Vahlens Handbücher der Wirtschafts- und Sozialwissenschaften

Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler

Die Einführung mit vielen ökonomischen Beispielen

von
Prof. Dr. Michael Merz, Prof. Dr. Mario V. Wüthrich

1. Auflage

Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler – Merz / Wüthrich

schnell und portofrei erhältlich bei beck-shop.de DIE FACHBUCHHANDLUNG

Thematische Gliederung:

Mathematik und Statistik

Verlag Franz Vahlen München 2013

Verlag Franz Vahlen im Internet:
www.vahlen.de
ISBN 978 3 8006 4482 7

Inhaltsverzeichnis: Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler – Merz / Wüthrich

beck-shop.de

Die skalare Multiplikation $\lambda\mathbf{x}$ bedeutet dagegen geometrisch eine Streckung (für $|\lambda| > 1$) bzw. eine Stauchung (für $|\lambda| < 1$) des Vektors $\mathbf{x}$ um den Faktor $|\lambda|$ (vgl. Abbildung 7.2, links). Im Fall $\lambda < 0$ kehrt dabei der Vektor $\mathbf{x}$ zusätzlich seine Richtung um. Für $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ setzt man allgemein

$$-\mathbf{x} := (-1) \cdot \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ \vdots \\ -x_n \end{pmatrix}.$$

Der Vektor $-\mathbf{x}$ ergibt sich anschaulich aus $\mathbf{x}$ durch Spiegelung am Koordinatenursprung (vgl. Abbildung 7.2, rechts). Darauf aufbauend ist die **Differenz** zweier Vektoren $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ definiert durch

$$\mathbf{x} - \mathbf{y} := \mathbf{x} + (-1) \cdot \mathbf{y} = \begin{pmatrix} x_1 - y_1 \\ x_2 - y_2 \\ \vdots \\ x_n - y_n \end{pmatrix}.$$

Beispiel 7.2 (Addition und skalare Multiplikation von Vektoren)

a) Gegeben seien die 2-dimensionalen Vektoren

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt z. B.

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} - \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad -\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{und} \quad -\mathbf{y} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

(siehe Abbildung 7.3).

b) Gegeben seien die 4-dimensionalen Vektoren

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{z} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt z. B.

$$-\frac{1}{4}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} + 2\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \text{und}$$

$$\mathbf{x} + 2\mathbf{y} - \mathbf{z} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

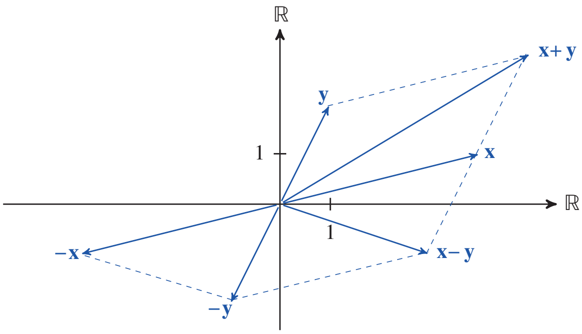


Abb. 7.3: Geometrische Veranschaulichung der Addition und skalaren Multiplikation zweier Vektoren $\mathbf{x} = (4, 1)^T$ und $\mathbf{y} = (1, 2)^T$ in der euklidischen Ebene $\mathbb{R}^2$

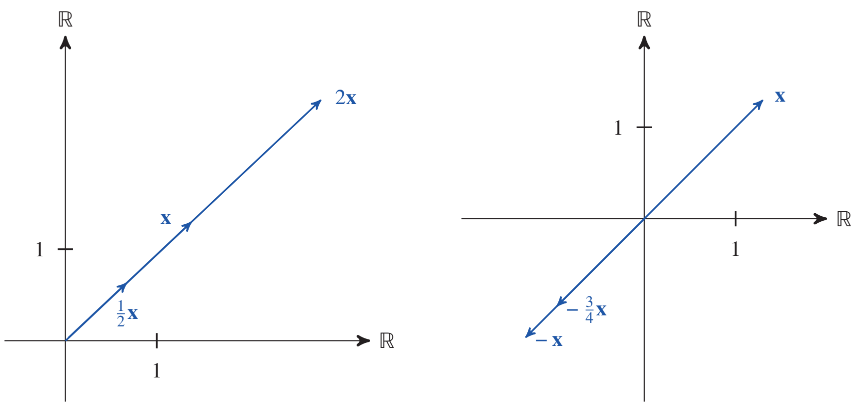


Abb. 7.2: Geometrische Veranschaulichung der skalaren Multiplikation in der euklidischen Ebene $\mathbb{R}^2$ für $\lambda = 2$ und $\lambda = \frac{1}{2}$ (links) sowie $\lambda = -1$ und $\lambda = -\frac{3}{4}$ (rechts)

beck-shop.de

Vektorraum-Eigenschaften des $\mathbb{R}^n$

Die Addition und skalare Multiplikation von Vektoren im n-dimensionalen euklidischen Raum $\mathbb{R}^n$ ist koordinatenweise definiert (vgl. (7.1)-(7.2)). Aus den Rechengesetzen für reelle Zahlen (vgl. Abschnitt 3.3) ergeben sich daher unmittelbar die im folgenden Satz zusammengefassten Eigenschaften des n-dimensionalen euklidischen Raums $\mathbb{R}^n$. Da diese Eigenschaften genau die Merkmale sind, durch die ein sogenannter **Vektorraum** charakterisiert ist, werden sie auch als **Vektorraum-Eigenschaften des $\mathbb{R}^n$** bezeichnet.

Satz 7.3 (Vektorraum-Eigenschaften des $\mathbb{R}^n$)

Für die Vektoren des n-dimensionalen euklidischen Raums $\mathbb{R}^n$ gilt:

a) *Der Nullvektor $\mathbf{0}$ ist das neutrale Element und $-\mathbf{x}$ ist das inverse Element des Vektors $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ bzgl. der Vektoraddition. Das heißt, es gilt für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$*

$$\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{x} = \mathbf{x} \qquad \textit{und}$$
$$\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = (-\mathbf{x}) + \mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

b) *Die Vektoraddition genügt dem Kommutativ- und Assoziativgesetz. Das heißt, es gilt für alle $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$*

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x} \qquad \textit{und}$$
$$\mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z}.$$

c) *Die skalare Multiplikation genügt dem Assoziativ- und Distributivgesetz. Das heißt, es gilt für alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$*

$$(\lambda\mu)\mathbf{x} = \lambda(\mu\mathbf{x}) \qquad \textit{und} \qquad \lambda(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \lambda\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y}$$
$$(\lambda + \mu)\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{x}.$$

d) *Es gilt für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$*

$$1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}.$$

Beweis: Siehe die Bemerkung vor Satz 7.3. ■

Ordnungsrelation auf $\mathbb{R}^n$

Auf dem n-dimensionalen euklidischen Raum $\mathbb{R}^n$ kann eine **Ordnungsrelation** definiert werden. Denn schreibt man für zwei Vektoren $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$

$$\mathbf{x} \leq \mathbf{y}, \tag{7.4}$$

wenn $x_i \leq y_i$ für alle $i = 1, \ldots, n$ gilt, dann ist die Menge

$$R = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : \mathbf{x} \leq \mathbf{y}\}$$

eine Ordnungsrelation auf $\mathbb{R}^n$. Die Menge R ist jedoch keine **vollständige Ordnungsrelation** (**Totalordnung**). Zum Beispiel gilt für zwei Vektoren $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ mit $x_1 < y_1$ und $y_n < x_n$ weder $\mathbf{x} \leq \mathbf{y}$ noch $\mathbf{y} \leq \mathbf{x}$. Das heißt, die Relation R ist nicht vollständig (zum Begriff der (vollständigen) Ordnungsrelation siehe Abschnitt 6.4).

Ein Vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ mit $\mathbf{0} \leq \mathbf{x}$ heißt **nichtnegativ** und die Menge aller nichtnegativen Vektoren, d. h. die Menge

$$\mathbb{R}^n_+ := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{0} \leq \mathbf{x}\},$$

wird als **nichtnegativer Kegel** des n-dimensionalen euklidischen Raums $\mathbb{R}^n$ bezeichnet. Ferner heißt für zwei Vektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ mit $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$ die Menge

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{a} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{b}\} \tag{7.5}$$

abgeschlossenes Intervall des n-dimensionalen euklidischen Raums $\mathbb{R}^n$ (siehe Abbildung 7.4, links für den Spezialfall $n=2$).

Analog zu (7.4) schreibt man für zwei Vektoren $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$

$$\mathbf{x} < \mathbf{y},$$

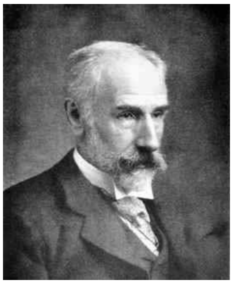
wenn $x_i < y_i$ für alle $i = 1, \ldots, n$ gilt und die Mengen

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{a} \leq \mathbf{x} < \mathbf{b}\}, \tag{7.6}$$
$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}] := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{a} < \mathbf{x} \leq \mathbf{b}\} \quad \text{und} \tag{7.7}$$
$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{a} < \mathbf{x} < \mathbf{b}\} \tag{7.8}$$

heißen **rechtsseitig offenes Intervall**, **linksseitig offenes Intervall** bzw. **offenes Intervall** des n-dimensionalen euklidischen Raums $\mathbb{R}^n$.

Beispiel 7.4 (Tauschwirtschaft)

Betrachtet wird eine **Tauschwirtschaft** bestehend aus zwei Haushalten 1 und 2 sowie n Gütern.



F. Y. Edgeworth

Die Menge aller möglichen Güterbündel sei durch den nichtnegativen Kegel $\mathbb{R}^n_+$ des n-dimensionalen euklidischen Raums $\mathbb{R}^n$ gegeben. Es wird angenommen, dass die Ausstattung der Gesamtwirtschaft

beck-shop.de

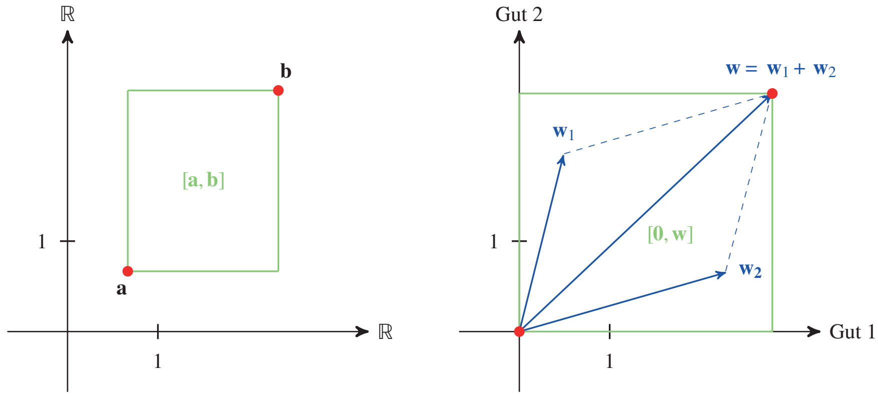


Abb. 7.4: Abgeschlossenes Intervall $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ (links) und Edgeworth-Box $[\mathbf{0}, \mathbf{w}]$ für zwei Güter (rechts) in der euklidischen Ebene $\mathbb{R}^2$

durch den nichtnegativen Vektor $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n_+$ sowie die Anfangsausstattungen der beiden Haushalte 1 und 2 durch die nichtnegativen Vektoren $\mathbf{w}_1 \in \mathbb{R}^n_+$ bzw. $\mathbf{w}_2 \in \mathbb{R}^n_+$ gegeben sind. Ferner wird angenommen, dass die in der Gesamtwirtschaft vorhandenen Gütermengen vollständig auf die beiden Haushalte 1 und 2 aufgeteilt sind. Das heißt, es gelte $\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 = \mathbf{w}$. Durch Tausch lässt sich dann für den Haushalt 1 jede Ausstattung $\mathbf{x}_1 \in [\mathbf{0}, \mathbf{w}]$ und für den Haushalt 2 jede Ausstattung $\mathbf{x}_2 \in [\mathbf{0}, \mathbf{w}]$ mit $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 = \mathbf{w}$ realisieren (siehe Abbildung 7.4, rechts für den Spezialfall von $n = 2$ Gütern).

Das abgeschlossene Intervall $[\mathbf{0}, \mathbf{w}]$ des n-dimensionalen euklidischen Raums $\mathbb{R}^n$ wird nach dem irischen Ökonomen *Francis Ysidro Edgeworth* (1845–1926) als **Edgeworth-Box** oder **Tauschbox** bezeichnet. Sie ist ein verbreitetes Werkzeug in der allgemeinen Gleichgewichtstheorie. Die Edgeworth-Box wird z. B. in der Haushaltstheorie zur Analyse der Allokation von verschiedenen Gütern zwischen Haushalten und in der Produktionstheorie zur Aufteilung von Produktionsfaktoren zwischen Unternehmen verwendet.

7.4 Lineare Gleichungssysteme

Lineare Gleichungssysteme besitzen für die Wirtschaftswissenschaften eine überragende Bedeutung. Denn viele ökonomische Modelle basieren auf der Annahme, dass sich die Zusammenhänge zwischen den verschiedenen ökonomischen Größen durch **lineare Gleichungen**, dies sind Gleichungen der Form

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b \tag{7.9}$$

mit $a_1, \ldots, a_n, b \in \mathbb{R}$ und Variablen $x_1, \ldots, x_n$, adäquat beschreiben lassen. Man spricht bei (7.9) auch genauer von einer linearen Gleichung in den n **Unbekannten** (**Variablen**) $x_1, \ldots, x_n$ mit den **Koeffizienten** $a_1, \ldots, a_n$ und der **rechten Seite** b. Genügt ein Vektor $\mathbf{x} := (x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ der linearen Gleichung (7.9), dann sagt man, dass $\mathbf{x}$ die lineare Gleichung (7.9) **erfüllt** oder **löst**.

Im Unterschied zu einer nichtlinearen Gleichung treten bei einer linearen Gleichung die einzelnen Variablen x_i lediglich in ihrer ersten Potenz als Faktor eines Produkts mit einem Koeffizienten a_i auf, wobei diese Produkte ausschließlich addiert werden. Eine lineare Gleichung enthält somit keine höheren Potenzen, wie z. B. x_3^4, und auch keine Produkte verschiedener Variablen, wie z. B. x_3x_4. Darüber hinaus können bei einer linearen Gleichung die Variablen auch nicht als Argumente von reellen Funktionen, wie z. B. $\ln(x_2)$, $\cos(x_4)$ oder $\exp(x_1)$, auftreten.

In den meisten wirtschaftswissenschaftlichen Anwendungen treten gleichzeitig mehrere lineare Gleichungen auf. In diesem Fall spricht man von einem **linearen Gleichungssystem**:

beck-shop.de

Definition 7.5 (Lineares Gleichungssystem)

Ein Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad &= \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \tag{7.10}$$

mit $a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$ für $i = 1, \ldots, m$ und $j = 1, \ldots, n$ wird als lineares Gleichungssystem der Ordnung $m \times n$ in den n Unbekannten (Variablen) $x_1, \ldots, x_n$ mit den Koeffizienten a_{ij} und der rechten Seite $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_m)^T$ bezeichnet. Gilt $b_1 = \ldots = b_m = 0$, dann wird auch genauer von einem homogenen und andernfalls von einem inhomogenen linearen Gleichungssystem gesprochen. Ein lineares Gleichungssystem mit $m = n$ heißt quadratisch.

Ein Vektor $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$, dessen Koordinaten alle m linearen Gleichungen erfüllen, wird Lösung des linearen Gleichungssystems genannt und die Menge $\mathbb{L}$ aller Lösungen $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ heißt Lösungsraum des linearen Gleichungssystems. Ein lineares Gleichungssystem mit $\mathbb{L} \neq \emptyset$, also das mindestens eine Lösung besitzt, wird als konsistent bezeichnet. Andernfalls heißt es inkonsistent.

In konkreten wirtschaftswissenschaftlichen Fragestellungen sind die Werte a_{ij} und b_i für $i = 1, \ldots, m$ und $j = 1, \ldots, n$ vorgegeben und die Lösungen des linearen Gleichungssystems sind zu bestimmen. Der benötigte Aufwand bei der Lösung eines linearen Gleichungssystems hängt dabei maßgeblich von der Ordnung $m \times n$, d. h. der Anzahl m der linearen Gleichungen und der Anzahl n der Variablen, sowie der Struktur des linearen Gleichungssystems ab.

Eine Möglichkeit, das lineare Gleichungssystem (7.10) kürzer aufzuschreiben, basiert auf der Verwendung des Summenzeichens $\sum$ und ist gegeben durch

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \quad \text{für } i = 1, \ldots, m.$$

In Abschnitt 8.4 wird mit Hilfe von sogenannten **Matrizen** eine noch kürzere Schreibweise vorgestellt, die bei der Analyse von linearen Gleichungssystemen große Vorteile bietet.

Wie man durch Einsetzen leicht bestätigen kann, besitzt ein homogenes lineares Gleichungssystem – neben möglicherweise noch anderen Lösungen – stets den Nullvektor $\mathbf{0}$ als Lösung. Diese Lösung wird als **triviale Lösung** des homogenen linearen Gleichungssystems bezeichnet. Für homogene lineare Gleichungssysteme gilt somit $\mathbb{L} \neq \emptyset$, d. h. sie sind stets konsistent.

Das lineare Gleichungssystem (7.10) kann auch mit Hilfe der Vektoren

$$\mathbf{a}_1 := \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \ \mathbf{a}_2 := \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \ \ldots, \ \mathbf{a}_n := \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

dargestellt werden. Denn (7.10) ist offensichlich äquivalent zu

$$x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \ldots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}. \tag{7.11}$$

In Abschnitt 8.10 wird mit der **Cramerschen Regel** eine geschlossene Formel zur Lösung quadratischer linearer Gleichungssysteme bereitgestellt, während in Abschnitt 9.1 allgemeine lineare Gleichungssysteme hinsichtlich der Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen untersucht werden. Insbesondere wird in Abschnitt 9.3 mit dem **Gauß-Algorithmus** ein sehr leistungsfähiges Verfahren zur Lösung linearer Gleichungssysteme beliebig großer Ordnung vorgestellt.

Im folgenden Beispiel wird gezeigt, wie durch das sogenannte **Einsetzungsverfahren** lineare Gleichungssysteme kleinerer Ordnung problemlos gelöst werden können. Bei diesem Verfahren wird eine beliebige Gleichung nach einer Variablen aufgelöst und der resultierende Term in die anderen Gleichungen eingesetzt. Auf diese Weise wird eine Variable eliminiert. Dieses Vorgehen wiederholt man solange bis nur noch eine lineare Gleichung mit einer Variablen übrig ist, welche dann problemlos gelöst werden kann. Durch Einsetzen dieser Lösung in die anderen Gleichungen können dann sukzessive die Werte der anderen Variablen ermittelt werden.

Beispiel 7.6 (Lineare Gleichungssysteme)

a) Von einem Vater und seinem Sohn sei bekannt, dass sie zusammen 80 Jahre alt sind und dass der Vater vor 20 Jahren dreimal so alt war wie der Sohn.

beck-shop.de

Bezeichnen x_1 und x_2 das Alter des Vaters bzw. des Sohns, dann lassen sich diese Informationen durch das folgende lineare Gleichungssystem der Ordnung 2×2 darstellen:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 80 \\ x_1 - 20 &= 3(x_2 - 20) \end{aligned}$$

Werden die Variablen x_1 und x_2 auf die linke und die reellen Zahlen auf die rechte Seite gebracht, resultiert ein äquivalentes lineares Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 80 \\ x_1 - 3x_2 &= -40 \end{aligned}$$

Auflösen der ersten linearen Gleichung nach x_2 und anschließendes Einsetzen in die zweite lineare Gleichung liefert

$$x_1 - 3(80 - x_1) = -40 \quad\Leftrightarrow\quad 4x_1 = 200 \quad\Leftrightarrow\quad x_1 = 50.$$

Einsetzen von $x_1 = 50$ in die erste Gleichung liefert $x_2 = 30$. Der Lösungsraum ist somit gegeben durch $\mathbb{L} = \left\{(50, 30)^T\right\}$. Das heißt, der Vater ist 50 und der Sohn ist 30 Jahre alt.

b) Für die Produktion von drei Produkten stehen einem Betrieb zwei Rohstoffe R_1 und R_2 in begrenzter Menge zur Verfügung.

Die folgende Tabelle gibt für die drei Produkte P_1, P_2 und P_3 die benötigten Rohstoffmengen für jede produzierte Einheit, d. h. die Produktionskoeffizienten PK, sowie die vorhandenen Rohstoffmengen an:

Rohstoffe	PK			Lagerbestand
	P_1	P_2	P_3	
R_1	2	1	2	240
R_2	3	0	2	230

Sind x_1, x_2, x_3 die gesuchten Produktionsmengen für die drei Produkte P_1, P_2 und P_3, dann lässt sich die obige Tabelle durch das folgende lineare Gleichungssystem der Ordnung 2×3 darstellen:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 2x_3 &= 240 \\ 3x_1 + 2x_3 &= 230 \end{aligned}$$

Auflösen der zweiten linearen Gleichung nach x_3 und anschließendes Einsetzen in die erste lineare Gleichung liefert

$$2x_1 + x_2 + 2\left(115 - \frac{3}{2}x_1\right) = 240$$

$$\Longleftrightarrow \quad -x_1 + x_2 = 10 \quad \Longleftrightarrow \quad x_2 = 10 + x_1.$$

Das heißt, der Wert der Variablen x_1 kann – theoretisch – jede beliebige reelle Zahl sein und das lineare Gleichungssystem besitzt somit unendlich viele Lösungen. Der (theoretische) Lösungsraum ist gegeben durch

$$\mathbb{L} = \Big\{(x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3 : x_2 = 10 + x_1, \\ x_3 = 115 - \frac{3}{2}x_1 \text{ und } x_1 \in \mathbb{R}\Big\}.$$

Da jedoch Produktionsmengen nur nichtnegativ sein können, sind von diesen Lösungen nur diejenigen ökonomisch sinnvoll, für die $x_1, x_2, x_3 \geq 0$ gilt.

7.5 Euklidisches Skalarprodukt und euklidische Norm

Durch Einführung des sogenannten **euklidischen Skalarprodukts** wird der n-dimensionale euklidische Raum $\mathbb{R}^n$ mit zusätzlicher Struktur versehen. Diese zusätzliche Struktur ermöglicht es, die **Länge eines Vektors**, den **Abstand** und den **Winkel zwischen Vektoren** sowie die **Orthogonalität von Vektoren** zu definieren.

Euklidisches Skalarprodukt

Wie die folgende Definition zeigt, handelt es sich beim euklidischen Skalarprodukt um eine einfache Verknüpfung, die zwei n-dimensionalen Vektoren $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ eine reelle Zahl zuordnet:

Definition 7.7 (Euklidisches Skalarprodukt)

Für zwei Vektoren $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ *heißt die reelle Zahl*

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

euklidisches Skalarprodukt der Vektoren $\mathbf{x}$ *und* $\mathbf{y}$.

beck-shop.de

Im Fall $n = 1$ ist das euklidische Skalarprodukt offensichtlich identisch mit der gewöhnlichen Multiplikation zweier reeller Zahlen.

Das euklidische Skalarprodukt besitzt die im folgenden Satz zusammengefassten Eigenschaften:

Satz 7.8 (Eigenschaften des euklidischen Skalarprodukts)

Für alle $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ *und* $\lambda \in \mathbb{R}$ *gilt:*

a) $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$

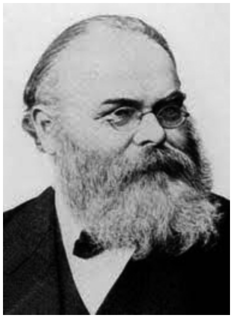
b) $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0 \Longleftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$

c) $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$

d) $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} + \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle$

e) $\langle \mathbf{x}, \lambda\mathbf{y} \rangle = \langle \lambda\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \lambda \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$

Beweis: Die Aussagen a)-e) folgen unmittelbar aus der Definition 7.7 und den Rechengesetzen für reelle Zahlen. ■



H. A. Schwarz

Für weitergehende Untersuchungen ist die folgende, nach dem französischen Mathematiker *Augustin Louis Cauchy* (1789–1857) und dem deutschen Mathematiker *Hermann Amandus Schwarz* (1843–1921) benannte, **Cauchy-Schwarzsche Ungleichung** sehr wichtig. Neben der linearen Algebra wird sie z. B. auch häufig in der Analysis und in der Wahrscheinlichkeitstheorie verwendet.

Satz 7.9 (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung)

Für alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ *gilt*

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle^2 \leq \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \cdot \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle . \qquad (7.12)$$

Das Gleichheitszeichen tritt dabei genau dann ein, wenn ein Skalar $\mu \in \mathbb{R}$ *mit* $\mathbf{x} = \mu\mathbf{y}$ *existiert.*

Beweis: Ist $\mathbf{y} = \mathbf{0}$, dann gilt sowohl $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$ als auch $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \cdot \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle = 0$ und somit in (7.12) sogar das Gleichheitszeichen. Es kann daher ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$ angenommen werden. Mit Satz 7.8 folgt für alle $\lambda \in \mathbb{R}$

$$0 \leq \langle \mathbf{x} + \lambda\mathbf{y}, \mathbf{x} + \lambda\mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + 2\lambda \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \lambda^2 \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle . \quad (7.13)$$

Mit der speziellen Wahl $\lambda := -\frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{\langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle}$ folgt daraus weiter

$$0 \leq \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle - 2\frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle^2}{\langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle} + \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle^2}{\langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle - \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle^2}{\langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle} \qquad (7.14)$$

und damit nach einer kurzen Umformung auch die Behauptung (7.12). Ferner folgt mit Satz 7.8b), dass in (7.13) und (7.14) genau dann das Gleichheitszeichen gilt, wenn $\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y} = \mathbf{0}$ bzw. $\mathbf{x} = -\lambda\mathbf{y}$ gilt. ■

Euklidische Norm

Mit Hilfe des euklidischen Skalarprodukts kann nun mit der (**euklidischen**) **Norm** und dem (**euklidischen**) **Abstand** ein Längen- bzw. Abstandsbegriff auf dem euklidischen Raum $\mathbb{R}^n$ definiert werden:

Definition 7.10 (Euklidische Norm und euklidischer Abstand)

Für einen Vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ *heißt die nichtnegative, reelle Zahl*

$$\|\mathbf{x}\| := \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \qquad (7.15)$$

(euklidische) Norm oder Länge des Vektors $\mathbf{x}$. *Für zwei Vektoren* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ *wird die nichtnegative reelle Zahl*

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| := \sqrt{\langle \mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

als (euklidischer) Abstand der Vektoren $\mathbf{x}$ *und* $\mathbf{y}$ *bezeichnet.*

Die Norm $\|\mathbf{x}\|$ eines Vektors (Punktes) $\mathbf{x}$ kann als sein Abstand vom Koordinatenursprung $\mathbf{0}$ aufgefasst werden.

Im Fall $n = 1$ ist die Norm offensichtlich identisch mit dem gewöhnlichen Betrag einer reellen Zahl und im Fall $n = 2$ erinnert die Norm an den Satz des Pythagoras (siehe Satz 5.3). Die Norm eines Vektors $\mathbf{x}$ und der Abstand zweier Vektoren $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ sind in Abbildung 7.5 für den Spezialfall $n = 2$, d. h. die euklidische Ebene $\mathbb{R}^2$, veranschaulicht.

Mit Hilfe der (euklidischen) Norm erhält man für die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung (7.12) die äquivalente Formulierung

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| \qquad (7.16)$$

beck-shop.de

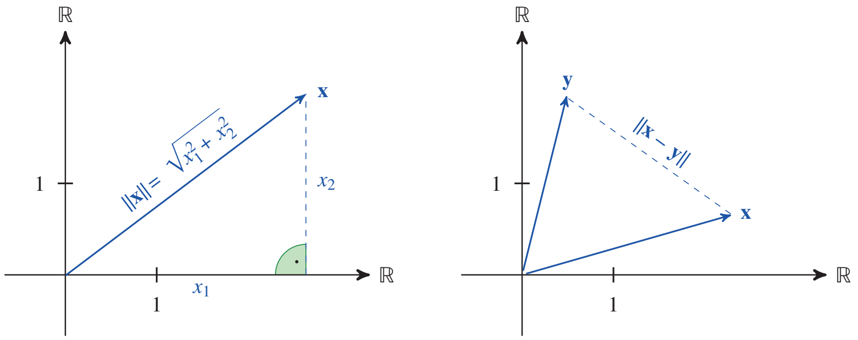


Abb. 7.5: Norm eines Vektors $\mathbf{x}$ (links) und der Abstand zweier Vektoren $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ in der euklidischen Ebene $\mathbb{R}^2$

für alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Darüber hinaus besitzt die (euklidische) Norm die im folgenden Satz zusammengefassten Eigenschaften, die bereits vom Betrag reeller Zahlen her bekannt sind (vgl. Seite 47).

Satz 7.11 (Eigenschaften der euklidischen Norm)

Für alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ *und* $\lambda \in \mathbb{R}$ *gilt:*

a) $\|\mathbf{x}\| \geq 0$

b) $\|\mathbf{x}\| = 0 \Longleftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$

c) $\|\lambda\mathbf{x}\| = |\lambda| \cdot \|\mathbf{x}\|$ *(Homogenität)*

d) $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ *(Dreiecksungleichung)*

Beweis: a)–c): Diese Aussagen folgen unmittelbar aus Satz 7.8a), b) und e).

d): Mit Satz 7.8c) und d) folgt für alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 &= \langle \mathbf{x}+\mathbf{y}, \mathbf{x}+\mathbf{y}\rangle = \langle \mathbf{x}+\mathbf{y}, \mathbf{x}\rangle + \langle \mathbf{x}+\mathbf{y}, \mathbf{y}\rangle \\ &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle + 2\,\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y}\rangle\,. \end{aligned} \tag{7.17}$$

Mit Satz 7.9 und der ersten Binomischen Formel folgt daraus weiter

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 &\leq \|\mathbf{x}\|^2 + 2\sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle}\sqrt{\langle \mathbf{y}, \mathbf{y}\rangle} + \|\mathbf{y}\|^2 \\ &= \|\mathbf{x}\|^2 + 2\,\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\| + \|\mathbf{y}\|^2 \\ &= (\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|)^2\end{aligned}$$

und damit insbesondere die Behauptung $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$. ■

Mit Satz 7.11b) erhält man:

$$\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{y}$$

Aus dem Beweis der Dreiecksungleichung ist ersichtlich, dass

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| = \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$$

genau dann gilt, wenn $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle}\sqrt{\langle \mathbf{y}, \mathbf{y}\rangle}$ erfüllt ist. Mit Satz 7.9 folgt, dass dies genau dann der Fall ist, wenn mindestens einer der beiden Vektoren $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ der Nullvektor $\mathbf{0}$ ist oder ein Skalar $\mu > 0$ mit $\mathbf{x} = \mu\mathbf{y}$ existiert.

Die Dreiecksungleichung verallgemeinert die in der euklidischen Ebene $\mathbb{R}^2$ geometrisch offensichtliche Tatsache, dass die Länge einer Seite in einem Dreieck höchstens gleich der Summe der Längen der beiden anderen Seiten ist (vgl. Abbildung 7.6, links).

Ein Vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ mit der Norm 1 heißt **Einheitsvektor** oder **normierter Vektor**. Durch Multiplikation mit dem Skalar $\frac{1}{\|\mathbf{x}\|}$ kann jeder Vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ mit $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ auf die Norm 1 gebracht, d. h. **normiert**, werden. Denn mit der Homogenitätseigenschaft der Norm folgt

$$\left\|\frac{1}{\|\mathbf{x}\|}\mathbf{x}\right\| = \frac{1}{\|\mathbf{x}\|} \cdot \|\mathbf{x}\| = 1\,.$$

Beispiel 7.12 (Euklidisches Skalarprodukt und Norm)

a) Gegeben seien die vierdimensionalen Vektoren

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt z. B.

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x}\rangle &= (-1)\cdot 3 + 2\cdot(-2) + 0\cdot 4 + 4\cdot 7 \\ &= 21\end{aligned}$$

beck-shop.de

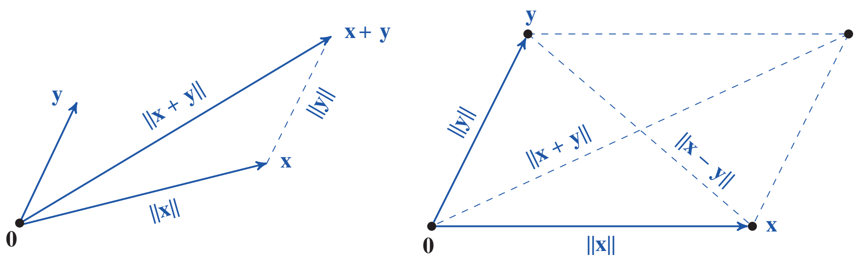


Abb. 7.6: Dreiecksungleichung (links) und Parallelogrammgleichung (rechts)

und

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \, \mathbf{z} = 21 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 21 \\ 0 \\ 21 \end{pmatrix}.$$

b) Betrachtet werden die beiden dreidimensionalen Vektoren

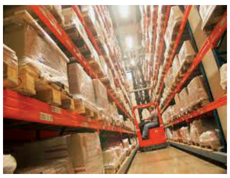
$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Hierbei gilt:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}\| &= \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{14} \\ \|\mathbf{y}\| &= \sqrt{(-3)^2 + 2^2 + 5^2} = \sqrt{38} \\ \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| &= \sqrt{(-2)^2 + 0^2 + 8^2} \\ &= \sqrt{68} \leq \sqrt{14} + \sqrt{38} = \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\| \\ |\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| &= |1 \cdot (-3) + (-2) \cdot 2 + 3 \cdot 5| \\ &= 8 \leq \sqrt{14} \cdot \sqrt{38} = \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| \end{aligned}$$

Das folgende Beispiel gibt einen ersten Einblick, wie mit Hilfe des euklidischen Skalarprodukts ökonomische Problemstellungen kompakt dargestellt werden können:

Beispiel 7.13 (Güterbündel)



Betrachtet wird ein Güterbündel bestehend aus sechs verschiedenen Gütern. Die Gütermengen $x_1, \ldots, x_6 \in \mathbb{R}$ und die Güterpreise $p_1, \ldots, p_6 \in \mathbb{R}_+$ (in 1000 €) dieser sechs Güter seien durch die Koordinaten der beiden Vektoren

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 2 \\ 28 \\ 0 \\ 17 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 80 \\ 50 \\ 90 \\ 10 \\ 200 \\ 70 \end{pmatrix}$$

gegeben. Der Wert des gesamten Güterbündels berechnet sich dann als euklidisches Skalarprodukt der beiden Vektoren $\mathbf{p}$ und $\mathbf{x}$ und beträgt (in 1000 €)

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle = \sum_{i=1}^{6} x_i p_i = 2500.$$

7.6 Orthogonalität und Winkel

Mit Hilfe des euklidischen Skalarprodukts können auch die Begriffe **Orthogonalität** und **Winkel** für den n-dimensionalen euklidischen Raum $\mathbb{R}^n$ erklärt werden.

Orthogonalität

Der Begriff der **Orthogonalität** ist im n-dimensionalen euklidischen Raum $\mathbb{R}^n$ wie folgt definiert:

Definition 7.14 (Orthogonalität und Orthogonalsystem)

Zwei Vektoren $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ heißen orthogonal (zueinander), wenn $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$ gilt. Man schreibt dann $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$. Gilt zusätzlich $\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{y}\| = 1$, dann werden sie auch als orthonormal bezeichnet.