbf{v}|$, sondern auch solche mit abnehmendem Geschwindigkeitsbetrag beschleunigt genannt. Darüber hinaus werden sogar Bewegungen mit konstantem Betrag $|\mathbf{v}|$, aber veränderlicher Richtung von $\mathbf{v}$ beschleunigt genannt. Ein Beispiel dafür ist die gleichmäßige Kreisbewegung: Nach dem zweiten Newtonschen Axiom $F = m\,a$ ist die Beschleunigung bei der gleichförmigen Kreisbewegung gleich der Zentripetalkraft dividiert durch die Masse.

Auch jetzt betrachten wir zuerst wieder den einfachsten Fall, die *geradlinige Bewegung*, bei der wir skalar rechnen dürfen. *Im Folgenden werden fast dieselben Überlegungen angestellt wie bei der Definition der Geschwindigkeit.* Der wesentliche Unterschied ist nur der, dass wir jetzt nicht mehr im Orts-Zeit-Diagramm arbeiten, sondern im Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm. Vom Autofahren ist bekannt, dass Beschleunigung als Geschwindigkeitsänderung pro Zeit definiert ist. Daher *definieren* wir die Steigung der Sekante in Abb. 2.4–1

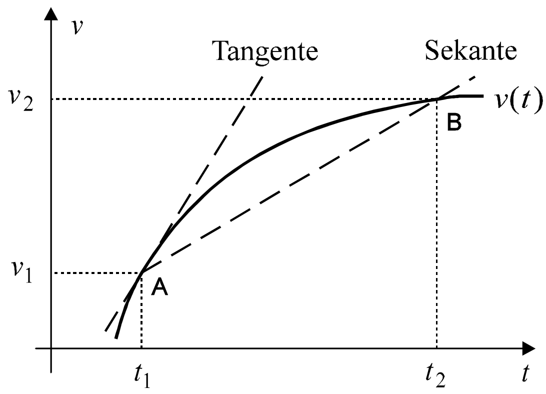

Abb. 2.4–1 Die Steigungen der Sekante und Tangente im Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm sind laut Definition die mittlere und die momentane Beschleunigung.

$$a_\mathrm{m} := \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \tag{2.4–1}$$

als „mittlere Beschleunigung” oder „Durchschnittsbeschleunigung” im Intervall $[t_2, t_1]$. Die Einheit der Beschleunigung ist danach $\mathrm{m/s^2}$.

Bei der Definition der momentanen Beschleunigung $a(t)$ zur Zeit t gehen wir genauso vor wie bei der Definition der momentanen Geschwindigkeit: Danach ist die *momentane Beschleunigung die mittlere Beschleunigung im Grenzübergang* $\Delta t \to 0$:

$$a(t) := \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} \tag{2.4–2}$$

Die Beschleunigung ist die einmalige Ableitung der Geschwindigkeit nach der Zeit oder die zweimalige Ableitung des Ortes nach der Zeit.

$$a(t) := \frac{d\,v(t)}{dt} = \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = \ddot{x}(t) \tag{2.4–3}$$

Ein besonders wichtiger Spezialfall ist die *gleichförmig* oder *gleichmäßig beschleunigte Bewegung*; hier ist die Beschleunigung konstant. Der reibungsfreie Fall im homogenen Schwerefeld ist die bekannteste gleichförmig beschleunigte Bewegung. Wegen $a(t) = \dot{v}(t)$ ist die Geschwindigkeit die Stammfunktion der Beschleunigung. Die Geschwindigkeit ergibt sich nach Gl. (2.3–6) durch Integration über die konstante Beschleunigung:

$$v(t) - v_0 = \int_0^t a \; dt' = a\,t$$

$$v(t) = v_0 + a\,t \qquad \text{nur für gleichförmig beschleunigte Bewegungen} \tag{2.4–4}$$

Eine weitere Integration liefert den Ort des Teilchens

$$x(t) - x_0 = \int_0^t v(t')\, dt' = v_0\, t + \frac{a}{2} t^2$$

$$\Rightarrow \qquad x(t) = x_0 + v_0\, t + \frac{a}{2} t^2 \quad \text{nur für gleichförmig beschleunigte Bewegungen} \tag{2.4–5}$$

Bemerkung: Immer wieder schreiben Studenten für die Beschleunigung die Gl. $a = v/t$ auf. Man kann gar nicht oft genug betonen, dass diese einfache Beziehung nach Gl. (2.4–4) nur für gleichförmig beschleunigte Bewegungen und nur für $v_0 = 0$ gilt. Für $a(t) \neq \text{const}$ gilt nach Gl. (2.4–3) $a(t) = \dot{v}(t)$ und *nicht* $a = v/t$.

Schnellkäfer erreichen im Tierreich die größte Beschleunigung: Beim Hochspringen können sie mit $a \approx 400\,g$ beschleunigen. Die größten Beschleunigungen in der Natur erreichen einige Pilzarten, die ihre Sporen mit einer Beschleunigung von bis zu $1{,}8 \cdot 10^5\,g$ (!) abschießen.

Jetpiloten müssen nach der Auslösung des Schleudersitzes sehr kurzfristig eine Beschleunigung von $27\,g$ aushalten. Dabei wird die Wirbelsäule so stark gestaucht, dass die Piloten etwa 0,5 cm kleiner werden. Nach zwei Notausstiegen im Schleudersitz werden Bundeswehrpiloten in den vorzeitigen Ruhestand versetzt.

Tabelle 2.4–1 Die für den Menschen maximal erträgliche Beschleunigung hängt von der Körperhaltung und von der Dauer der Beschleunigung ab und ist wichtig für die bemannte Raumfahrt, Militärjets und Kraftfahrzeuge. Bei Crash-Versuchen mit Dummies darf die kurzzeitige Kopfbeschleunigung höchstens 80 g und die Brustbeschleunigung höchstens 60 g betragen.

Haltung	Erträgliche Beschleunigung für 5 sec.
Kopf nach unten	4 g
sitzende Haltung	7 g
Bauchlage	13 g
Rückenlage	15 g

Dauer	Erträgliche Beschleunigung in sitzender Haltung
1 sec	13 g
5 sec	7 g
10 sec	6 g
60 sec	4 g

Beispiel 2.4–1 Bremsweg.

Ein Auto fährt mit der Geschwindigkeit v_0 und macht dann eine Vollbremsung mit konstanter Beschleunigung $a = -1{,}05 \cdot g$ bis zum Stillstand. Berechne den Bremsweg *s*.

Lösung:

Die Gln. (2.4–4) und (2.4–5) lauten für $x_0 = 0$:

$$v(t) = v_0 + a\,t \qquad x(t) = v_0\,t + \frac{a}{2}\,t^2$$

Die Zeit für die Abbremsung sei *T*. Am Ende des Bremsvorganges ist $v(T) = 0$ und $x(T) = s$.

$$v(T) = 0 = v_0 + a\,T \qquad x(T) = s = v_0\,T + \frac{a}{2}\,T^2 \qquad (2.4\text{–}6/7)$$

Wir lösen die Gl. (2.4–6) nach *T* auf und setzen *T* in Gl. (2.4–7) ein:

$$a = -\frac{v_0^2}{2\,s} \quad \Leftrightarrow \quad s = -\frac{v_0^2}{2\,a} \qquad \text{für } a = \text{const} \text{ und } v_{\text{Ende}} = 0 \qquad (2.4\text{–}8/9)$$

Kontrolle und Veranschaulichung:

- Die Einheiten sind richtig.
- Für $v_0 = 100\,\text{km/h} \approx 27{,}8\,\text{m/s}$ ergibt sich der realistische Bremsweg $s \approx 37{,}5\,\text{m}$.
- $s \sim v_0^2$. In der Fahrschule lernt man, dass der Bremsweg proportional ist zum Geschwindigkeitsquadrat.

Beispiel 2.4–2 Konstante Verzögerung.

Ein PKW verringert durch gleichmäßiges Bremsen seine Geschwindigkeit von $v_0 = 72\,\text{km/h}$ auf $v_1 = 36\,\text{km/h}$ und legt dabei die Strecke $s = 100$ m zurück.

a) Wie groß ist die (negative) Beschleunigung *a* ?

b) Wie groß ist die Bremszeit *T* ?

Lösung:

a) Mit $x_0 = 0$ lauten die Gln. (2.4–4) und (2.4–5) für alle Zeiten $t \le T$:

$$v(t) = v_0 + a\,t \qquad x(t) = v_0\,t + \frac{a}{2}\,t^2$$

Wir lösen die erste Gl. nach *t* auf und setzen *t* in die zweite Gl. ein:

$$x(t) = v_0 \frac{v(t) - v_0}{a} + \frac{\left[v(t) - v_0\right]^2}{2a}$$

$$\Rightarrow \quad x(t) = \frac{1}{2a}\left[v^2(t) - v_0^2\right] \qquad \text{nur für } a = \text{const} \qquad (2.4\text{–}10)$$

Für $t = T$ erhalten wir mit $x(T) = s = 100$ m $\quad v(T) = v_1 = 10$ m/s $\quad v_0 = 20$ m/s

$$a = \frac{1}{2s}\left(v_1^2 - v_0^2\right) = -1{,}5\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

b) $$T = \frac{v_1 - v_0}{a} = \frac{10\,\frac{\text{m}}{\text{s}} - 20\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{-1{,}5\,\text{m/s}^2} = 6{,}\overline{6}\ \text{s}$$

Bemerkung: Folgendermaßen hätte man die ganze Aufgabe einfacher und schneller rechnen können: Die mittlere Geschwindigkeit während des Abbremsens beträgt v_m = 15 m/s. Die Bremszeit ist daher

$$T = \frac{x(T)}{v_m} = \frac{100\ \text{m}}{15\ \text{m/s}} = 6{,}666\ \text{s} \qquad \Rightarrow \qquad a = \frac{v(T) - v_0}{T} = -1{,}5\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \approx -0{,}153\,g$$

Beispiel 2.4–3 Gefährliche Geschwindigkeitsüberschreitung

Ein Auto fährt in der Stadt mit $v_1 = 50$ km/h. Plötzlich läuft ein Kind auf die Straße. Nach der Reaktionszeit $T_R = 1$ s macht der Fahrer eine Vollbremsung mit $a = -g$ und kommt im letzten Augenblick unmittelbar vor dem Kind zum Stehen.

Mit welcher Endgeschwindigkeit v_E hätte er das Kind angefahren, wenn er mit der Geschwindigkeit $v_2 = 60$ km/h gefähren wäre und wenn das Kind in gleicher Entfernung wie oben auf die Straße gelaufen wäre?

Lösung:

Für den Abstand *s*, in dem das Kind vor dem Auto auf die Straße läuft, gelten folgende zwei Gln.:

$$s = v_1 T_R - \frac{v_1^2}{2a} \qquad \text{mit} \quad a = -g$$

und $$s \underset{\text{Gl. (2.4–10)}}{\overset{}{\underset{\uparrow}{=}}} v_2 T_R + \frac{v_E^3 - v_2^2}{2a}$$

Gleichsetzen dieser beiden Gln. liefert

$$v_E = \sqrt{2a\,(v_1 - v_2)\,T_R + v_2^2 - v_1^2} \approx 42{,}5\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Kontrolle und Veranschaulichung:

1) v_E steigt mit zunehmender Reaktionszeit T_R, weil der nach der Schrecksekunde noch zur Verfügung stehende Bremsweg mit wachsender Reaktionszeit abnimmt.

2) Für $T_R = s/v_2$ folgt erwartungsgemäß $v_E = v_2$.

2.5 Kreisbewegung

Die Kreisbewegung ist eine besonders wichtige Bewegung: Maschinenteile, die um eine raumfeste Achse rotieren, führen solche Bewegungen aus.

Ein Massenpunkt m läuft in der x, y-Ebene auf einer Kreisbahn mit Radius r im positiven mathematischen Sinn, d. h. im Gegenuhrzeigersinn. Wir betrachten zuerst wieder den einfachsten Fall, eine gleichförmige Kreisbewegung. Hier werden in gleichen Zeitabständen Δt gleiche Winkel $\Delta\varphi$ überstrichen. Der konstante Quotient $\Delta\varphi/\Delta t$ wird – in Analogie zur Geschwindigkeit $v = \Delta x/\Delta t$ – als „Winkelgeschwindigkeit" ω bezeichnet:

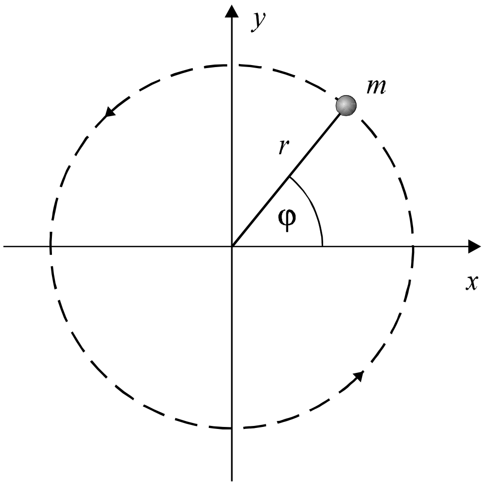

Abb. 2.5–1 Kreisbewegung in der x,y-Ebene.

$$\omega := \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \qquad \text{für gleichförmige Kreisbewegungen} \qquad (2.5\text{–}1)$$

ω hat die Einheit s^{-1} und ist gleich 2π mal Drehzahl. Mit $\varphi(t = 0) =: \varphi_0$ gilt

$$\omega = \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t - 0} = \frac{\varphi(t) - \varphi_0}{t}$$

$$\Rightarrow \qquad \varphi(t) = \varphi_0 + \omega\, t \qquad \text{für gleichförmige Kreisbewegungen} \qquad (2.5\text{–}2)$$

(Beachte die Übereinstimmung mit Gl. (2.2–3).) Der vom Fahrstrahl überstrichene Winkel $\varphi(t)$ wächst linear in der Zeit.

Für ungleichförmige Kreisbewegungen $(\Delta\varphi / \Delta t \neq \text{const})$ gibt die Gl.

$$\omega_m := \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \qquad (2.5\text{–}3)$$

die mittlere Winkelgeschwindigkeit im Intervall Δt an. Die momentane Winkelgeschwindigkeit $\omega(t)$ zur Zeit t ist definiert als

$$\omega(t) := \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\varphi(t + \Delta t) - \varphi(t)}{\Delta t} = \dot{\varphi}(t) \qquad (2.5\text{–}4)$$

Bemerkenswert und wichtig ist die Feststellung, dass die mittlere und die momentane Winkelgeschwindigkeit in völlig gleicher Weise definiert werden wie die mittlere Geschwindigkeit v_m und die momentane Geschwindigkeit $v(t)$. (Vergleiche die Gln. (2.2–4 und 6) mit den Gln. (2.5–3 und 4).) Dies zeigt sehr deutlich, dass es in der Physik Gedanken, Überlegungen und Rechnungen gibt, die immer wieder in ähnlicher Form auftreten.

Die zweite Ableitung von $\varphi(t)$ ergibt die Winkelbeschleunigung $\alpha(t) = \dot{\omega}(t) = \ddot{\varphi}(t)$.

Die momentane Bahn- oder Umfangsgeschwindigkeit des Teilchens beträgt

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{r\,\Delta\varphi}{\Delta t} = r\,\omega(t) \tag{2.5–5}$$

Dabei folgt die Gl. für den Kreisbogen $\Delta s = r\,\Delta\varphi$ mit dem Dreisatz aus der Gl. für den Kreisumfang $U = r\,2\,\pi$. Nach Gl. (2.5–5) muss ω unbedingt *im Bogenmaß* und nicht im Winkelmaß angegeben werden; denn nur im Bogenmaß ist $\Delta s = r\,\Delta\varphi$.

Für gleichförmige und auch für ungleichförmige Kreisbewegungen gilt also:

$$v(t) = r\,\omega(t) \tag{2.5–6}$$

Nachdem die Winkelgeschwindigkeit $\omega(t)$ und Bahngeschwindigkeit $v(t)$ als *Skalare* definiert bzw. berechnet wurden, müssen beide Größen noch zu *Vektoren* erweitert werden. Der Betrag von $\vec{\omega}(t)$ wird durch die Gl. (2.5–4) gegeben. Die Richtung von $\vec{\omega}(t)$ wird wie folgt *definiert*: $\vec{\omega}(t)$ steht senkrecht auf der Bahnebene und weist in die Richtung, in die sich ein Korkenzieher bewegt, der im Umlaufsinn der Masse gedreht wird. $\vec{\omega}(t)$ *ist also laut Definition parallel zur Drehachse.* Bei einer ungleichförmigen Kreisbewegung ist nur die Richtung der Winkelgeschwindigkeit konstant.

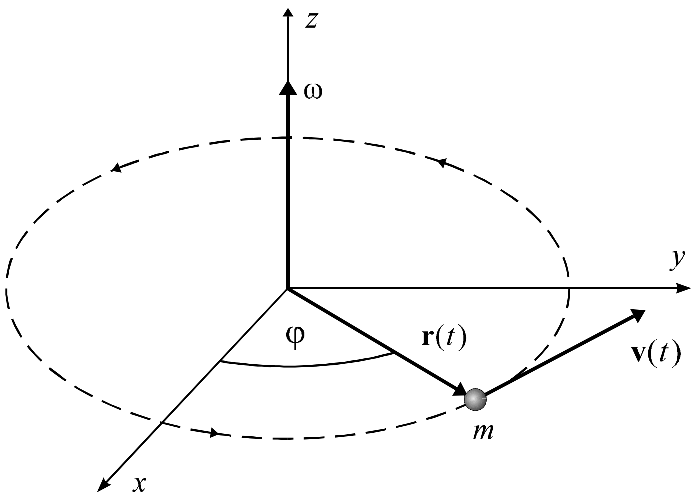

Abb. 2.5–2 Die Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ steht senkrecht auf der Kreisbahn und fällt daher mit der Drehachse zusammen.

Der Geschwindigkeitsvektor $\mathbf{v}(t)$ ist die Zeitableitung des Ortsvektors $\mathbf{r}(t)$. Der Ortsvektor $\mathbf{r}(t)$ geht vom Koordinatenursprung zum Ort des Teilchens und lautet nach Abb. 2.5–2:

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi(t) \\ r\sin\varphi(t) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.5–7}$$

$$\Rightarrow \qquad \mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t) = r\,\dot{\varphi}(t) \begin{pmatrix} -\sin\varphi(t) \\ \cos\varphi(t) \\ 0 \end{pmatrix} = r\,\omega(t) \begin{pmatrix} -\sin\varphi(t) \\ \cos\varphi(t) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.5–8}$$

Dabei lieferte die Kettenregel die innere Ableitung $\dot{\varphi}(t) = \omega(t)$.

Kontrolle und Veranschaulichung:

- Die Einheiten sind richtig.

- $\mathbf{v}(t)$ hat in Übereinstimmung mit Gl. (2.5–5) die Länge

$$|\mathbf{v}(t)| = r\,\omega(t)\sqrt{\sin^2\varphi(t) + \cos^2\varphi(t)} = r\,\omega(t)$$

- $\mathbf{v}(t)$ liegt in der x, y-Ebene und steht senkrecht auf $\mathbf{r}(t)$, da das Skalarprodukt $\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{v}(t) = 0$ ist.

Behauptung: $\mathbf{v}(t)$ lässt sich als Vektorprodukt schreiben

$$\mathbf{v}(t) = \vec{\omega}(t) \times \mathbf{r}(\mathrm{t}) \tag{2.5–9}$$

Beweis: In Koordinatendarstellung lautet das Vektorprodukt von **a**, **b**

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y\, b_z - a_z\, b_y \\ a_z\, b_x - a_x\, b_z \\ a_x\, b_y - a_y\, b_x \end{pmatrix}$$

Wir berechnen die rechte Seite der Gl. (2.5–9):

$$\vec{\omega}(t) \times \mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega(t) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} r\cos\varphi(t) \\ r\sin\varphi(t) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega(t)\, r\sin\varphi(t) \\ \omega(t)\, r\cos\varphi(t) \\ 0 \end{pmatrix} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Gl. (2.5–8)}}}{=} \mathbf{v}(t)$$

◆

Die zweite Ableitung des Ortsvektors $\mathbf{r}(t)$ nach der Zeit liefert die Beschleunigung

$$\mathbf{a}(t) = r\,\dot{\omega}(t) \begin{pmatrix} -\sin\varphi(t) \\ \cos\varphi(t) \\ 0 \end{pmatrix} - r\,\omega^2(t) \begin{pmatrix} \cos\varphi(t) \\ \sin\varphi(t) \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{\dot{\omega}(t)}{\omega(t)}\,\mathbf{v}(t) - \omega^2(t)\,\mathbf{r}(t) \tag{2.5–10}$$

Der erste Term ist parallel zur Geschwindigkeit $\mathbf{v}(t)$ und beschreibt die Beschleunigung, die bei einer Änderung von ω in tangentialer Richtung auftritt. Beim Betrachten einer Kreisbahn, deren Winkelgeschwindigkeit sich plötzlich stark ändert, wird dieser Term verständlich. Er hat den Betrag $r\,\dot{\omega}(t)$ und verschwindet bei gleichförmigen Kreisbahnen.

Der zweite Term $-\,\omega^2(t)\,\mathbf{r}(t)$ ist die sog. „Zentripetalbeschleunigung". Sie ist *proportional zum Radius r und proportional zu* ω^2 *und weist zum Kreismittelpunkt.* Für $\dot{\omega} = 0$ folgt:

$$\mathbf{a}(t) = -\,\omega^2\,\mathbf{r}(t) \qquad \text{nur für gleichförmige Kreisbewegungen} \tag{2.5–11}$$

Auf ein Teilchen, das eine gleichförmige Kreisbewegung macht, wirkt die Zentripetalkraft

$$m\,\mathbf{a} = -\,m\,\omega^2\,\mathbf{r}$$

Bei den Planeten, deren Ellipsenbahnen nur wenig von Kreisbahnen abweichen, ist die Zentripetalkraft die Anziehungskraft der Sonne. Bei einem Teilchen, das von einem Faden gehalten auf einer Kreisbahn umläuft, wird die Zentripetalkraft durch den Faden aufgebracht. Der Betrag der Beschleunigung gleichförmiger Kreisbewegungen ist

$$a = \omega^2 r \underset{\omega = v/r}{\overset{}{\underset{\uparrow}{=}}} \frac{v^2}{r} = \omega v \qquad \text{nur für gleichförmige Kreisbewegungen} \qquad (2.5\text{–}12)$$

Bemerkungen: 1) Die Gln. (2.5–12) gelten auch für ungleichförmige Kreisbewegungen, beschreiben dann aber nur die Komponente der Beschleunigung in radialer Richtung, also nur den Betrag der Zentripetalbeschleunigung.

2) Der Leser muss sich die drei wichtigen Gln. (2.5–12) nicht unbedingt merken. Er muss nur wissen, dass sich a in *einfacher* Form durch Multiplikation und Division der drei Variablen ω, v und r ergibt und dass a die Einheit $\mathrm{m\,s^{-2}}$ hat. Dann erhält man zwangsläufig die Gln. (2.5–12). Andere *einfache* Gln. für a können bei Beachtung der Einheit nicht mit ω, v und r aufgestellt werden.

Beispiel 2.5–1 Kreisender Satellit

Ein Satellit kreist in 200 km Höhe einmal in 88,45 min um die Erde. Der Erdradius beträgt 6380 km. Wie groß sind ω, v, a?

Lösung:

$$\omega = \frac{2\pi}{88{,}45 \cdot 60}\,\frac{1}{\mathrm{s}} \approx 1{,}1839 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{s^{-1}}$$

$$v = \omega r = 1{,}1839 \cdot 10^{-3} \cdot 6{,}58 \cdot 10^{6}\ \mathrm{m/s} \approx 7790\ \mathrm{m/s} \approx 28045\ \mathrm{km/h}$$

$$a = v^2/r \approx 9{,}22\ \mathrm{m/s^2} \approx \text{Erdbeschleunigung in 200 km Höhe}$$

Bemerkung: Nach dem Gravitationsgesetz (siehe Aufgabe 4–16) ist die Erdanziehungskraft auf einen Körper im Abstand r zum Erdmittelpunkt proportional zu $1/r^2$. Daher beträgt die Erdbeschleunigung in 200 km Höhe

$$g_{200} = \left(\frac{6380}{6580}\right)^2 \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \approx 9{,}22\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

Hiermit beenden wir die Kinematik, die eine rein mathematische Disziplin ist und daher ohne die physikalischen Größen ‘Masse’ und ‘Kraft’ auskommt. Ein kleiner Rückblick sei gestattet: Wir haben die drei kinematischen Funktionen $x(t)$, $v(t)$, $a(t)$ eingeführt und wissen nun, dass sie durch Differenzieren und Integrieren ineinander umgerechnet werden können. Außerdem wurde die Kreisbewegung von Massenpunkten behandelt. Die Bedeutung von Ableitungen und Integralen wurde an Hand physikalischer Probleme ausführlich besprochen. Weitere mathematische Hilfsmittel und mathematische Theorien werden im Buch nicht mehr erläutert, so dass wir uns ab jetzt auf die Physik konzentrieren können.

2.6 Noch einmal in Kürze

1) Momentane Geschwindigkeit $v(t)$ und Beschleunigung $a(t)$ sind wie folgt definiert:

$$v(t) := \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \frac{d\,x(t)}{d\,t} = \dot{x}(t) \qquad (2.2\text{–}6)$$

$$a(t) := \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t} = \frac{d\,v(t)}{d\,t} = \dot{v}(t) = \ddot{x}(t) \qquad (2.4\text{–}2)$$

2) Besonders wichtig sind gleichförmig beschleunigte Bewegungen. Zweimalige Integration der Gl. $a = \text{const}$ führt auf

$$v(t) = v_0 + a\,t \qquad x(t) = x_0 + v_0\,t + \frac{a}{2}\,t^2 \qquad (2.4\text{–}4/5)$$

3) Bei Kreisbahnen wird die momentane Winkelgeschwindigkeit wie folgt definiert:

$$\omega(t) := \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\varphi(t+\Delta t) - \varphi(t)}{\Delta t} = \frac{d\varphi(t)}{d\,t} = \dot{\varphi}(t) \qquad (2.5\text{–}4)$$

Die Richtung des Vektors der Winkelgeschwindigkeit ist laut Definition parallel zur Drehachse; der Richtungssinn wird mit der Korkenzieher-Regel festgelegt.

4) Für Kreisbewegungen lauten die Geschwindigkeit und die Zentripetalbeschleunigung

$$v = r\,\omega \qquad a = \omega^2\,r = \frac{v^2}{r} = \omega\,v \qquad (2.5\text{–}6/12)$$

2.7 Aufgaben

2–1 Leicht Überholvorgang

Ein LKW fährt mit konstanter Geschwindigkeit $v_L = 36\,\text{km/h}$ an einem stehenden PKW vorbei. Wenn sein Vorsprung $s_1 = 100\,\text{m}$ beträgt, startet der PKW und fährt mit gleichförmiger Beschleunigung $a = 1{,}2\,\text{m/s}^2$ hinterher.

a) Wie viel Zeit T benötigt der PKW, um den LKW einzuholen?

b) Welche Strecke s legt der PKW dabei zurück?

2–2 Leicht Beschleunigter Zug

a) Welche Beschleunigung a hat ein Zug, der in 25 s die Geschwindigkeit von 36 km/h auf 54 km/h erhöht?

b) Welche Strecke s legt er dabei zurück?

2–3 Mittel Beschleunigter Rennwagen Abb. 2.7–1

Zur Zeit $t = 0$ startet ein Rennwagen an der Stelle $x = 0$ mit konstanter Beschleunigung a. Zur Zeit t_1 fährt er in eine 75 m lange Mess-Strecke ein, die er 2 s später wieder verlässt. Beim Durchfahren der Mess-Strecke wird die Geschwindigkeit verdoppelt. Bestimme die vier Unbekannten t_1, x_1, v_1, a .

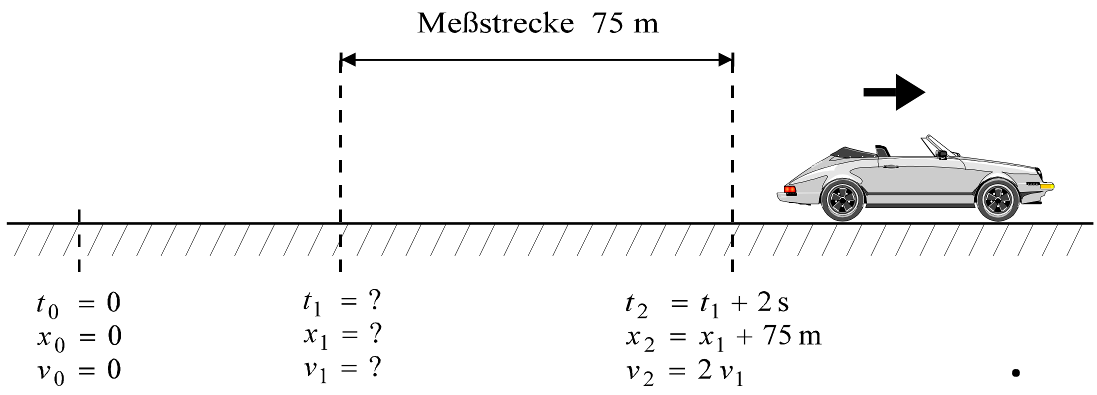

Abb. 2.7–1 Der beschleunigte Rennwagen durchfährt eine Mess-Strecke mit den angeführten Daten.

2–4 Mittel Känguruh-Sprünge Abb. 2.7–2

Ein Känguruh macht beim Rennen 6 m weite und 1,5 m hohe Sprünge. Wie groß ist die konstante horizontale Geschwindigkeit *v* des Känguruhs?

Hinweis: Die horizontale Bewegung ist gleichförmig, die vertikale Bewegung ist gleichförmig beschleunigt mit

$a = g = 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$.

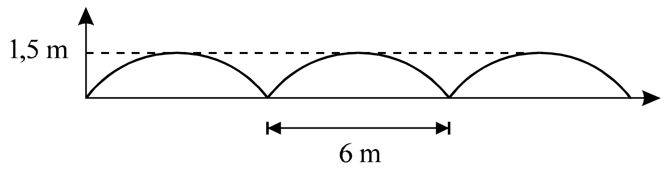

Abb. 2.7–2 Das Känguruh macht 6 m weite und 1,5 m hohe Sprünge.

2–5 Mittel Notbremsung

Zwei *identische* Autos fahren im Nebel senkrecht auf eine Wand zu. Der erste Wagen fährt mit 54 km/h und beginnt 12 m vor der Wand mit einer Vollbremsung (blockierende Räder). Er kommt im letzten Augenblick unmittelbar vor der Wand zum Stehen (Abstand Auto – Wand = 0 m).
Der zweite Wagen fährt mit 72 km/h und beginnt 16 m vor der Wand mit einer Vollbremsung. Mit welcher Geschwindigkeit prallt er gegen die Wand?

2–6 Mittel Brunnentiefe

Ein Stein fällt mit der Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 0$ in einen tiefen Brunnen. Nach der Zeit *t* hört man den Bodenaufprall. Wie groß ist die Brunnentiefe?

Hinweise: Reibungskräfte beim Fall des Steines sollen außer acht gelassen werden. Die Zeit für die Schallausbreitung ist zu berücksichtigen. Die Schallgeschwindigkeit beträgt $c = 340\ \mathrm{m/s}$.

2–7 Schwer Maximale Drehzahl Abb. 2.7–3

Ein *dünnes* Holzbrett mit Masse $m = 9\,\mathrm{kg}$, Höhe $h = 2\,\mathrm{m}$ und Breite $b = 1{,}2\,\mathrm{m}$ ist an eine vertikale Achse angeklebt, die mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω rotiert. Der gleichmäßig über die Höhe *h* verteilte Kleber kann insgesamt eine Zugkraft von $2.5\,\mathrm{kN}$ aufnehmen. Gewichtskraft und Reibungskräfte in der Luft sollen vernachlässigt werden.

Welche Winkelgeschwindigkeit ist maximal zulässig, wenn der Kleber nicht reißen soll?

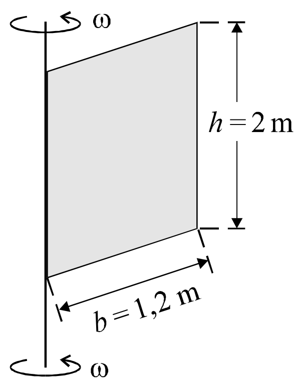

Abb. 2.7–3 Das *dünne* Brett ist an eine rotierende Achse angeklebt.