George B. Thomas
Maurice D. Weir
Joel Hass

Basisbuch Analysis

ALWAYS LEARNING

PEARSON

Basisbuch Analysis

George B. Thomas
Maurice D. Weir
Joel R. Hass

Basisbuch Analysis

12., aktualisierte Auflage

PEARSON

Higher Education
München • Harlow • Amsterdam • Madrid • Boston
San Francisco • Don Mills • Mexico City • Sydney
a part of Pearson plc worldwide

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.dnb.de> abrufbar.

10 9 8 7 6 5 4 3 2 1

14 13

ISBN 978-3-86894-174-6(print);978-3-86326-525-0(PDF);978-3-86326-077-4(ePUB)

www.pearson.de
A part of Pearson plc worldwide

Programmleitung: Birger Peil, bpeil@pearson.de
Development: Alice Kachnij, akachnij@pearson.de
Korrektorat: Carsten Heinisch, Kaiserslautern
Fachlektorat: Dr. Jürgen Schmidt, Schweina
Übersetzung: Micaela Krieger-Harwede, Leipzig   Ulrike Klein, Berlin
Umschlaggestaltung: Thomas Arlt, tarlt@adesso21.net
Herstellung: Monika Weiher, mweiher@pearson.de
Titelmotiv: Paul Downing, Getty Images Deutschland
Satz: le-tex publishing services GmbH, Leipzig
Druck und Verarbeitung: Firmengruppe APPL, aprinta druck, Wemding

Printed in Germany

Differentiation

3

3.1 Tangenten und die Ableitung in einem Punkt 97
3.2 Die Ableitung als Funktion 101
3.3 Differentiationsregeln 109
3.4 Die Ableitung als Änderungsrate 117
3.5 Ableitungen trigonometrischer Funktionen 122
3.6 Die Kettenregel 128
3.7 Implizite Differentiation 132
3.8 Verknüpfte Änderungsraten 139
3.9 Linearisierung und Differentiale 144

ÜBERBLICK

Übersicht

Zu Beginn des 2. Kapitels haben wir diskutiert, wie man die Steigung einer Kurve in einem Punkt bestimmt und wie man die Rate misst, mit der sich eine Funktion ändert. Jetzt, wo wir Grenzwerte behandelt haben, können wir diese Begriffe genauer definieren. Dabei werden wir feststellen, dass es sich in beiden Fällen um Interpretationen der *Ableitung* einer Funktion in einem Punkt handelt. Anschließend erweitern wir dieses Konzept von der Ableitung in einem einzelnen Punkt auf die *Ableitungsfunktion*, und wir leiten Regeln her, wie man diese Ableitungsfunktionen leicht bestimmen kann, ohne Grenzwerte explizit berechnen zu müssen.

3.1 Tangenten und die Ableitung in einem Punkt

In diesem Abschnitt definieren wir die Steigung und die Tangente an eine Kurve in einem Punkt sowie die Ableitung einer Funktion in einem Punkt. In einem späteren Abschnitt dieses Kapitels werden wir die Ableitung als die momentane Änderungsrate einer Funktion interpretieren.

Wie man eine Tangente an den Graphen einer Funktion bestimmt

Um eine Tangente an eine beliebige Kurve $y = f(x)$ in einem Punkt $P(x_0, f(x_0))$ zu bestimmen, gehen wir wie in Abschnitt 2.1 vor. Wir berechnen die Steigung der Sekante durch P und einen benachbarten Punkt $Q(x_0 + h, f(x_0 + h))$. Anschließend untersuchen wir den Grenzwert der Steigung für $h \to 0$ (▶Abbildung 3.1). Falls der Grenzwert existiert, nennen wir ihn die Steigung der Kurve im Punkt P, und wir definieren die Tangente in P als die Gerade durch P, die genau diese Steigung besitzt.

Definition

Die **Steigung der Kurve** $y = f(x)$ im Punkt $P(x_0, f(x_0))$ ist die Zahl

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad \text{(vorausgesetzt, der Grenzwert existiert).}$$

Die **Tangente** an die Kurve im Punkt P ist die Gerade durch P mit dieser Steigung.

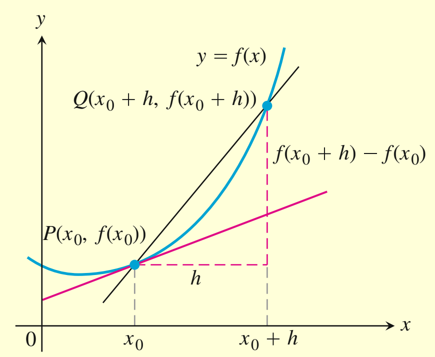


Abbildung 3.1 Die Steigung der Tangente in P ist $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$.

In Beispiel 2.1 haben wir diese Definitionen verwendet, um die Steigung der Parabel $f(x) = x^2$ im Punkt $P(2, 4)$ sowie die Tangente an die Parabel in P zu bestimmen. Betrachten wir nun ein weiteres Beispiel.

Beispiel 3.1 — **Steigung einer Kurve**

a Bestimmen Sie die Steigung der Kurve $y = 1/x$ an einer beliebigen Stelle $x = a \neq 0$. Wie groß ist die Steigung an der Stelle $x = -1$?

b Wo ist die Steigung der Kurve gleich $-1/4$?

c Wie verhält sich die Tangente an die Kurve in $(a, 1/a)$, wenn a sich ändert?

Lösung

a Hier ist $f(x) = 1/x$. Die Steigung in $(a, 1/a)$ ist

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{1}{h+a} - \dfrac{1}{a}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\,\frac{a-(a+h)}{a(a+h)}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{-h}{ha(a+h)} = \lim_{h\to 0} \frac{-1}{a(a+h)} = -\frac{1}{a^2}\,.$$

Vergegenwärtigen Sie sich, dass wir so lange „$\lim_{h\to 0}$" vor jeden Bruch schreiben mussten, bis wir diesen Grenzwert durch Einsetzen von $h = 0$ berechnen konnten. Die Zahl a kann positiv oder negativ sein, nicht aber gleich 0. Für $a = -1$ ist die Steigung $-1/(-1)^2 = -1$ (▶Abbildung 3.2).

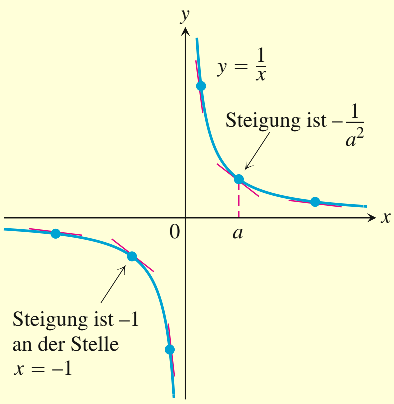


Abbildung 3.2 Die in der Nähe des Ursprungs sehr steilen Tangenten werden immer flacher, je weiter sich der Berührungspunkt vom Ursprung entfernt.

b Die Steigung von $y = 1/x$ an der Stelle $x = a$ ist $-1/a^2$. Den Wert $-1/4$ hat die Steigung daher für

$$-\frac{1}{a^2} = -\frac{1}{4}.$$

Diese Gleichung ist äquivalent zu $a^2 = 4$, woraus sich $a = 2$ oder $a = -2$ ergibt. Eine Steigung von $-1/4$ hat die Kurve also in den beiden Punkten $(2, 1/2)$ und $(-2, -1/2)$ (▶Abbildung 3.3).

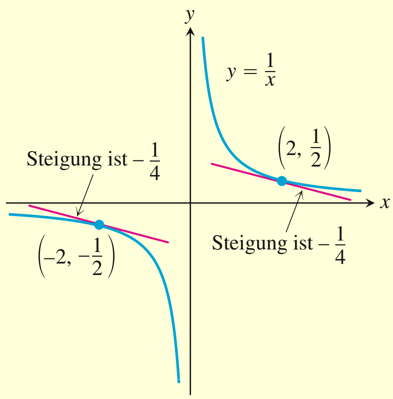


Abbildung 3.3 Die beiden Tangenten an $y = 1/x$ mit der Steigung $-1/4$ (Beispiel 3.1).

c Die Steigung $-1/a^2$ ist für $a \neq 0$ immer negativ. Für $a \to 0^+$ geht die Steigung gegen $-\infty$, und die Tangente wird zunehmend steiler (Abbildung 3.2 auf der vorherigen Seite). Genauso verhält es sich für $a \to 0^-$. Wenn sich a in eine der beiden Richtungen vom Ursprung entfernt, geht die Steigung gegen 0, und die Tangente wird immer flacher, bis sie schließlich zu einer Horizontalen wird. ■

Änderungsraten: Ableitung an einer Stelle

Der Ausdruck

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}, \quad h \neq 0$$

heißt **Differenzenquotient von f an der Stelle x_0 mit der Schrittweite h**. Existiert für den Differenzenquotienten für $h \to 0$ ein Grenzwert, so versehen wir diesen Grenzwert mit einem speziellen Namen und einem speziellen Symbol.

Definition

Die **Ableitung einer Funktion f an der Stelle x_0** bezeichnen wir mit $f'(x_0)$. Sie ist

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \quad \text{(vorausgesetzt, der Grenzwert existiert).}$$

Interpretieren wir den Differenzenquotienten als die Steigung einer Sekante, so gibt die Ableitung die Steigung der Kurve $y = f(x)$ im Punkt $P(x_0, f(x_0))$ an.

Zusammenfassung

Wir haben Steigungen von Kurven, Tangenten an eine Kurve, die Änderungsrate einer Funktion und die Ableitung einer Funktion in einem Punkt behandelt. All diese Begriffe beziehen sich auf denselben Grenzwert.

Merke

Alle nachfolgenden Begriffe sind Interpretationen des Grenzwerts des Differenzenquotienten

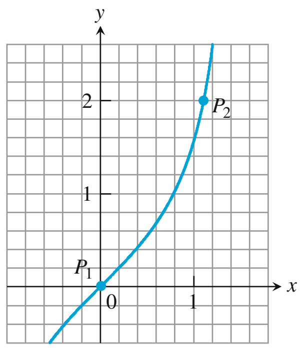
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

1. Die Steigung des Graphen von $y = f(x)$ an der Stelle $x = x_0$.
2. Die Steigung der Tangente an die Kurve $y = f(x)$ an der Stelle $x = x_0$.
3. Die Änderungsrate von $f(x)$ bezüglich x an der Stelle $x = x_0$.
4. Die Ableitung $f'(x_0)$ an einer Stelle.

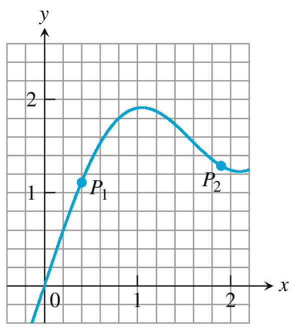
Aufgaben zum Abschnitt 3.1

Steigungen und Tangenten Verwenden Sie in den Aufgaben 1 und 2 das Gitter und einen geraden Kurvenabschnitt, und geben Sie eine grobe Schätzung (in y-Einheiten pro x-Einheit) für die Steigung der Kurve in den Punkten P_1 und P_2 an.

1.



2.



Bestimmen Sie in den Aufgaben 3 und 4 eine Gleichung für die Tangente an die Kurve in dem angegebenen Punkt. Skizzieren Sie anschließend Kurve und Tangente in einer Abbildung.

3. $y = 4 - x^2, \quad (-1, 3)$ **4.** $y = 2\sqrt{x}, \quad (1, 2)$

Bestimmen Sie in den Aufgaben 5 und 6 die Steigung des Funktionsgraphen in dem angegebenen Punkt. Bestimmen Sie anschließend eine Gleichung für die Tangente an den Graphen in diesem Punkt.

5. $f(x) = x^2 + 1, \quad (2, 5)$ **6.** $f(x) = \sqrt{x}, \quad (4, 2)$

Bestimmen Sie in den Aufgaben 7 und 8 die Steigung der Kurve an der angegebenen Stelle.

7. $y = 5x^2, \quad x = -1$ **8.** $y = \dfrac{1}{x-1}, \quad x = 3$

Tangenten mit vorgegebenen Steigungen In welchen Punkten hat der Graph der Funktion aus Aufgabe 9 eine horizontale Tangente?

9. $f(x) = x^2 + 4x - 1$

10. Bestimmen Sie die Gleichungen aller Geraden mit der Steigung -1, die Tangenten an die Kurve $y = 1/(x-1)$ sind.

Änderungsraten

11. **Fallgeschwindigkeit eines Objekts.** Ein Objekt wird von einem Turm aus 100 m Höhe fallen gelassen. Nach t Sekunden befindet es sich noch in einer Höhe von $100 - (9{,}81/2)t^2$ m. Mit welcher Geschwindigkeit fällt es 2 s, nachdem es fallen gelassen wurde?

12. **Änderung des Flächeninhalts eines Kreises.** Wie ist die Änderungsrate des Flächeninhalts eines Kreises ($A = \pi r^2$) bezüglich des Radius r, wenn der Radius $r = 3$ ist?

Auf Tangenten prüfen

13. Hat der Graph der Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

eine Tangente, die durch den Ursprung verläuft? Begründen Sie Ihre Antwort.

Vertikale Tangenten

14. Hat der Graph der Funktion

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

eine vertikale Tangente, die durch den Ursprung verläuft? Begründen Sie Ihre Antwort.

Skizzieren Sie die Graphen der Funktionen aus den Aufgaben 15 – 18.

a. Wo haben die Graphen vertikale Tangenten?

b. Bestätigen Sie Ihre Feststellungen aus Teil **a.** durch Grenzwertberechnungen. Lesen Sie zuvor die Einführung zur Aufgabe 14.

15. $y = x^{2/5}$

16. $y = x^{1/5}$

17. $y = 4x^{2/5} - 2x$

18. $y = x^{2/3} - (x-1)^{1/3}$

3.2 Die Ableitung als Funktion

Im letzten Abschnitt haben wir die Ableitung von $y = f(x)$ an der Stelle $x = x_0$ als Grenzwert

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

definiert. Wir betrachten die Ableitung nun als eine *Funktion*, die man aus f erhält, indem man den Grenzwert an jeder Stelle x des Definitionsbereichs von f bestimmt.

Definition

Die **Ableitung** der Funktion $f(x)$ nach der Variablen x ist die Funktion f', deren Wert an der Stelle x

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

ist, vorausgesetzt, der Grenzwert existiert.

Wir verwenden in der Definition die Schreibweise $f(x)$, um das Funktionsargument x hervorzuheben, bezüglich dessen die Ableitungsfunktion $f'(x)$ definiert wird. Der Definitionsbereich von f' ist die Menge der Punkte aus dem Definitionsbereich von f, für die der Grenzwert existiert. Der Definitionsbereich von $f'(x)$ kann also gleich oder kleiner als der Definitionsbereich von f sein. Wenn $f'(x)$ für ein bestimmtes x existiert, so sagen wir, dass f **an der Stelle x differenzierbar ist (eine Ableitung besitzt)**. Existiert $f'(x)$ für alle x aus dem Definitionsbereich, so nennen wir f **differenzierbar**.

Ableitungen aus der Definition berechnen

Die Berechnung einer Ableitung nennt man **Differentiation**. Um hervorzuheben, dass die Differentiation eine Operation ist, die auf eine Funktion $y = f(x)$ wirkt, verwenden wir für die Ableitung $f'(x)$ alternativ die Schreibweise

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x) \,.$$

Beispiel 3.1 illustrierte den Differentiationsprozess für die Funktion $y = 1/x$ im Fall $x = a$. Steht x für eine beliebige Stelle aus dem Definitionsbereich, so erhalten wir die Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2} \,.$$

Ableitung der Kehrwertfunktion

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}, \quad x \neq 0$$

Es folgt ein weiteres Beispiel, in dem wir x als beliebige Stelle aus dem Definitionsbereich von f betrachten.

Beispiel 3.2 Leiten Sie die Funktion $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$ ab.

Berechnung der Ableitung mithilfe der Definition

Lösung Wir verwenden die Definition der Ableitung. Dazu müssen wir zunächst $f(x + h)$ berechnen und dann $f(x)$ vom Ergebnis subtrahieren, um den Zähler im Differenzenquotienten zu erhalten. Es ist

$$f(x) = \frac{x}{x-1} \quad \text{und} \quad f(x+h) = \frac{(x+h)}{(x+h)-1}, \text{ also}$$

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} && \text{Definition}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{x+h}{x+h-1}-\dfrac{x}{x-1}}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\frac{(x+h)(x-1)-x(x+h-1)}{(x+h-1)(x-1)} && \frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-cb}{bd}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\frac{-h}{(x+h-1)(x-1)} && \text{vereinfachen}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{-1}{(x+h-1)(x-1)}=\frac{-1}{(x-1)^2}\,. && h\neq 0 \text{ kürzen}
\end{aligned}
$$

■

Schreibweisen

Es gibt viele Möglichkeiten, die Ableitung einer Funktion $y=f(x)$ zu kennzeichnen, wenn x das Funktionsargument und y der Funktionswert ist. Einige gebräuchliche Alternativschreibweisen für die Ableitung sind

$$f'(x)=y'=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)=D(f)(x)=D_xf(x)\,.$$

Die Symbole $\mathrm{d}/\mathrm{d}x$ und D kennzeichnen die Operation der Differentiation. Wir lesen $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ als „Ableitung von y nach x“ sowie $\mathrm{d}f/\mathrm{d}x$ und $(\mathrm{d}/\mathrm{d}x)f(x)$ als „Ableitung von f nach x.“ Die „Strich-Schreibweisen“ y' und f' gehen auf die Newton'sche Schreibweise zurück. Die Schreibweisen mit $\mathrm{d}/\mathrm{d}x$ ähneln denen, die Leibniz verwendete. Das Symbol $\mathrm{d}/\mathrm{d}x$ sollte man nicht als Quotient auffassen.

Um den Wert einer Ableitung an einer bestimmten Stelle $x=a$ zu bezeichnen, verwenden wir die Schreibweise

$$f'(a)=\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=a}=\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_{x=a}=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)\right|_{x=a}.$$

Grafische Darstellung der Ableitung

Oft können wir eine angemessene grafische Darstellung der Ableitung von $y=f(x)$ gewinnen, indem wir die Steigungen am Graphen von f abschätzen. Wir zeichnen also Punkte $(x, f'(x))$ in die xy-Ebene ein und verbinden sie durch eine glatte Kurve, die eine Näherung für $y=f'(x)$ ist.

Grafische Darstellung einer Ableitung

Beispiel 3.3 Stellen Sie die Ableitung der Funktion $y=f(x)$ aus ▶Abbildung 3.4(a) auf der nächsten Seite grafisch dar.

Lösung Wir skizzieren in kurzen Abständen Tangenten an den Graphen von f und schätzen anhand ihrer Steigungen die Werte von $f'(x)$ an diesen Stellen ab. Dann zeichnen wir die entsprechenden Punkte $(x, f'(x))$ in die xy-Ebene ein und verbinden diese Punkte durch eine glatte Kurve, wie in ▶Abbildung 3.4(b) skizziert. ■

Was können wir aus dem Graphen von $y=f'(x)$ lernen? Auf einen Blick sehen wir

1. wo die Änderungsrate von f positiv, negativ oder null ist;
2. die grobe Wachstumsrate in jedem x und ihre Größe im Verhältnis zu der von $f(x)$;
3. wo die Änderungsrate selbst wächst oder fällt.

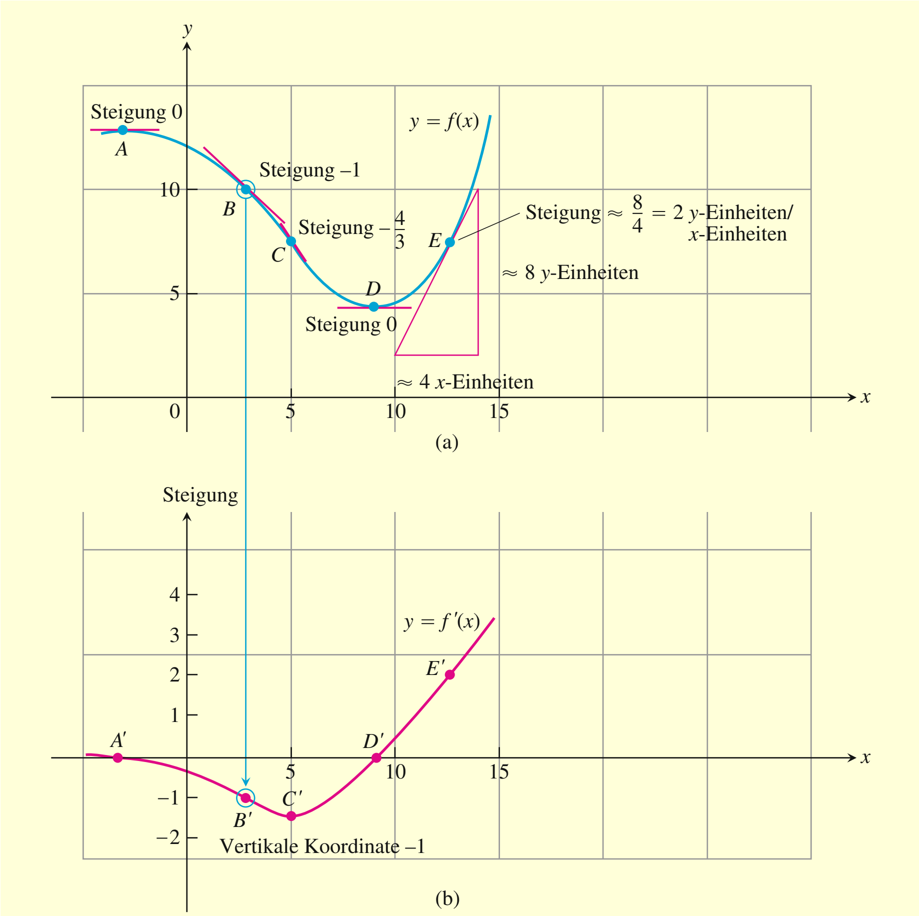


Abbildung 3.4 Wir haben den Graphen von $y = f'(x)$ in Teil (b) konstruiert, indem wir die Steigungen des Graphen von $y = f(x)$ aus Teil (a) aufgetragen haben. Die y-Koordinate von B' ist die Steigung im Punkt B usw. Teil (b) entnehmen wir, dass die Steigung von f für x zwischen A' und D' negativ ist; rechts von D' ist sie positiv.

Differenzierbarkeit über einem Intervall und einseitige Ableitungen

Eine Funktion $y = f(x)$ ist **über einem offenen** (endlichen oder unendlichen) **Intervall differenzierbar**, wenn sie in jedem Punkt des Intervalls eine Ableitung hat. Sie ist über einem **geschlossenen Intervall [*a*, *b*] differenzierbar**, wenn sie über (a, b) differenzierbar ist und die Grenzwerte

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \qquad \textbf{rechtsseitige Ableitung an der Stelle } a$$

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(b+h)-f(b)}{h} \qquad \textbf{linksseitige Ableitung an der Stelle } b$$

an den Intervallgrenzen existieren (▶Abbildung 3.5 auf der nächsten Seite).

Rechts- und linksseitige Ableitungen können an jeder Stelle des Definitionsbereichs einer Funktion definiert werden. Aus Satz 2.6 wissen wir, dass eine Funktion genau dann eine Ableitung an einer Stelle hat, wenn sie dort links- und rechtsseitige Grenzwerte besitzt und diese einseitigen Grenzwerte übereinstimmen.

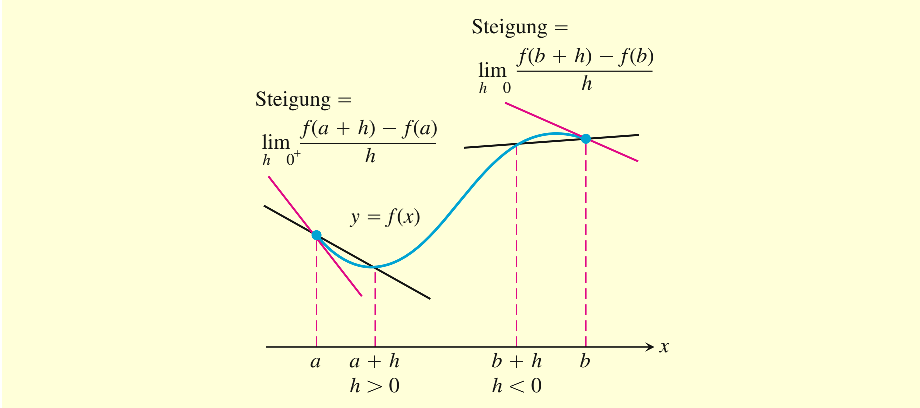


Abbildung 3.5 Die Ableitungen an den Intervallgrenzen sind einseitige Grenzwerte.

Ableitung der Betragsfunktion

Beispiel 3.4 Zeigen Sie, dass die Betragsfunktion $y = |x|$ über den beiden Intervallen $(-\infty, 0)$ und $(0, \infty)$ differenzierbar ist, an der Stelle $x = 0$ aber keine Ableitung hat.

Lösung Aus Abschnitt 3.1 wissen wir, dass die Ableitung von $y = mx + b$ die Steigung m ist. Folglich gilt rechts vom Ursprung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(|x|) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1 \cdot x) = 1 . \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(mx+b) = m, \quad |x| = x$$

Links davon gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(|x|) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(-x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(-1 \cdot x) = -1 \qquad |x| = -x$$

(▶Abbildung 3.6). Im Ursprung gibt es keine Ableitung, weil sich dort die einseitigen Ableitungen voneinander unterscheiden:

$$\begin{aligned}
\text{Rechtsseitige Ableitung von } |x| \text{ bei null} &= \lim_{h\to 0^+} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{|h|}{h} \\
&= \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} \qquad |h| = h \text{ für } h > 0 \\
&= \lim_{h\to 0^+} 1 = 1 . \\
\text{Linksseitige Ableitung von } |x| \text{ bei null} &= \lim_{h\to 0^+} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{|h|}{h} \\
&= \lim_{h\to 0^+} \frac{-h}{h} \qquad |h| = -h \text{ für } h < 0 \\
&= \lim_{h\to 0^+} -1 = -1 .
\end{aligned}$$

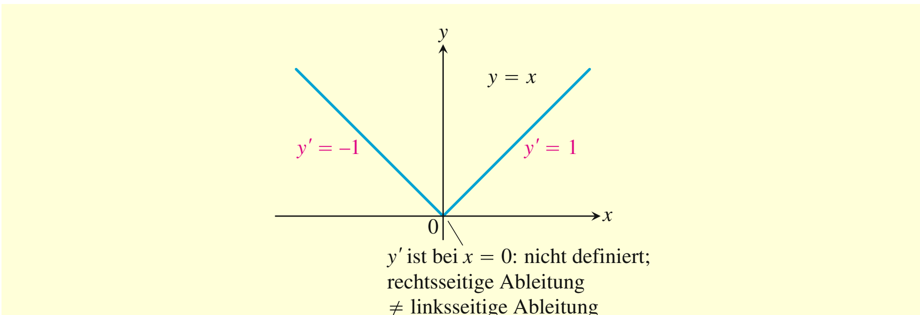
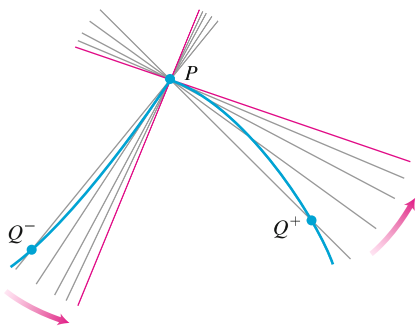


Abbildung 3.6 Die Funktion $y = |x|$ ist im Ursprung nicht differenzierbar. An dieser Stelle hat der Graph einen „Knick“ (Beispiel 3.4).

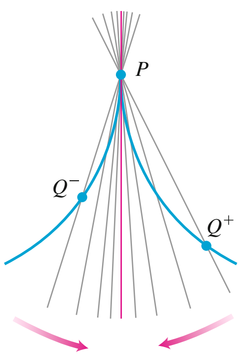
Wann hat eine Funktion in einem Punkt *keine* Ableitung?

Eine Funktion hat in einem Punkt $P(x_0, f(x_0))$ eine Ableitung, wenn die Steigungen der Sekanten durch P und einen benachbarten Punkt Q auf dem Graphen einen endlichen Grenzwert haben, wenn Q gegen P geht. Immer dann, wenn die Sekanten für Q gegen P keine Grenzlage einnehmen oder vertikal werden, existiert keine Ableitung. Die Differenzierbarkeit ist eine Forderung an die „Glattheit" des Graphen von f. Dass eine Funktion in einem Punkt keine Ableitung hat, kann viele Gründe haben. Dazu zählt die Existenz von Punkten, an denen der Graph

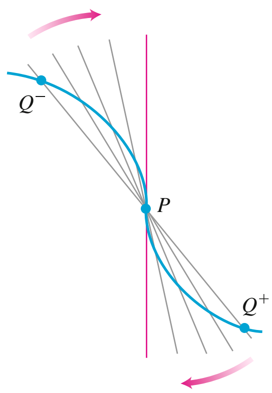
1. einen *Knick* hat, an dem sich die einseitigen Ableitungen unterscheiden.



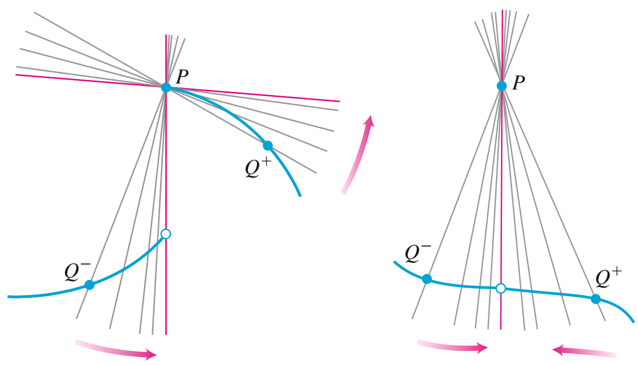
2. eine *Spitze* hat, an der die Steigung von PQ auf einer Seite gegen ∞ und auf der anderen gegen $-\infty$ geht.



3. eine *vertikale Tangente* hat, an der die Steigung von PQ von beiden Seiten gegen ∞ oder $-\infty$ geht (hier $-\infty$).



4. eine *Unstetigkeitsstelle* hat (mit zwei Beispielen).



Ein weiterer Fall, in dem die Ableitung nicht existieren kann, liegt vor, wenn die Steigung der Funktion in der Nähe von P schnell oszilliert, wie bei $f(x) = \sin(1/x)$ in der Nähe des Ursprungs, wo die Funktion unstetig ist.

Differenzierbare Funktionen sind stetig

Eine Funktion ist an jeder Stelle stetig, an der sie eine Ableitung besitzt.

Satz 3.1 Differenzierbarkeit impliziert Stetigkeit Hat f an der Stelle $x = c$ eine Ableitung, so ist f an der Stelle $x = c$ stetig.

Beweis Wir nehmen an, dass $f'(c)$ existiert. Wir müssen zeigen, dass $\lim\limits_{h \to c} f(x) = f(c)$ ist, oder äquivalent dazu, dass $\lim\limits_{h \to 0} f(c+h) = f(c)$ ist. Für $h \neq 0$ gilt

$$f(c+h) = f(c) + (f(c+h) - f(c)) = f(c) + \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \cdot h\,.$$

Nun können wir die Grenzwerte für $h \to 0$ bilden. Nach Satz 1 aus Abschnitt 2.2 ist

$$\begin{aligned}\lim_{h \to 0} f(c+h) &= \lim_{h \to 0} f(c) + \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \cdot \lim_{h \to 0} h \\ &= f(c) + f'(c) \cdot 0 \\ &= f(c) + 0 \\ &= f(c)\,.\end{aligned}$$

Ähnliche Überlegungen für einseitige Grenzwerte zeigen: Hat f eine einseitige Ableitung (links oder rechts) an der Stelle $x = c$, so ist f an der Stelle $x = c$ von dieser Seite stetig.

Satz 3.1 besagt: Hat eine Funktion in einem Punkt eine Unstetigkeit (beispielsweise einen Sprung), so kann sie dort auch nicht differenzierbar sein.

Achtung Die Umkehrung von Satz 3.1 auf der vorherigen Seite ist falsch. Eine Funktion muss an einer Stelle, an der sie stetig ist, nicht zwangsläufig eine Ableitung haben, wie wir in Beispiel 3.4 auf Seite 104 gesehen haben.

Aufgaben zum Abschnitt 3.2

Ableitungen und Ableitungsfunktionen bestimmen Bestimmen Sie mithilfe der Definition die Ableitungen der Funktionen aus den Aufgaben 1 und 2. Berechnen Sie die angegebenen Funktionswerte der Ableitungen.

1. $f(x) = 4 - x^2, \quad f'(-3), f'(0), f'(1)$

2. $g(t) = \dfrac{1}{t^2}; \quad g'(-1), g'(2), g'(\sqrt{3})$

Bestimmen Sie in den Aufgaben 3 und 4 die angegebenen Ableitungen.

3. $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ für $y = 2x^3$

4. $\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}q}$ für $p = \dfrac{1}{\sqrt{q+1}}$

Steigungen und Tangenten Leiten Sie die Funktionen aus den Aufgaben 5 und 6 ab, und bestimmen Sie die Steigung der Tangente für den angegebenen Wert des Funktionsarguments.

5. $f(x) = x + \dfrac{9}{x}, x = -3$

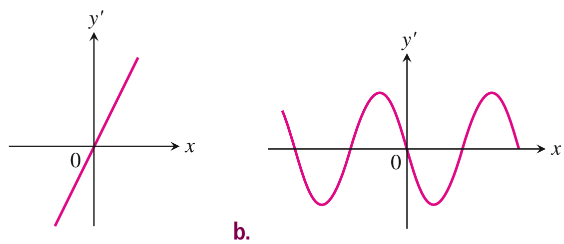
6. $s = t^3 - t^2, t = -1$

Bestimmen Sie in den Aufgaben 7 und 8 die Werte der Ableitungen.

7. $\left.\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right|_{t=-1}$ für $s = 1 - 3t^2$

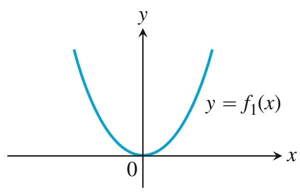
8. $\left.\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right|_{\theta=0}$ für $r = \dfrac{2}{\sqrt{4-\theta}}$

Grafische Darstellungen Ordnen Sie den Graphen aus den Aufgaben 9 und 10 die Ableitungen aus den beiden Abbildungen (a) und (b) zu.

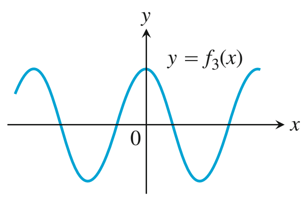


a. **b.**

9.



10.



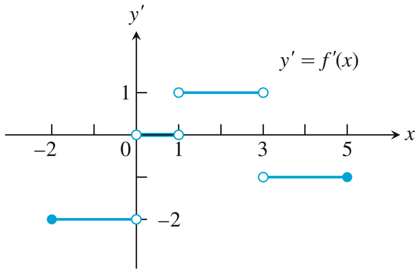
11. Konstruktion einer Funktion aus ihrer Ableitung

a. Verwenden Sie die folgenden Informationen über den Graphen der Funktion f über dem abgeschlossenen Intervall $[-2, 5]$.

i. Der Graph von f besteht aus aneinandergereihten Geradenabschnitten.

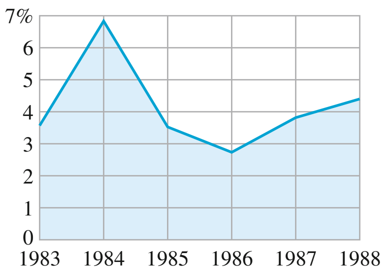
ii. Der Graph beginnt bei $(-2, 3)$.

iii. Die Ableitung von f ist die Stufenfunktion aus der nachfolgenden Abbildung.

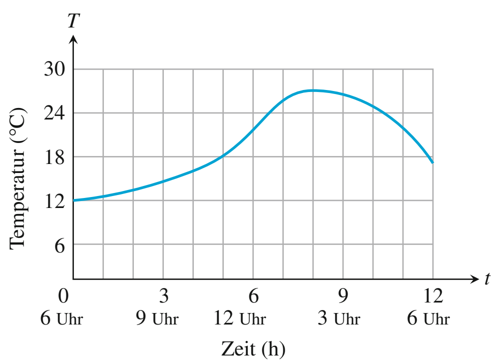


b. Wiederholen Sie die Teilaufgabe (a) unter der Annahme, dass der Graph nicht bei $(-2, 3)$, sondern bei $(-2, 0)$ beginnt.

12. Wirtschaftswachstum Der Graph aus der nachfolgenden Abbildung zeigt die Veränderung des Bruttonationaleinkommens (früher als Bruttosozialprodukt bezeichnet) der USA gegenüber dem Vorjahr $y = f(t)$ für die Jahre 1983–1988. Stellen Sie $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t$, wo definiert, grafisch dar.



13. Temperatur Der gegebene Graph zeigt die Temperatur in °C in Davis, CA, am 18. April 2008 zwischen 6 und 18 Uhr.



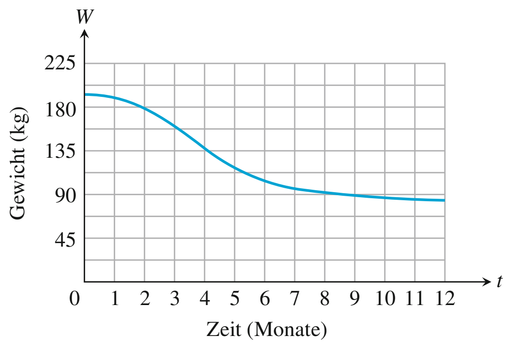
a. Schätzen Sie die Temperaturänderungsrate zu den folgenden Zeiten ab:

i. 7 Uhr ii. 9 Uhr iii. 14 Uhr iv. 16 Uhr

b. Wann steigt die Temperatur am schnellsten? Wann sinkt sie am schnellsten? Wie groß ist die Änderungsrate für die beiden Zeitpunkte?

c. Verwenden Sie das grafische Verfahren aus Beispiel 3.3 auf Seite 102, um die Ableitung der Temperatur T über der Zeit t aufzutragen.

14. Gewichtsverlust Jared Fogle, bekannt als der „Subway Guy“, wog 1997 rund 193 kg, bevor er in 12 Monaten mehr als 109 kg Körpergewicht verlor (`en.wikipedia.org/wiki/Jared_Fogle`). Die nachfolgende Abbildung zeigt ein Diagramm über den möglichen Verlauf seines Gewichtsverlusts.



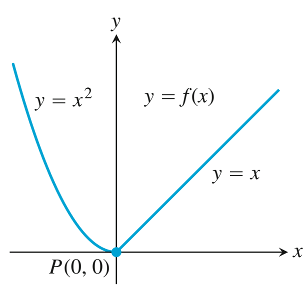
a. Schätzen Sie Jared Fogles Gewichtsverlust zur Zeit (in Monaten)

i. $t = 1$ ii. $t = 4$ iii. $t = 11$

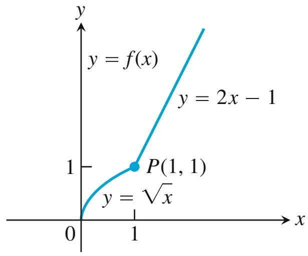
b. Wann verlor Jared am schnellsten Gewicht? Was war die Rate des Gewichtsverlusts?

c. Skizzieren Sie mithilfe des grafischen Verfahrens aus Beispiel 3.3 auf Seite 102 die Ableitung des Gewichts W.

Einseitige Ableitungen Berechnen Sie die rechtsseitigen und linksseitigen Ableitungen als Grenzwerte, um zu zeigen, dass die Funktionen aus den Aufgaben 15 und 16 im Punkt P nicht differenzierbar sind.



15.

16. 

Entscheiden Sie, ob die stückweise definierte Funktion aus Aufgabe 17 im Ursprung differenzierbar ist.

17. $f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & x \geq 0 \\ x^2 + 2x, & x < 0 \end{cases}$

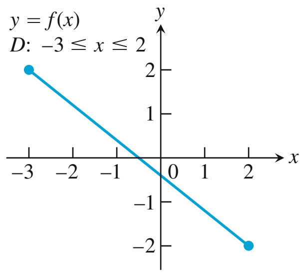
Differenzierbarkeit und Stetigkeit über einem Intervall Jede Abbildung aus den Aufgaben 18–20 zeigt den Graphen einer Funktion über einem abgeschlossenen Intervall D. Auf welchem Definitionsbereich scheint die Funktion

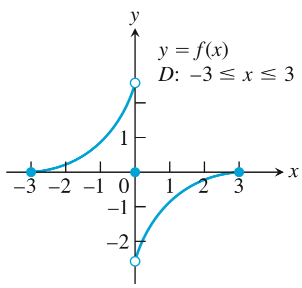
a. differenzierbar

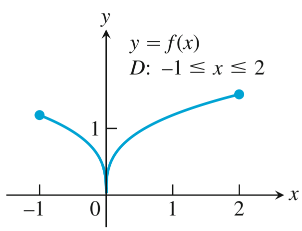
b. stetig, aber nicht differenzierbar

c. weder stetig noch differenzierbar

zu sein? Begründen Sie Ihre Antworten.

18. 

19. 

20. 

Theorie und Beispiele Führen Sie für die Funktionen aus den Aufgaben 21 und 22 die folgenden Arbeitsschritte aus:

a. Bestimmen Sie die Ableitung $f'(x)$ der gegebenen Funktion $y = f(x)$.

b. Stellen Sie $y = f(x)$ und $y = f'(x)$ in getrennten Koordinatensystemen nebeneinander grafisch dar, und beantworten Sie folgende Fragen.

c. Für welche Werte von x ist die Ableitung f' positiv, null oder negativ?

d. Über welchen Intervallen von x wächst die Funktion $y = f(x)$ mit wachsendem x? Wo fällt sie? Wie hängt dies mit Ihren Aussagen aus Teil **c.** zusammen? (Diesen Zusammenhang werden wir in Abschnitt 4.3 ausführlicher diskutieren.)

21. $y = -x^2$ 22. $y = x^3/3$

23. **Tangente an eine Parabel** Hat die Parabel $y = 2x^2 - 13x + 5$ eine Tangente mit der Steigung -1? Wenn ja, dann bestimmen Sie die Geradengleichung und eine Gleichung für den Berührungspunkt. Wenn nein, begründen Sie Ihre Antwort.

24. **Tangente an $\sqrt{x}$** Gibt es eine Tangente an die Kurve $y = \sqrt{x}$, die die x-Achse an der Stelle $x = -1$ schneidet? Wenn ja, dann bestimmen Sie die Geradengleichung und eine Gleichung für den Berührungspunkt. Wenn nein, warum nicht?

25. Stellen Sie die Funktion $y = 1/(2\sqrt{x})$ in einem Fenster mit $0 \leq x \leq 2$ grafisch dar. Stellen Sie dann in demselben Fenster die Funktion

$$y = \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$$

für $h = 1$, 0,5, 0,1 grafisch dar. Probieren Sie anschließend die Werte -1, $-0{,}5$, $-0{,}1$. Erläutern Sie Ihre Beobachtungen.

26. **Ableitung von $y = |x|$** Stellen Sie die Ableitung von $f(x) = |x|$ grafisch dar. Stellen Sie dann $y = (|x| - 0)/(x - 0) = |x|/x$ dar. Was können Sie daraus schlussfolgern?

27. **Die an keiner Stelle differenzierbare stetige Weierstraß-Funktion $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (2/3)^n \cos(9^n \pi x)$** Die Summe der ersten acht Terme ist

$$\begin{aligned} g(x) = &\cos(\pi x) + (2/3)^1 \cos(9\pi x) \\ &+ (2/3)^2 \cos(9^2\pi x) + (2/3)^3 \cos(9^3\pi x) \\ &+ \cdots (2/3)^7 \cos(9^7\pi x)\,. \end{aligned}$$

Stellen Sie diese Summe grafisch dar. Vergrößern Sie einen Ausschnitt mehrfach. Wie „holprig“ ist dieser Graph? Legen Sie einen Fensterausschnitt fest, in dem der angezeigte Teil des Graphen glatt ist.

3.3 Differentiationsregeln

In diesem Abschnitt führen wir einige Regeln ein, mit deren Hilfe wir konstante Funktionen, Potenzfunktionen, Polynome, rationale Funktionen und bestimmte Kombinationen einfach und direkt ableiten können, ohne jedesmal die Grenzwerte bilden zu müssen.

Potenzen, Vielfache, Summen und Differenzen

Eine einfache Differentiationsregel besagt, dass die Ableitung jeder konstanten Funktion null ist.

Ableitung einer konstanten Funktion Hat f den konstanten Wert $f(x) = c$, so ist

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(c) = 0\,.$$

Merke

Aus Abschnitt 3.1 wissen wir

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2} \quad \text{oder} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^{-1}\right) = -x^{-2}\,.$$

Das Beispiel illustriert eine allgemeine Regel für die Ableitung einer Potenz x^n.Wenn wir die Potenzregel anwenden, subtrahieren wir vom ursprünglichen Exponenten n die Zahl 1 und multiplizieren den so erhaltenen Term mit n. Wir geben nun die allgemeine Version der Regel an.

Potenzregel (allgemeine Version) Für beliebige reelle Zahlen n gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^n = nx^{n-1}$$

für alle x, für die die Potenzen x^n und x^{n-1} definiert sind.

Merke

Beispiel 3.5 Leiten Sie die folgenden Potenzen nach x ab.

Ableitung von Potenzfunktionen

a x^3 b $x^{2/3}$ c $x^{\sqrt{x}}$ d $\frac{1}{x^4}$ e $x^{-4/3}$ f $\sqrt{x^{2+\pi}}$

Lösung

a $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^3) = 3x^{3-1} = 3x^2$

b $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^{2/3}) = \frac{2}{3}x^{(2/3)-1} = \frac{2}{3}x^{-1/3}$

c $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}x^{\sqrt{2}-1}$

d $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^{-4}) = -4x^{-4-1} = -4x^{-5} = -\frac{4}{x^5}$

e $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^{-4/3}\right) = -\frac{4}{3}x^{-(4/3)-1} = -\frac{4}{3}x^{-7/3}$

f $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sqrt{x^{2+\pi}}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^{1+(\pi/2)}\right) = \left(1+\frac{\pi}{2}\right)x^{1+(\pi/2)-1} = \frac{1}{2}(2+\pi)\sqrt{x^\pi}$ ■

Die nächste Regel besagt: Multipliziert man eine differenzierbare Funktion mit einer Konstanten, so wird ihre Ableitung mit derselben Konstanten multipliziert.

Merke

Faktorregel Ist u eine differenzierbare Funktion von x und c eine Konstante, so gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(cu) = c\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\,.$$

Ist n eine beliebige reelle Zahl, so gilt insbesondere

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(cx^n) = cnx^{n-1}\,.$$

Beweis

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}cu &= \lim_{h\to 0}\frac{cu(x+h)-cu(x)}{h} && \text{Definition der Ableitung mit } f(x)=cu(x)\\
&= c\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)-u(x)}{h} && \text{Grenzwertsatz für Faktoren}\\
&= c\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} && u \text{ ist differenzierbar}
\end{aligned}$$

Einfluss von konstanten Faktoren auf die Ableitung

Beispiel 3.6

a Die Differentiationsformel

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(3x^2) = 3\cdot 2x = 6x$$

besagt: Strecken wir den Graphen von $y = x^2$, indem wir die y-Koordinate mit 3 multiplizieren, so verdreifacht sich auch die Steigung in jedem Punkt (▶Abbildung 3.7 auf der nächsten Seite).

b **Das Negative einer Funktion** Die Ableitung des Negativen einer differenzierbaren Funktion u ist das Negative der Ableitungsfunktion u'. Die Faktorregel mit $c = -1$ liefert

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(-u) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(-1\cdot u) = -1\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(u) = -\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\,.$$

Funktionen *u* und *v* Die Funktionen in den Differentiationsformeln haben wir vorzugsweise mit den Buchstaben f und g bezeichnet. Da wir in den allgemeinen Differentiationsregeln nicht auf dieselben Buchstaben zurückgreifen wollen, nutzen wir stattdessen die noch freien Buchstaben u und v.

Die nächste Regel besagt, dass die Ableitung der Summe zweier differenzierbarer Funktionen die Summe ihrer Ableitungen ist.

Merke

Summenregel Sind u und v differenzierbare Funktionen von x, so ist ihre Summe $u+v$ an jeder Stelle differenzierbar, an der sowohl u als auch v differenzierbar sind. An diesen Stellen gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(u+v) = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\,.$$

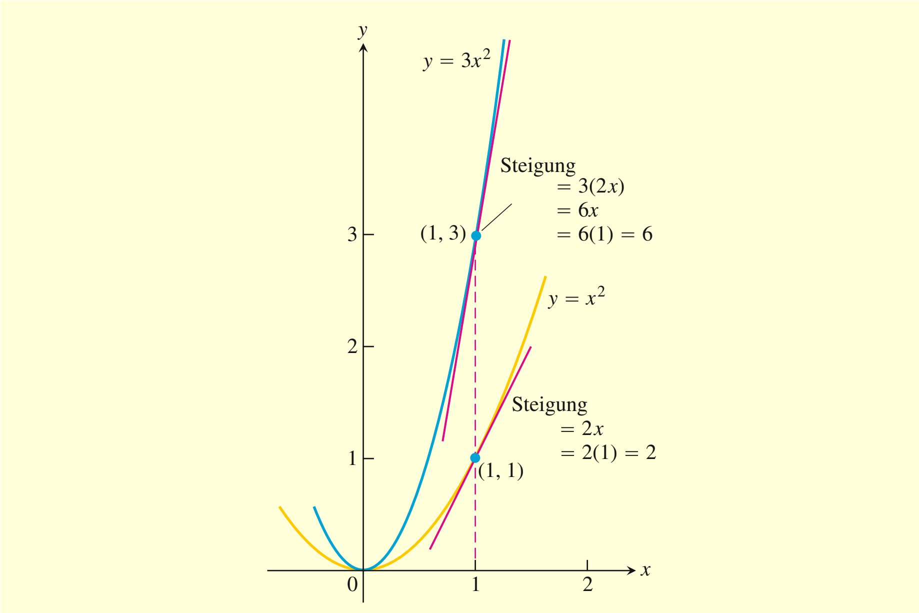


Abbildung 3.7 Die Graphen der Funktionen $y = x^2$ und $y = 3x^2$. Die Verdreifachung der y-Koordinate verdreifacht die Steigung (Beispiel 3.6).

Betrachten wir zum Beispiel die Funktion $y = x^4 + 12x$. Dann ist y die Summe von $u(x) = x^4$ und $v(x) = 12x$. Es gilt

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^4) + \frac{d}{dx}(12x) = 4x^3 + 12\,.$$

Beweis Wir wenden die Definition der Ableitung auf $f(x) = u(x) + v(x)$ an:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[u(x)+v(x)] &= \lim_{h\to 0}\frac{[u(x+h)+v(x+h)]-[u(x)+v(x)]}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\left[\frac{u(x+h)-u(x)}{h}+\frac{v(x+h)-v(x)}{h}\right]\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)-u(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{v(x+h)-v(x)}{h} = \frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}\,.\end{aligned}$$

Die Kombination der Summenregel mit der Faktorregel ergibt die **Differenzenregel**, der zufolge die Ableitung einer *Differenz* differenzierbarer Funktionen die Differenz ihrer Ableitungen ist:

$$\frac{d}{dx}(u-v) = \frac{d}{dx}[u+(-1)v] = \frac{du}{dx} + (-1)\frac{dv}{dx} = \frac{du}{dx} - \frac{dv}{dx}\,.$$

Die Summenregel lässt sich auch auf endliche Summen von mehr als zwei Funktionen übertragen. Sind die Funktionen $u_1, u_2, \ldots, u_n$ an der Stelle x differenzierbar, so ist dort auch $u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ differenzierbar, und es gilt

$$\frac{d}{dx}(u_1 + u_2 + \cdots + u_n) = \frac{du_1}{dx} + \frac{du_2}{dx} + \cdots + \frac{du_n}{dx}\,.$$

Um uns zum Beispiel davon zu überzeugen, dass die Regel für drei Funktionen gilt, berechnen wir

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(u_1+u_2+u_3) = \frac{d}{dx}((u_1+u_2)+u_3) &= \frac{d}{dx}(u_1+u_2) + \frac{du_3}{dx}\\ &= \frac{du_1}{dx} + \frac{du_2}{dx} + \frac{du_3}{dx}\,.\end{aligned}$$

Ableitung eines Polynoms

Beispiel 3.7 Bestimmen Sie die Ableitung des Polynoms $y = x^3 + \frac{4}{3}x^2 - 5x + 1$.

Lösung

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}x^3 + \frac{d}{dx}\left(\frac{4}{3}x^2\right) - \frac{d}{dx}(5x) + \frac{d}{dx}(1) \qquad \text{Summen- und Differenzenregel} \\ &= 3x^2 + \frac{4}{3}\cdot 2x - 5 + 0 = 3x^2 + \frac{8}{3}x - 5 \end{aligned}$$

Wir können jedes Polynom gliedweise differenzieren wie das Polynom aus Beispiel 3.7. Alle Polynome sind in jedem Punkt x differenzierbar.

Bestimmung von horizontalen Tangenten

Beispiel 3.8 Hat die Kurve $y = x^4 - 2x^2 + 2$ horizontale Tangenten? Wenn ja, wo?

Lösung Wenn es horizontale Tangenten gibt, so liegen sie dort, wo die Steigung dy/dx null ist. Es gilt

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^4 - 2x^2 + 2) = 4x^3 - 4x\,.$$

Nun lösen wir die Gleichung $\frac{dy}{dx} = 0$ nach x auf:

$$\begin{aligned} 4x^3 - 4x &= 0 \\ 4x(x^2 - 1) &= 0 \\ x &= 0, 1, -1\,. \end{aligned}$$

Die Kurve $y = x^4 - 2x^2 + 2$ hat an den Stellen $x = 0$, 1 und -1 horizontale Tangenten (►Abbildung 3.8). Die entsprechenden Punkte auf der Kurve sind $(0, 2)$, $(1, 1)$ und $(-1, 1)$. In Kapitel 4 werden wir sehen, dass die Suche nach Stellen x, an denen die Ableitung der Funktion null ist, zu wichtigen und nützlichen Aussagen führt.

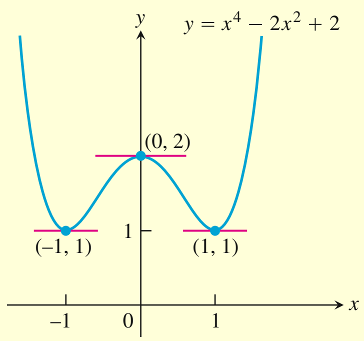


Abbildung 3.8 Die Kurve aus Beispiel 3.8 und ihre horizontalen Tangenten.

Produkte und Quotienten

Während die Ableitung der Summe zweier Funktionen die Summe ihrer Ableitungen ist, ist die Ableitung des Produkts zweier Funktionen *nicht* das Produkt ihrer Ableitungen. Zum Beispiel ist

$$\frac{d}{dx}(x \cdot x) = \frac{d}{dx}(x^2) = 2x, \quad \text{aber} \quad \frac{d}{dx}(x) \cdot \frac{d}{dx}(x) = 1 \cdot 1 = 1\,.$$

Die Ableitung eines Produktes zweier Funktionen ist die Summe *zweier* Produkte, wie wir nun erläutern werden.

Produktregel Sind u und v in x differenzierbar, so ist ihr Produkt uv differenzierbar, und es gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(uv) = u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\,.$$

Merke

Die Ableitung des Produktes uv ist u mal die Ableitung von v plus v mal die Ableitung von u. In *Strich-Schreibweise* ist das $(uv)' = uv' + vu'$. In Funktionenschreibweise:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[f(x)g(x)] = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)\,.$$

Beispiel 3.9 Bestimmen Sie die Ableitung von $y = (x^2+1)(x^3+3)$.

Ableitung eines Produkts von Funktionen

Lösung

a Aus der Produktregel mit $u = x^2+1$ und $v = x^3+3$ erhalten wir

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[(x^2+1)(x^3+3)] &= (x^2+1)(3x^2) + (x^3+3)(2x) \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(uv) = u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\\ &= 3x^4 + 3x^2 + 2x^4 + 6x\\ &= 5x^4 + 3x^2 + 6x\,.\end{aligned}$$

b Dieses spezielle Produkt kann auch (vielleicht sogar vorteilhafter) abgeleitet werden, indem man den ursprünglichen Ausdruck ausmultipliziert und das resultierende Polynom ableitet:

$$\begin{aligned}y &= (x^2+1)(x^3+3) = x^5 + x^3 + 3x^2 + 3\\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= 5x^4 + 3x^2 + 6x\,.\end{aligned}$$

Dieses Ergebnis stimmt mit unserer ersten Berechnung überein. ■

Beweis der Produktregel

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(uv) &= \lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)v(x+h) - u(x+h)v(x) + u(x+h)v(x) - u(x)v(x)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\left[u(x+h)\frac{v(x+h)-v(x)}{h} + v(x)\frac{u(x+h)-u(x)}{h}\right]\\ &= \lim_{h\to 0} u(x+h)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{v(x+h)-v(x)}{h} + v(x)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)-u(x)}{h}\,.\end{aligned}$$

Wenn h gegen null geht, geht $u(x+h)$ gegen $u(x)$, denn u ist an der Stelle x differenzierbar und somit auch stetig. Die beiden Brüche gehen gegen die Werte von $\mathrm{d}v/\mathrm{d}x$ an der Stelle x und $\mathrm{d}u/\mathrm{d}x$ an der Stelle x. In Kurzform:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(uv) = u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\,.$$

■

Für die Ableitung des Quotienten zweier Funktionen gilt die Quotientenregel.

Merke

Quotientenregel Sind u und v in x differenzierbar und ist $v(x) \neq 0$, so ist der Quotient u/v an der Stelle x differenzierbar, und es gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} - u\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}}{v^2}.$$

In Funktionenschreibweise heißt das

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

Ableitung eines Quotienten von Funktionen

Beispiel 3.10 Bestimmen Sie die Ableitung von $y = \dfrac{t^2-1}{t^3+1}$.

Lösung Wir wenden die Quotientenregel mit $u = t^2 - 1$ und $v = t^3 + 1$ an:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= \frac{(t^3+1)\cdot 2t - (t^2-1)\cdot 3t^2}{(t^3+1)^2} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v(\mathrm{d}u/\mathrm{d}t) - u(\mathrm{d}v/\mathrm{d}t)}{v^2}\\ &= \frac{2t^4 + 2t - 3t^4 + 3t^2}{(t^3+1)^2}\\ &= \frac{-t^4 + 3t^2 + 2t}{(t^3+1)^2}\end{aligned}$$

Beweis **der Quotientenregel**

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{u}{v}\right) &= \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{u(x+h)}{v(x+h)} - \dfrac{u(x)}{v(x)}}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{v(x)u(x+h) - u(x)v(x+h)}{hv(x+h)v(x)}\end{aligned}$$

Um aus dem letzten Bruch einen äquivalenten Bruch zu machen, der die Differenzenquotienten für die Ableitungen von u und v enthält, subtrahieren und addieren wir $v(x)u(x)$ im Zähler. Damit haben wir

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{u}{v}\right) &= \lim_{h\to 0}\frac{v(x)u(x+h) - v(x)u(x) + v(x)u(x) - u(x)v(x+h)}{hv(x+h)v(x)}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{v(x)\dfrac{u(x+h)-u(x)}{h} - u(x)\dfrac{v(x+h)-v(x)}{h}}{v(x+h)v(x)}.\end{aligned}$$

Bilden wir jetzt in Zähler und Nenner die Grenzwerte, so erhalten wir die Quotientenregel.

Für welche Regel wir uns bei der Lösung eines Ableitungsproblems entscheiden, kann sich erheblich auf den Aufwand auswirken, den uns die Ableitung kostet. Hier folgt ein Beispiel.

Beispiel 3.11 Anstatt zur Ableitung von

Umgehung der Quotientenregel

$$y = \frac{(x-1)(x^2-2x)}{x^4}$$

die Quotientenregel zu verwenden (das würde viel Rechenaufwand bedeuten), multiplizieren wir den Zähler aus und dividieren durch x^4:

$$y = \frac{(x-1)(x^2-2x)}{x^4} = \frac{x^3-3x^2+2x}{x^4} = x^{-1} + 3x^{-2} + 2x^{-3}\,.$$

Dann verwenden wir die Summenregel und die Potenzregel:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= -x^{-2} - 3(-2)x^{-3} + 2(-3)x^{-4}\\ &= -\frac{1}{x^2} + \frac{6}{x^3} - \frac{6}{x^4}\,.\end{aligned}$$

Zweite und höhere Ableitungen

Ist $y = f(x)$ eine differenzierbare Funktion, so ist ihre Ableitung $f'(x)$ auch eine Funktion. Ist f' ebenfalls differenzierbar, so können wir f' ableiten. Dadurch erhalten wir eine neue Funktion, die wir mit f'' bezeichnen. Also ist $f'' = (f')'$. Die Funktion f'' heißt **zweite Ableitung** von f, weil sie die Ableitung der ersten Ableitung ist. Auch für die zweite Ableitung gibt es verschiedene Schreibweisen:

$$f'' = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x} = y'' = D^2(f)(x) = D_x^2 f(x)\,.$$

Das Symbol D^2 bedeutet, dass die Ableitungsoperation zweimal ausgeführt wird.

Für $y = x^6$ ist $y' = 6x^5$, und es gilt

$$y'' = \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(6x^5) = 30x^4\,.$$

Folglich ist $D^2(x^6) = 30x^4$.

Ist die Funktion y'' differenzierbar, so ist ihre Ableitung $y''' = \mathrm{d}y''/\mathrm{d}x = \mathrm{d}^3y/\mathrm{d}x^3$ die **dritte Ableitung** von y nach x. Die Bezeichnungen setzen sich entsprechend fort, wobei wir für alle positiven ganzen Zahlen n den Ausdruck

$$y^{(n)} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y^{(n-1)} = \frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n} = D^n y$$

als die ***n*-te Ableitung** von y nach x bezeichnen.

Sprechweisen

y'	„y Strich“
y''	„y zwei Strich“
$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$	„d Quadrat y nach dx Quadrat“
y'''	„y drei Strich“
$y^{(n)}$	„y n Strich“
$\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}$	„d hoch n von y nach dx hoch n“
D^n	„D hoch n“

Die zweite Ableitung können wir als Änderungsrate der Steigung der Tangente des Graphen $y = f(x)$ in jedem Punkt betrachten. Im nächsten Kapitel werden Sie feststellen, dass die zweite Ableitung Aufschluss darüber gibt, ob sich der Graph nach oben oder nach unten krümmt, wenn wir uns vom Berührungspunkt entfernen. Im nächsten Abschnitt interpretieren wir die zweite und die dritte Ableitung in Bezug auf eine geradlinige Bewegung.

Beispiel 3.12 Die ersten vier Ableitungen der Funktion $y = x^3 - 2x^2 + 2$ sind

Höhere Ableitungen

1. Ableitung: $y' = 3x^2 - 6x$
2. Ableitung: $y'' = 6x - 6$
3. Ableitung: $y''' = 6$
4. Ableitung: $y^{(4)} = 0\,.$

Die Funktion hat Ableitungen beliebiger Ordnung. Allerdings sind die 5. Ableitung und alle höheren Ableitungen null.

Aufgaben zum Abschnitt 3.3

Berechnung von Ableitungen

Berechnen Sie die 1. und die 2. Ableitung der Funktionen aus den Aufgaben 1 – 3.

1. $y = -x^2 + 3$ **2.** $s = 5t^3 - 3t^5$ **3.** $y = \dfrac{4x^3}{3} - x$

Bestimmen Sie y' in den Aufgaben 4 und 5

a. durch Anwendung der Produktregel und

b. durch Ausmultiplizieren der Produkte, was eine Summe einfacher abzuleitender Terme ergibt.

4. $y = (3 - x^2)(x^3)(x^3 - x + 1)$

5. $r = (x^2 + 1)(x + 5 + \frac{1}{5})$

Bestimmen Sie die Ableitungen der Funktionen aus den Aufgaben 6 – 9.

6. $y(x) = \dfrac{2x + 5}{3x - 2}$ **7.** $g(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x + 0{,}5}$

8. $v(t) = (1 - t)(1 + t^2)^{-1}$ **9.** $f(s) = \dfrac{\sqrt{s} - 1}{\sqrt{s} + 1}$

Bestimmen Sie die Ableitungen aller Ordnungen der Funktionen aus den Aufgaben 10 und 11.

10. $y(x) = \dfrac{x^4}{2} - \dfrac{3}{2}x^2 - x$

11. $y(x) = (x - 1)(x^2 + 3x - 5)$

Bestimmen Sie die 1. und die 2. Ableitung der Funktionen aus den Aufgaben 12 und 13.

12. $y(x) = \dfrac{x^3 + 7}{x}$ **13.** $r(\theta) = \dfrac{(\theta - 1)(\theta^2 + \theta + 1)}{\theta^3}$

14. Seien u und v Funktionen in x, die an der Stelle $x = 0$ differenzierbar sind und für die gilt

$$u(0) = 5, \quad u'(0) = -3, \quad v(0) = -1, \quad v'(0) = 2\,.$$

Bestimmen Sie die Werte der folgenden Ableitungen an der Stelle $x = 0$.

a. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(uv)$ **b.** $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{u}{v}\right)$ **c.** $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{v}{u}\right)$ **d.** $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(7v - 2u)$

Steigungen und Tangenten

15. **a. Normale an eine Kurve** Bestimmen Sie eine Gleichung für die Gerade, die senkrecht auf der Tangente an die Kurve $y = x^3 - 4x + 1$ im Punkt $(2, 1)$ steht.

b. Kleinste Steigung Was ist die kleinste Steigung einer Tangente an die Kurve? In welchem Kurvenpunkt hat die Kurve diese Steigung?

c. Tangenten mit einer bestimmten Steigung Bestimmen Sie Gleichungen von Tangenten an die Kurve in genau den Punkten, in denen die Kurve eine Steigung von 8 hat.

16. **a. Horizontale Tangenten** Bestimmen Sie Gleichungen für die horizontalen Tangenten an die Kurve $y = x^3 - 3x - 2$. Bestimmen Sie auch Gleichungen für die Geraden, die in den Berührungspunkten senkrecht auf diesen Tangenten stehen.

b. Kleinste Steigung Was ist die kleinste Steigung der Kurve? In welchem Punkt hat die Kurve diese Steigung? Bestimmen Sie eine Gleichung für die Gerade, die senkrecht auf der Tangente an die Kurve in diesem Punkt steht.

Theorie und Beispiele

Bestimmen Sie den Grenzwert aus Aufgabe 17, indem Sie ihn zuvor in eine Ableitung an einer bestimmten Stelle x verwandeln.

17. $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{x^{50} - 1}{x - 1}$

18. Bestimmen Sie den Wert von a, der die folgende Funktion für alle x-Werte differenzierbar macht:

$$f(x) = \begin{cases} ax, & \text{für } x < 0 \\ x^2 - 3x, & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$$

19. Das allgemeine Polynom n-ten Grades hat die Form $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ mit $a_n \neq 0$. Bestimmen Sie $P'(x)$.

20. Wir nehmen an, dass die Funktion v in der Produktregel eine Konstante c ist. Wie lautet dann die Produktregel? Was sagt dies über die Faktorregel?

21. **Reziprokenregel**

a. Die *Reziprokenregel* besagt, dass in jedem Punkt, in dem die Funktion $v(x)$ differenzierbar und von null verschieden ist,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{v}\right) = -\frac{1}{v^2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

gilt. Zeigen Sie, dass die Reziprokenregel ein Spezialfall der Quotientenregel ist.

b. Zeigen Sie, dass sich aus der Reziprokenregel und der Produktregel die Quotientenregel ergibt.

3.4 Die Ableitung als Änderungsrate

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit Anwendungen, in denen die Änderungsraten gewisser Größen durch Ableitungen gegeben sind. Es ist naheliegend, dabei an eine Größe zu denken, die sich in Abhängigkeit von der Zeit ändert. Andere Variablen können aber genauso behandelt werden.

Momentane Änderungsraten

Interpretieren wir den Differenzenquotienten $(f(x+h)-f(x))/h$ als die mittlere Änderungsrate von f über dem Intervall von x bis $x+h$, so können wir seinen Grenzwert für $h \to 0$ als die Rate interpretieren, mit der sich f im Punkt x ändert.

Definition

Die **momentane Änderungsrate** von f bezüglich x an der Stelle x_0 ist die Ableitung

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h},$$

vorausgesetzt, der Grenzwert existiert.

Momentane Änderungsraten sind also Grenzwerte mittlerer Änderungsraten.

Per Konvention verwenden wir das Wort *momentan* auch dann, wenn x nicht für die Zeit steht. Oft wird dieses Wort auch weggelassen. Wenn wir von einer *Änderungsrate* sprechen, meinen wir die *momentane Änderungsrate*.

Änderungsrate der Kreisfläche

Beispiel 3.13 Der Flächeninhalt A eines Kreises hängt folgendermaßen von seinem Durchmesser D ab:

$$A = \frac{\pi}{4} D^2 .$$

Wie schnell ändert sich der Flächeninhalt in Abhängigkeit vom Durchmesser, wenn der Durchmesser 10 m ist?

Lösung Die Änderungsrate des Flächeninhalts in Abhängigkeit vom Durchmesser ist

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}D} = \frac{\pi}{4} \cdot 2D = \frac{\pi D}{2} .$$

Ist $D = 10$ m, so ändert sich der Flächeninhalt in Abhängigkeit vom Durchmesser mit einer Rate von $(\pi/2)10\ \mathrm{m}^2/\mathrm{m} = 5\pi\ \mathrm{m}^2/\mathrm{m} \approx 15{,}71\ \mathrm{m}^2/\mathrm{m}$. ■

Geradlinige Bewegung: Verschiebung, Geschwindigkeit, Beschleunigung und Ruck

Wir nehmen an, dass sich ein Körper entlang einer in der Regel horizontalen oder vertikalen Koordinatenachse (der s-Achse) bewegt, sodass uns sein Ort s auf der Geraden als Funktion der Zeit bekannt ist:

$$s = f(t) .$$

Die **Verschiebung** des Körpers über dem Zeitintervall von t bis $t+\Delta t$ (▶Abbildung 3.9 auf der nächsten Seite) ist

$$\Delta s = f(t+\Delta t) - f(t) ,$$

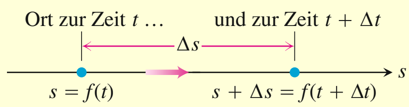


Abbildung 3.9 Der Ort eines Körpers, der sich entlang einer Koordinatenachse bewegt, zur Zeit t und zur Zeit $t + \Delta t$. Hier ist die Koordinatenachse horizontal.

und die **mittlere Geschwindigkeit** des Körpers über diesem Zeitintervall ist

$$v_m = \frac{\text{Verschiebung}}{\text{Bewegungszeit}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} .$$

Um die Geschwindigkeit zu einem festen Zeitpunkt t zu bestimmen, bilden wir den Grenzwert der mittleren Geschwindigkeit über dem Intervall von t bis $t + \Delta t$ für $\Delta t \to 0$. Dieser Grenzwert ist die Ableitung von f nach t.

Definition Die **Geschwindigkeit (Momentangeschwindigkeit)** ist die Ableitung des Ortes nach der Zeit. Ist der Ort des Körpers zur Zeit t gleich $s = f(t)$, so ist die Geschwindigkeit des Körpers zur Zeit t

$$v(t) = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} .$$

Die Geschwindigkeit gibt nicht nur an, wie schnell sich ein Körper entlang der horizontalen Achse bewegt (Abbildung 3.9), sondern auch, in welche Richtung er dies tut. Bewegt sich der Körper vorwärts (s wächst), so ist die Geschwindigkeit positiv. Bewegt sich der Körper rückwärts (s fällt), so ist die Geschwindigkeit negativ. Bei einer vertikalen Koordinatenachse bewegt sich der Körper mit positiver Geschwindigkeit nach oben und mit negativer Geschwindigkeit nach unten (▶Abbildung 3.10).

Die Rate, mit der sich die Geschwindigkeit eines Körpers ändert, ist seine *Beschleunigung*. Die Beschleunigung gibt an, wie schnell der Körper Geschwindigkeit aufnimmt oder verliert.

Eine plötzliche Änderung der Beschleunigung nennt man *Ruck*. Ist eine Auto- oder Busfahrt rucklig, so heißt das nicht, dass die auftretenden Beschleunigungen zwangsläufig groß sind, sondern dass sich die Beschleunigung abrupt ändert.

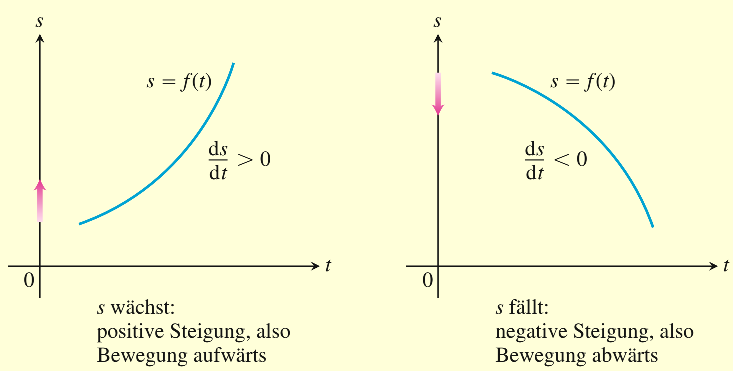


Abbildung 3.10 Bei einer geradlinigen Bewegung $s = f(t)$ (entlang der vertikalen Achse) ist $v = \mathrm{d}s/\mathrm{d}t$ für wachsendes s positiv und für fallendes s negativ. Die blaue Kurve zeigt den Ort über der Zeit; sie gibt nicht die auf der s-Achse liegende Bahnkurve wieder.

Definition

Die **Beschleunigung** ist die Ableitung der Geschwindigkeit nach der Zeit. Ist der Ort eines Körpers zur Zeit t durch die Funktion $s = f(t)$ gegeben, so ist die Beschleunigung des Körpers zur Zeit t

$$a(t) = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}.$$

Der **Ruck** ist die Ableitung der Beschleunigung nach der Zeit:

$$j(t) = \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^3 s}{\mathrm{d}t^3}.$$

Ableitungen in den Wirtschaftswissenschaften

Ingenieure verwenden die Begriffe *Geschwindigkeit* und *Beschleunigung* in Bezug auf Ableitungen von Funktionen, die eine Bewegung beschreiben. Auch Wirtschaftswissenschaftler haben ein spezielles Vokabular, wenn es um Änderungsraten und Ableitungen geht. Sie sprechen zum Beispiel von *Grenzkosten*.

Im Produktionsprozess sind die *Produktionskosten* $c(x)$ eine Funktion von x, also der produzierten Menge. Die **Grenzkosten** der Produktion sind durch die Änderungsrate der Kosten bezüglich der produzierten Menge gegeben. Das ist $\mathrm{d}c/\mathrm{d}x$.

Wir nehmen an, dass $c(x)$ für den Betrag in Euro steht, der zur Produktion von x Tonnen Stahl pro Woche gebraucht wird. Natürlich kostet es mehr, $(x+h)$ Tonnen pro Woche zu produzieren; und der Quotient aus Kostendifferenz und zusätzlicher Menge h ergibt die mittleren Produktionskosten für jede weitere Tonne:

$$\frac{c(x+h)-c(x)}{h} = \begin{array}{l}\text{mittlere Kosten für alle } h\\ \text{zusätzlich produzierten Tonnen Stahl.}\end{array}$$

Der Grenzwert dieses Quotienten für $h \to 0$ entspricht den *Grenzkosten* für die Produktion von mehr Stahl pro Woche, wenn gegenwärtig x Tonnen pro Woche produziert werden (▶Abbildung 3.11):

$$\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}x} = \lim_{h\to 0} \frac{c(x+h)-c(x)}{h} = \text{Grenzkosten für die Produktion}.$$

Manchmal werden die Grenzkosten für die Produktion salopp als die Zusatzkosten für die Produktion einer weiteren Einheit definiert:

$$\frac{\Delta c}{\Delta x} = \frac{c(x+1)-c(x)}{1},$$

wofür $\mathrm{d}c/\mathrm{d}x$ an der Stelle x eine Näherung ist. Diese Näherung ist akzeptabel, wenn sich die Steigung von c bei x nicht schnell ändert. Dann liegt der Differenzenquoti-

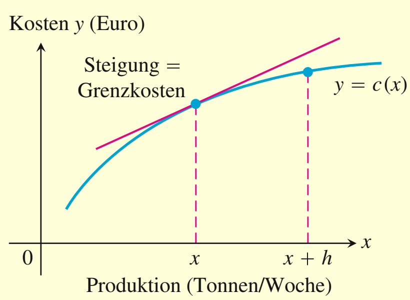


Abbildung 3.11 Wöchentliche Stahlproduktion: $c(x)$ steht für die Produktionskosten bei x Tonnen pro Woche. Die Kosten für die Produktion h weiterer Tonnen Stahl sind $c(x+h) - c(x)$.

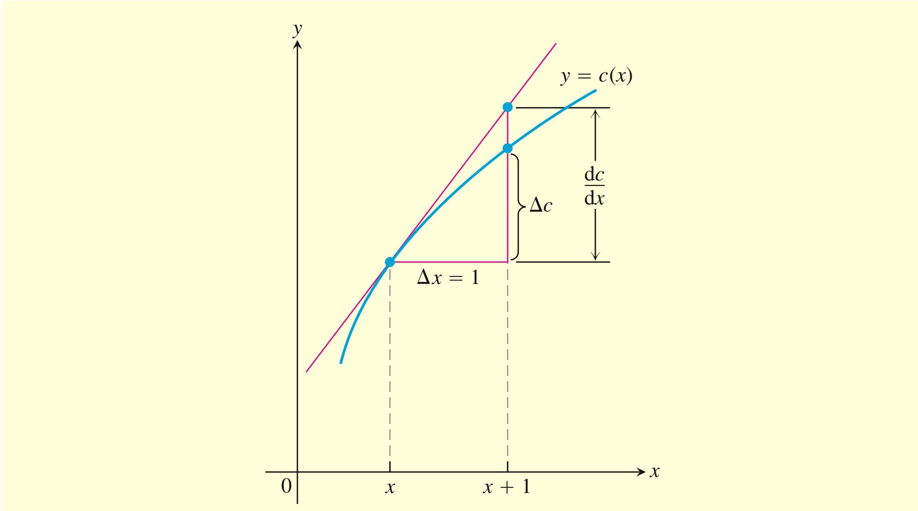


Abbildung 3.12 Die Grenzkosten dc/dx sind näherungsweise die zusätzlichen Kosten Δc für die Produktion von $\Delta x = 1$ weiteren Einheiten.

ent in der Nähe seines Grenzwerts dc/dx, also der Steigung der Tangente für $\Delta x = 1$ (►Abbildung 3.12). Die Näherung funktioniert für große Werte von x am besten.

Wirtschaftswissenschaftler betrachten die Gesamtkostenfunktion oft als ein kubisches Polynom

$$c(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta\,.$$

Dabei steht δ für *fixe Kosten* wie Miete, Wärme, Zeitabschreibungen auf das Anlagevermögen und Verwaltungskosten. Die anderen Terme stehen für *variable Kosten*, darunter die Kosten für Rohmaterial, Steuern und Lohn. Fixe Kosten sind unabhängig von der produzierten Menge. Anders die variablen Kosten. Sie hängen von der produzierten Menge ab. Ein kubisches Polynom ist in der Regel geeignet, das Kostenverhalten in einem realistischen Mengenbereich abzubilden.

Grenzkosten bei Zusatzproduktion

Beispiel 3.14 Wir nehmen an, dass

$$c(x) = x^3 + 6x^2 + 15x$$

die Produktionskosten in Euro für x Wärmetauscher (8 bis 30 Geräte) sind und dass

$$r(x) = x^3 - 3x^2 + 12x$$

die Einnahmen in Euro aus dem Verkauf von x Wärmetauschern sind. Ihr Hersteller produziert 10 Wärmetauscher pro Tag. Wie viel zusätzliche Kosten fallen in etwa an, wenn pro Tag ein Wärmetauscher mehr produziert wird, und um wie viel erhöhen sich schätzungsweise die Einnahmen, wenn 11 Wärmetauscher pro Tag verkauft werden?

Lösung Die Kosten für die Produktion eines Wärmetauschers mehr pro Tag sind bei ursprünglich 10 pro Tag produzierten Wärmetauschern $c'(10)$:

$$c'(x) = \frac{d}{dx}\left(x^3 - 6x^2 + 15x\right) = 3x^2 - 12x + 15$$
$$c'(10) = 3(100) - 12(10) + 15 = 195\,.$$

Die zusätzlichen Kosten belaufen sich also auf etwa 195 Euro. Der Grenzertrag ist

$$r'(x) = \frac{d}{dx}\left(x^3 - 3x^2 + 12x\right) = 3x^2 - 6x + 12\,.$$

Die Grenzertragsfunktion ist eine Abschätzung dafür, wie sich die Einnahmen durch den Verkauf eines zusätzlichen Wärmetauschers erhöhen. Werden gegenwärtig 10 Wärmetauscher pro Tag verkauft, so erhöht sich der Ertrag um etwa

$$r'(10) = 3(100) - 6(10) + 12 = 252 \text{ Euro},$$

wenn nunmehr 11 Wärmetauscher pro Tag verkauft werden. ■

Aufgaben zum Abschnitt 3.4

Bewegung entlang einer Koordinatenachse

In den Aufgaben 1 und 2 wird der Ort $s = f(t)$ eines Körpers angegeben, der sich entlang einer Koordinatenachse bewegt (s in Metern und t in Sekunden).

a. Bestimmen Sie die Verschiebung und die mittlere Geschwindigkeit eines Körpers im gegebenen Zeitintervall.

b. Bestimmen Sie die Beschleunigung an den Intervallgrenzen.

c. Wann, wenn überhaupt, ändert der Körper im Zeitintervall seine Bewegungsrichtung?

1. $s = t^2 - 3t + 2, \quad 0 \le t \le 2$

2. $s = -t^3 + 3t^2 - 3t, \quad 0 \le t \le 3$

3. Bewegung eines Teilchens Ein Teilchen bewegt sich entlang der s-Achse. Zur Zeit t sei sein Ort $s = t^3 - 6t^2 + 9t$ (in Metern).

a. Bestimmen Sie die Beschleunigung des Teilchens an den Stellen, an denen die Geschwindigkeit null ist.

b. Bestimmen Sie den Betrag der Geschwindigkeit des Teilchens an den Stellen, an denen die Beschleunigung null ist.

c. Bestimmen Sie den in der Zeit von $t = 0$ bis $t = 2$ zurückgelegten Weg.

Anwendungen für den freien Fall

4. Freier Fall auf Mars und Jupiter Die Gleichungen für den freien Fall in der Nähe der Mars- und Jupiteroberfläche (s in Metern und t in Sekunden) sind: $s = 1{,}86t^2$ auf dem Mars und $s = 11{,}44t^2$ auf dem Jupiter. Wie lange dauert es auf beiden Planeten, bis ein aus der Ruhelage fallender Stein eine Geschwindigkeit von 27,8 m/s (etwa 100 km/h) erreicht?

5. Freier Fall vom Schiefen Turm von Pisa Stellen Sie sich vor, Galilei lässt eine Kanonenkugel vom Schiefen Turm von Pisa aus einer Höhe von 54,6 m fallen. Die Höhe der Kugel t Sekunden nach dem Fallenlassen ist $s = 54{,}6 - (9{,}81/2)t^2$.

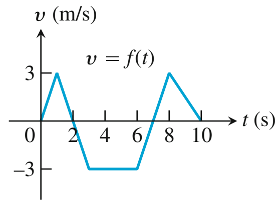
a. Wie groß sind Geschwindigkeit und Beschleunigung der Kugel zur Zeit t?

b. Wie lange braucht die Kugel bis zum Boden?

c. Wie groß ist die Geschwindigkeit der Kugel beim Auftreffen?

Bewegungen aus Graphen ablesen

6. Die nachfolgende Abbildung zeigt die Geschwindigkeit $v = ds/dt = f(t)$ (in m/s) eines Körpers, der sich entlang einer Koordinatenachse bewegt.



a. Wann kehrt der Körper seine Bewegungsrichtung um?

b. Wann bewegt sich der Körper (näherungsweise) mit konstanter Geschwindigkeit?

c. Stellen Sie den Betrag der Geschwindigkeit des Körpers für $0 \le t \le 10$ grafisch dar.

d. Stellen Sie die Beschleunigung, wo definiert, grafisch dar.

Wirtschaftswissenschaften

7. Grenzkosten Nehmen Sie an, dass die Kosten für die Produktion von x Waschmaschinen in Euro $c(x) = 2000 + 100x - 0{,}1x^2$ betragen.

a. Bestimmen Sie die mittleren Produktionskosten pro Waschmaschine für die ersten 100 Geräte.

b. Bestimmen Sie die Grenzkosten für die Produktion von 100 Waschmaschinen.

c. Zeigen Sie, dass die Grenzkosten nach der Produktion von 100 Waschmaschinen ungefähr die Kosten für die Produktion einer weiteren Waschmaschine sind, nachdem die ersten 100 produziert wurden, indem Sie die zuletzt genannten Kosten direkt berechnen.

Copyright