Theo de Jong

Analysis

ALWAYS LEARNING

PEARSON

Analysis

in einer Veränderlichen

Theo de Jong

Analysis

in einer Veränderlichen

PEARSON

Higher Education

München • Harlow • Amsterdam • Madrid • Boston
San Francisco • Don Mills • Mexico City • Sydney

a part of Pearson plc worldwide

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

10 9 8 7 6 5 4 3 2 1

12

ISBN 978-3-86894-112-8

Programmleitung: Birger Peil, bpeil@pearson.de
Development: Alice Kachnij, akachnij@pearson.de
Korrektorat: Petra Kienle, Fürstenfeldbruck
Einbandgestaltung: Thomas Arlt, tarlt@adesso21.net
Herstellung: Monika Weiher, mweiher@pearson.de
Satz: le-tex publishing services GmbH, Leipzig
Druck und Verarbeitung: GraphyCems, Villatuerta

Printed in Spain

für meine Frau Petra und unsere Kinder

Folgen und stetige Funktionen

3

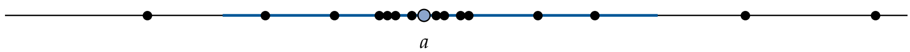
ÜBERBLICK

LERNZIELE

- Folgen und Konvergenz
- Stetige Funktionen und Rechenregeln
- Stetige Funktionen auf Intervallen: Zwischenwertsatz, Maximum und Minimum
- Grenzwerte von Funktionen
- Stetigkeit der Umkehrfunktion
- Definition der Exponentialfunktion und ihre Umkehrfunktion, der Logarithmus
- Häufungspunkte von Folgen und Cauchykriterium

Es sei $a_1, a_2, a_3 \ldots$ eine Folge reeller Zahlen. Wir interessieren uns für das Verhalten der Zahlenfolge (a_n), wenn n groß wird. Insbesondere möchten wir den Begriff Grenzwert genau erfassen: Was soll es bedeuten, dass die Folge (a_n) gegen einen Wert a, den Grenzwert, strebt? Die Antwort ist gegeben durch:

Wenn V eine beliebige *Umgebung von a ist,*
so liegt a_n in V für alle bis auf endlich viele $n \in \mathbb{N}$.



Je länger man über diese Definition nachdenkt, umso selbstverständlicher wird sie. Im ersten Kapitel haben wir den Fall, dass (a_n) eine wachsende beschränkte Folge ist, betrachtet. Der dort angegebene Grenzwert $a = \sup\{a_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ stimmt mit dem hier angegebenen überein. (Warum?)

Die Phrase „für alle bis auf endlich viele n“ ist mathematisch folgendermaßen gefasst:

$$\textit{Es gibt ein } N \in \mathbb{N}, \textit{ so dass für alle } n \geq N \,.$$

Jede beliebige Umgebung V von a enthält eine Umgebung der Form $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ für ein $\varepsilon > 0$. Und: $a_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ genau dann, wenn $|a_n - a| < \varepsilon$. Wir können den Begriff Grenzwert deshalb folgendermaßen beschreiben:

$$\textit{Für jedes } \varepsilon > 0 \textit{ gibt es ein } N \in \mathbb{N}, \textit{ so dass für alle } n \geq N \textit{ gilt: } |a_n - a| < \varepsilon \,.$$

Den Grenzwert einer Folge (a_n) bezeichnen wir mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Diese technische Beschreibung des Grenzwertes erweist sich als hilfreich beim Beweisen.

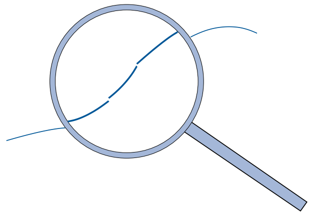
Konvergente Folgen erfüllen gewisse Rechenregeln: Sind (a_n) und (b_n) konvergente Folgen, so auch $(a_n + b_n)$, $(a_n \cdot b_n)$ und es gilt:

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n \,, \quad \lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n \,.$$

Der Spezialfall, dass (a_n) und (b_n) wachsende Folgen positiver reellen Zahlen sind, war bereits in Satz 1.4 bewiesen worden. Der Beweis dieser Rechenregeln im allgemeinen Fall gibt *keinen neuen Beweis* für Satz 1.4. Der in diesem Kapitel angegebene Beweis benutzt nämlich die Grundrechenregeln für die reellen Zahlen, wie die Assoziativität und die Distributivität. Jedoch war eben dieser Satz 1.4 ein wesentlicher Schritt in dem Beweis der grundlegenden Rechenregeln.

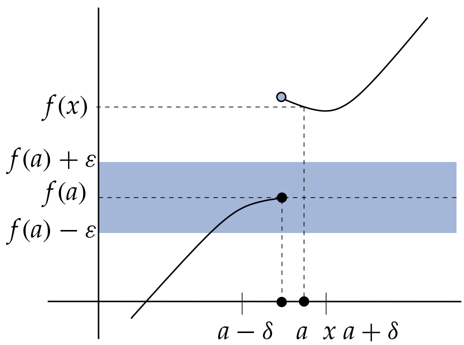
Kommen wir zu dem Begriff „Stetigkeit einer Funktion". In der Schule wird dieser Begriff oft umschrieben mit der Phrase:

Die Funktion f ist stetig, wenn der Graph der Funktion gezeichnet werden kann, ohne den Bleistift vom Papier zu nehmen.



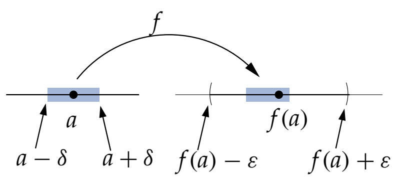
Wir erwarten von vielen bekannten Funktionen, dass sie stetig sind, wie z. B. die Funktion $f(x) = x^3 - x - 1$. Es sieht tatsächlich aus, als ob der Graph ohne Sprünge verläuft. Können wir uns aber so sicher sein? Wenn wir einen Graph mit einer Lupe oder einem Mikroskop betrachten, wie können wir sicher sein, dass der Graph im Kleinen keine Sprünge macht, so wie im nebenstehenden Bild dargestellt?

In der nebenstehenden Figur ist der Graph einer Funktion gezeichnet, welche in $x = a$ nicht stetig ist. Der Graph macht bei $x = a$ einen Sprung. Die Funktionswerte $f(x)$ für x nahe bei a sollten nicht viel von dem Wert $f(a)$ abweichen. Die Annäherung sollte besser sein, wenn x näher bei a ist. Diese Tatsache beschreiben wir mathematisch folgendermaßen:



Die Funktion f ist stetig in a, wenn es für jede Umgebung V von $f(a)$ eine Umgebung U von a gibt, mit $f(x) \in V$ für jedes $x \in U$.

Da jede Umgebung von $f(a)$ eine Umgebung der Form $(f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon)$ enthält, und weil es ausreicht, eine Umgebung der Form $U = (a-\delta, a+\delta)$ zu finden, lässt sich die Stetigkeit in a durch folgenden Satz beschreiben.



Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass für alle x mit $|x-a| < \delta$ gilt $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

In den obigen Abbildungen ist versucht worden, die Definition von Stetigkeit bildlich darzustellen. Ein 100% korrektes Bild kann nicht gezeichnet werden, da die Stetigkeit ein dynamischer Prozess ist: Zuerst wird ein beliebiges ε gewählt und danach müssen wir ein δ finden.

Diese Reihenfolge ist schwer in einem Bild zu vermitteln.

Die Stetigkeit ist äquivalent zur Folgenstetigkeit. Die Folgenstetigkeit in a wird beschrieben durch die einprägsame Formel

$$f\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) = \lim_{n\to\infty} f(a_n)$$

für jede konvergente Folge (a_n) mit Grenzwert a. Es ist bequem, die verschiedenen Formulierungen von Stetigkeit nebeneinander zu benutzen. Die Folgenstetigkeit erlaubt es uns nämlich, die Rechenregeln für stetige Funktionen sofort herzuleiten, weil sie aus den Rechenregeln für Grenzwerte von Folgen folgen.

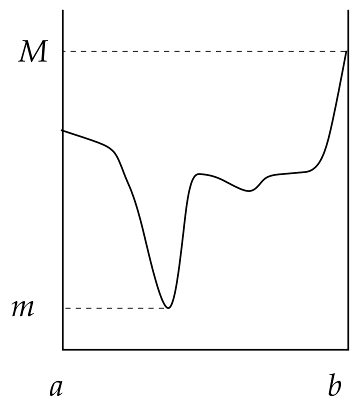
Der Zwischenwertsatz zeigt uns, dass die Graphen von stetigen Funktionen tatsächlich keine Sprünge haben.

> *Ist f stetig und $f(a) < c < f(b)$, so gibt es ein $\xi \in (a, b)$ mit $f(\xi) = c$.*

Glücklicherweise ist der Beweis konstruktiv: Sobald man in der Lage ist, Funktionswerte $f(x)$ auszurechnen (oder besser noch: wenn man entscheiden kann, ob $f(x) < c$ oder $f(x) > c$), lässt sich die Binärentwicklung oder die Dezimalentwicklung einer solchen Zahl ξ bestimmen. Insbesondere kann man hierdurch oft die Nullstellen von f finden, also diejenigen ξ, für die gilt: $f(\xi) = 0$. Ehrlichkeitshalber muss man dazu sagen, dass die vorgestellte Methode langsam ist, dafür aber leicht zu verstehen. Wenn die Differenzialrechnung zur Verfügung steht, werden wir bessere Methoden kennenlernen (Newtonsche Methode).

Ein weiterer Satz, welcher offensichtlich erscheint, ist folgender:

> *Ist $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, so hat f auf $[a, b]$ ein Maximum M (und ein Minimum m).*



Das nebenstehende Bild illustriert diesen Satz. Dem Autor ist kein konstruktiver Beweis dieses Satzes bekannt. Wir können hier kein Verfahren angeben, welches dieses Maximum bestimmt. Für differenzierbare Funktionen, welche im nächsten Kapitel behandelt werden, sieht es besser aus. Mit ihrer Hilfe kann man mögliche Maximalwerte bestimmen.

Das nächste Thema ist der Grenzwert. Dieser Begriff ist leicht zu verstehen für stetige Funktionen $f\colon A \to \mathbb{R}$.

Die Definition lautet in etwa wie folgt: Ist a ein Häufungspunkt von A, so gilt $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$. Wenn f nicht stetig ist, so suchen wir eine stetige Funktion mit $g(x) = f(x)$ für $x \neq a$. Es gilt dann $\lim\limits_{x\to a} f(x) = g(a)$.

Mit dieser Definition lassen sich die Rechenregeln für Grenzwerte sofort aus denen für stetige Funktionen ableiten. Der Grenzwertbegriff kann auch wie nachfolgend beschrieben werden:

> $\lim_{x \to a} f(x) = b$ *genau dann, wenn es für jedes* $\varepsilon > 0$ *ein* $\delta > 0$ *gibt, so dass für jedes* $x \in A$ *mit* $0 < |x - a| < \delta$ *gilt:* $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Wenn man $\lim_{x \to a} f(x) = b$ nachweisen möchte, so wird letztere Beschreibung oft benutzt.

Die Begriffe einseitiger Grenzwert $\lim_{x \nearrow a} f(x) = b$ und $\lim_{x \searrow a} f(x) = b$ können wir auf ähnliche Weise behandeln, so wie die Fälle $\lim_{x \to \infty} f(x) = b$, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = b$, $\lim_{x \nearrow a} f(x) = \infty$, $\lim_{x \searrow a} f(x) = \infty$, $\lim_{x \nearrow a} f(x) = -\infty$ und $\lim_{x \searrow a} f(x) = -\infty$.

In Abschnitt 3.8 behandeln wir die Exponentialfunktion a^x für $a > 0$ und in Abschnitt 3.9 die Logarithmusfunktion $\log_a(x)$ zur Basis $a > 0$. Diese sind zueinander inverse Funktionen, also

$$y = a^x \text{ genau dann, wenn } x = \log_a(y) \; .$$

Es reicht deshalb, entweder die Exponentialfunktion oder die Logarithmusfunktion zu definieren. Wir ziehen es vor, zuerst die Exponentialfunktion zu definieren. Die Definition hätten wir übrigens schon im ersten Kapitel geben können, allerdings wäre es schwerer gewesen, die Eigenschaften der Exponentialfunktion nachzuweisen.

Wegen $a^{-x} = 1/a^x$ und $(1/a)^x = a^{-x}$, reicht es aus, den Fall $x > 0$ und $a > 1$ zu betrachten. Ist n eine natürliche Zahl, so ist a^n natürlich nichts anderes als $\underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{n}$.

Wegen der bekannten Rechenregel $\sqrt{a^{2x}} = a^x$ gibt es nur eine Möglichkeit, a^x für endliche Binärentwicklung festzulegen. Sei $k \in N_0$ die kleinste Zahl mit $2^k x \in \mathbb{N}$. Ist $k = 0$, so ist $x \in \mathbb{N}$ und a^x schon definiert. Sonst ist $2^{k-1} 2x \in \mathbb{N}$, mit Induktion a^{2x} deshalb definiert und wir definieren dann a^x durch $a^x := \sqrt{a^{2x}}$.

Die Zahl a^x sollte natürlich gut angenähert werden durch $a^{\lfloor x \rfloor_n}$. Die Funktion a^x sollte stetig sein. Deshalb haben wir keine andere Wahl als zu definieren:

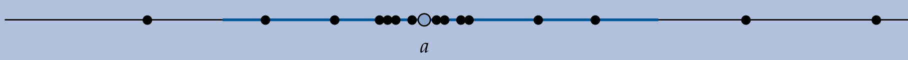
$$a^x := \lim_{n \to \infty} a^{\lfloor x \rfloor_n} \; .$$

An dieser Stelle müssen alle Rechenregeln für die Funktion a^x nachgerechnet werden. Die Stetigkeit von $\log_a(x)$ folgt dann aus der Tatsache, dass Umkehrfunktionen stetiger Funktionen stetig sind, siehe Abschnitt 3.7.

Am Ende des Kapitels betrachten wir noch Häufungspunkte und Cauchyfolgen.

3.1 Konvergente Folgen

Eine Folge $(a_n) = a_1, a_2, a_3, \dots$ reeller Zahlen heißt **konvergent** mit Grenzwert a, wenn für jede Umgebung V von a gilt, dass $a_n \in V$ für fast alle (d. h. bis auf endliche viele) natürliche Zahlen n. Notation: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.



Eine konvergente Folge mit Grenzwert 0 nennt man eine **Nullfolge**. Eine nicht konvergente Folge nennt man **divergent.**

Der Grenzwert ist eindeutig bestimmt. Sind nämlich $a < b$ zwei Grenzwerte der Folge (a_n), so ist $V = (-\infty, \frac{a+b}{2})$ eine Umgebung von a und $W = (\frac{a+b}{2}, \infty)$ eine Umgebung von b. Nun kann a_n nicht gleichzeitig ein Element von V und von W sein. Da jede Umgebung von a eine Umgebung der Form $\{x\colon |x-a| < \varepsilon\}$ enthält, gilt:

Lemma 3.1 Eine Folge (a_n) ist konvergent mit Grenzwert a genau dann, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein N existiert, so dass für alle $n \geq N$ gilt $|a_n - a| < \varepsilon$.

Satz 3.2

1 Eine wachsende (fallende) beschränkte Folge (a_n) ist konvergent.

2 Es seien (a_n) und (b_n) konvergente Folgen mit den Grenzwerten a und b.

a. $(a_n) + (b_n)$ ist konvergent und $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

b. $(a_n \cdot b_n)$ ist konvergent und $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

c. Ist $b_n \neq 0$ für alle n und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$, so ist (a_n/b_n) konvergent und $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n/b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n / \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

1 Sei $a = \sup\{a_n\colon n \in \mathbb{N}\}$, es folgt $a_n \leq a$. Für $\varepsilon > 0$ ist $a - \varepsilon$ keine obere Schranke, deshalb gibt es ein N mit $a_N > a - \varepsilon$ und für $n \geq N$: $a - \varepsilon < a_N \leq a_n < a + \varepsilon$.

2 **a.** Wähle N_1 mit $|a_n - a| < \varepsilon/2$ für alle $n \geq N_1$ und $N \geq N_1$ mit $|b_n - b| < \varepsilon/2$ für alle $n \geq N$. Dann ist für $n \geq N$: $|(a_n + b_n) - (a+b) \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \varepsilon$.

b. Sei $\varepsilon > 0$ und N_1, so dass $-2|b| < b_n < 2|b|$ für alle $n \geq N_1$, $N_2 \geq N_1$, so dass $|a_n - a| \leq \varepsilon/(4|b|)$ für alle $n \geq N_1$, und $N \geq N_2$, so dass $|b_n - b| \leq \frac{\varepsilon}{2(|a|)}$ für alle $n \geq N$. Dann ist für $n \geq N$:

$$|a_n b_n - ab| = |(a_n - a)b_n + (b_n - b)a| \leq |(a_n - a)b_n| + |(b_n - b)a| < \frac{\varepsilon}{4|b|} 2|b| + \frac{\varepsilon}{2|a|}|a| < \varepsilon \,.$$

c. Wir brauchen wegen b nur den Fall $a_n = 1$ zu zeigen. Es gibt ein N_1 mit $|b_n| > |b|/2$ für $n \geq N_1$, und wähle $N \geq N_1$ mit $|b_n - b| < \varepsilon \cdot b^2/2$. Dann gilt für $n \geq N$: $\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \frac{|b - b_n|}{b b_n} < \frac{\varepsilon b^2/2}{b^2/2} = \varepsilon$. ■

Aufgaben

CWS COMPANION WEBSITE WWW.PEARSON-STUDIUM.DE Lösung

Aufgabe 3.1 Zeigen Sie, dass die nachfolgenden Folgen konvergieren, und bestimmen Sie den Grenzwert.

1. $\left(\frac{1}{n}\right)$
2. $\left(\frac{1}{n^2}\right)$
3. $\left(\frac{1}{n^3}\right)$
4. $\left(\frac{1}{n^3-1}\right)$
5. $\left(\frac{3n+8}{5n-2}\right)$
6. $\left(\frac{2n^2+2n+5}{6n^2+7n-1}\right)$
7. $\left(\frac{n^2+7}{n^3}\right)$

Aufgabe 3.2

1. Es sei (a_n) eine konvergente Folge. Zeigen Sie, dass sie beschränkt ist, d. h., es gibt ein K mit $|a_n| \leq K$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.
2. Sei (a_n) eine konvergente Folge mit Grenzwert $a \neq 0$ und $a_n \neq 0$ für alle n. Warum gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = 1$?
3. Finden Sie eine Nullfolge (a_n), so dass (a_n/a_{n+1}) nicht konvergiert.

Aufgabe 3.3

1. Bei einer konvergenten Folge spielt das Verhalten der ersten N Glieder überhaupt keine Rolle. Zeigen Sie deshalb: Ist (a_n) eine beschränkte Folge mit $a_N \leq a_{N+1} \leq a_{N+2} \leq \cdots$, so ist (a_n) konvergent. Ebenfalls für beschränkte Folgen mit $a_N \geq a_{N+1} \geq \cdots$.
2. Sei $0 < q < 1$ eine feste reelle Zahl. Begründen Sie, dass (q^n) eine konvergente Folge ist. Benutzen Sie den zweiten Teil der vorherigen Aufgabe, um zu zeigen, dass $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$. Zeigen Sie ebenfalls $\lim\limits_{n\to\infty} n^k q^n = 0$ für $k \in \mathbb{N}$.
3. Sei $q > 0$ eine feste reelle Zahl. Zeigen Sie, dass $(q^n/n!)$ eine konvergente Folge ist mit Grenzwert 0.

Aufgabe 3.4 Sei $-1 < x < 1$ und $a_n = 1+x+x^2+\cdots+x^n$. Zeigen Sie, dass $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{1-x}$. Warum ist diese Aussage vollkommen klar für $x = 1/2$?

Aufgabe 3.5 In dieser Aufgabe geben wir das Heron-Verfahren an, womit Sie sehr schnell gute Annäherungen von $\sqrt{a}$ finden können. (Diese Methode ist ein Spezialfall des Newton-Raphson-Verfahrens, siehe Satz 4.12 auf Seite 116.) Wir nehmen hier $a > 1$ und definieren eine Folge (x_n): Sei $x_1 = a$ und $x_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot (x_n + a/x_n)$.

1. Rechnen Sie nach: $(x_n - x_{n-1})^2 = x_n^2 - a$. Folgern Sie, dass $x_n^2 > a$.
2. Prüfen Sie, dass $x_1 > x_2 > x_3 \ldots > 1$. Folgern Sie, dass (x_n) konvergiert, und benutzen Sie Satz 3.2, 2b, um zu zeigen, dass der Grenzwert $\sqrt{a}$ ist.
3. Sei nun $a = 2$. Nehmen Sie ein geeignetes Computeralgebrasystem und berechnen Sie das kleinste n, so dass die ersten 100 Dezimalstellen von x_n mit denen von $\sqrt{2}$ übereinstimmen.
4. Benutzen Sie den ersten Teil der Aufgabe, um $x_n - \sqrt{a} \leq \frac{1}{2}(x_{n-1} - x_n)^2$ zu zeigen. Erklären Sie, dass man hiermit schnell gute Annäherungen der Quadratwurzel von a berechnen kann.

3.2 Einschließungssatz, Divergenz gegen $\pm\infty$

Satz 3.3

1 Sind (a_n) und (b_n) konvergent mit $a_n \leq b_n$ für fast alle n (d. h. bis auf endlich viele n), so ist $a := \lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n =: b$.

2 **(Einschließungssatz)** Es seien (a_n) und (b_n) konvergente Folgen mit $a = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$. Ist $a_n \leq c_n \leq b_n$ für fast alle n, so ist auch (c_n) konvergent und $\lim_{n\to\infty} c_n = a$.

1 Wäre $a > b$, so betrachte $V := ((a+b)/2, \infty)$. $W = (-\infty, (a+b)/2)$. Dann $a_n \in V$ und $b_n \in W$ für fast alle n, also $b_n < a_n$ für fast alle n, Widerspruch! Also $a \leq b$.

2 Sei $\varepsilon > 0$. Dann ist $a_n, b_n \in (a-\varepsilon, b-\varepsilon)$ und $a_n \leq c_n \leq b_n$ für fast alle n. Dann ist ebenfalls $c_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ für fast alle n. Die Aussage $\lim_{n\to\infty} c_n = a$ folgt. ■

Beispiel: Es gilt $n! \geq 2^{n-1}$, siehe Aufgabe 1.6. Weil $a_n = 1 + 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n+1}$ für $x = 1/2$ gegen 3 konvergiert, folgt, dass (b_n) mit

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

eine wachsende Folge ist, welche gegen eine Zahl kleiner oder gleich 3 konvergiert.

Beispiel: Es sei (a_n) eine Folge positiver Zahlen mit Grenzwert $a > 0$. Wir zeigen, dass $\lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$. Es gibt ein $K > 0$ mit $a_n > K$ für jedes n. Es gibt nämlich ein N, so dass $a_n \geq a/2$ für $n \geq N$. Man nimmt für K das Minimum der Zahlen $a_1, \ldots, a_{N-1}$ und $a/2$. Es gilt

$$\left|\sqrt{a_n} - \sqrt{a}\right| = \left|\frac{a_n - a}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a}}\right| < \frac{1}{K}\,|a_n - a|\ .$$

Es folgt, dass $\lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$. Diese Aussage gilt ebenfalls, wenn $a = 0$ und $a_n \geq 0$ ist. Wir überlassen dem Leser den Nachweis.

Die Folge (a_n) divergiert gegen ∞ (bzw. $-\infty$), wenn für jede Zahl K gilt, dass $a_n > K$ (bzw. $a_n < K$) für fast alle n. Notation $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ (bzw. $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$).

Aufgaben

Lösung

Aufgabe 3.6 Berechnen Sie, wenn möglich, nachfolgende Grenzwerte.

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+\sqrt{n+2}}{\sqrt{n^4+7}}$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+3}-\sqrt{n-1}\right)\cdot\sqrt{n}$
4. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{4n^2-1}-2n\right)$
5. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+n+1}-n\right)$
6. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{4n^2-1}-3n\right)$
7. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x^n-1}{x^n+1}$ für $x\in\mathbb{R}$
8. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin(n)}{n+1}$
9. $\lim\limits_{n\to\infty} \prod\limits_{k=2}^{n}\left(1-\dfrac{1}{k^2}\right)$
10. $\lim\limits_{n\to\infty} \sin(n\alpha\pi)$ $\quad$ (α rational)

Aufgabe 3.7

1. Sei $a>0$, $a_1=a$ und $a_{n+1}=\sqrt{a_n}$. Warum gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=1$? (Spielen Sie mit Ihrem Taschenrechner: Drücken Sie wiederholt die $\sqrt{\ }$-Taste.)
2. Die Folge (a_n) sei gegeben durch $a_1=1$ und $a_{n+1}=\sqrt{6+a_n}$. Zeigen Sie, dass (a_n) monoton wachsend und beschränkt ist. Berechnen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Aufgabe 3.8 Sei $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Zeigen Sie, dass (a_n) eine konvergente Folge ist.

Aufgabe 3.9 Sei $a_1=h\geq 0$ und $a_{n+1}=a_n^2+\frac{3}{16}$. Bestimmen Sie, ob (a_n) konvergent ist, und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

Aufgabe 3.10

1. Es sei $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\infty$. Zeigen Sie, dass $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{a_n}=0$.
2. Es sei $a_n>0$ und (a_n) eine Nullfolge. Zeigen Sie, dass $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{a_n}=\infty$.
3. Sei $q>1$. Zeigen Sie, dass (q^n) gegen ∞ divergiert.
4. Es sei (a_n) eine konvergente Folge und (b_n) divergiere gegen ∞. Warum divergiert (a_n+b_n) ebenfalls gegen ∞?

Aufgabe 3.11 Sei

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}\,.$$

Zeigen Sie, dass $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\infty$.

3.3 Stetige Funktionen

Sei A eine Teilmenge von $\mathbb{R}$, $f\colon A \to \mathbb{R}$ und a ein Element von A.

1 Wir nennen f in a folgenstetig, wenn für jede konvergente Folge (a_n), $a_n \in A$, mit Grenzwert a gilt $f\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) = \lim_{n\to\infty} f(a_n)$.

2 Wir nennen f stetig in a, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle $x \in A$ mit $|x - a| < \delta$ gilt $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Satz 3.4 Eine Funktion ist stetig in a genau dann, wenn sie folgenstetig in a ist.

f sei stetig in a und (a_n) eine Folge in A mit $\lim a_n = a$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, so dass für alle $x \in A$ mit $|x - a| < \delta$ gilt $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Weiterhin existiert $N_{\delta(\varepsilon)}$, so dass für alle $n \geq N_\delta$ gilt $|a_n - a| < \delta$. Dann ist für alle $n \geq n_{\delta(\varepsilon)}$

$$|f(a_n) - f(a)| < \varepsilon\ .$$

Also ist f folgenstetig in a. Sei umgekehrt f folgenstetig in a. Wäre f nicht stetig in a, so gäbe es ein $\varepsilon > 0$, so dass für alle $\delta > 0$ ein $x \in D$ existiert mit $|x - a| < \delta$, aber $|f(x) - f(a)| \geq \varepsilon$. Setze $\delta_n = 1/n$. Dann gibt es für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \neq a$ mit $x_n \in A$, $|x_n - a| < 1/n$ und $|f(x_n) - f(a)| \geq \varepsilon$. Dies bedeutet, dass die Folge (x_n) gegen a konvergiert, jedoch die Folge $(f(x_n))$ nicht gegen $f(a)$, Widerspruch! ■

Satz 3.5

1 Sei $f\colon A \to R$, $f(A) \subset B$ stetig in a und $g\colon B \to \mathbb{R}$ stetig in B. Dann ist $g \circ f$ stetig in a.

2 Sind $f, g\colon A \to \mathbb{R}$ stetig in a, so auch $f + g$, $f \cdot g$ und f/g.

(Letzteres gilt nur, wenn $g(a) \neq 0$.)

1 Die Folge (a_n) konvergiere gegen a. Dann konvergiert $f(a_n)$ gegen $f(a) = b$ und $(g(f(a_n))$ gegen $g(b) = g(f(a))$.

2 Ist (a_n) eine konvergente Folge mit Grenzwert a, so gilt nach Satz 3.2:

$$\lim_{n\to\infty} (f + g)(a_n) = \lim_{n\to\infty} (f(a_n) + g(a_n)) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) + \lim_{n\to\infty} g(a_n)\ .$$

Die anderen Aussagen zeigt man analog. ■

Beispiel: Es folgt, dass alle Polynomfunktionen, wie z. B. $f(x) = x^4 - 3x^3 - x^2 + \pi x - 1$, stetige Funktionen sind. Auch *rationale* Funktionen, d. h. $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, wobei $p(x)$ und $q(x)$ Polynomfunktionen sind, sind stetig in allen a mit $q(a) \neq 0$.

Aufgaben

Lösung

Aufgabe 3.12 Die Funktion $f(x)$ ist gegeben durch:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{für } x \leq -1 \\ \frac{1}{2}x^2 & \text{für } -1 < x < 2 \\ \frac{5}{2} & \text{für } x = 2 \\ 2 & \text{für } x > 2 \end{cases}$$

Zeichnen Sie den Graphen von $f(x)$. Für welche Werte von x ist f nicht stetig?

Aufgabe 3.13 Für welche Werte von a und b ist $f(x)$ überall stetig:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{a}{x-2} & \text{für } x \leq 0 \\ 2x - b & \text{für } 0 < x < 2 \\ 6 & \text{für } x \geq 2 \end{cases}$$

Aufgabe 3.14 Die Funktion $f(x)$ sei überall stetig und für $x \neq \pm 2$ gleich $\dfrac{x^2 - 4}{|x| - 2}$. Berechnen Sie $f(-2)$ und $f(2)$.

Aufgabe 3.15 Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist für $x \neq 1, 2$ gleich $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 2}{x^2 - 3x + 3}$.

Ist es möglich, $f(1)$ und $f(2)$ so zu wählen, dass f stetig ist für $x = 1$ und $x = 2$?

Aufgabe 3.16

1. Warum gelten die Ungleichungen $|\sin(x)| < |x|$ und $2 - 2\cos(x) < x^2$? Folgern Sie, dass $\sin(x)$ und $\cos(x)$ in 0 stetig sind.
2. Benutzen Sie die Additionstheoreme, um zu zeigen, dass die Sinus- und die Cosinusfunktion für alle a in $\mathbb{R}$ stetig sind.

Aufgabe 3.17 Es sei I ein Intervall, $f\colon I \to \mathbb{R}$ stetig in einem Punkt $a \in I$ und $f(a) > c$ für ein a in I. Warum existiert eine Umgebung V von a, so dass $f(x) > c$ für alle $x \in V$?

Aufgabe 3.18 Die Funktion $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x^{n+1} + ax^2}{x^n + 2}$ sei stetig in 1. Berechne a.

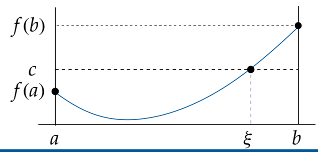
Aufgabe 3.19

1. Sei $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ für $x \neq 0$ und $f(0) = 0$. Zeigen Sie, dass $f(x)$ in 0 nicht (folgen)stetig ist.
2. Sei $g(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ für $x \neq 0$ und $g(0) = 0$. Zeigen Sie, dass $g(x)$ stetig ist in 0.

3.4 Der Zwischenwertsatz

Satz 3.6 (Zwischenwertsatz)

Es sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $f(a) < c < f(b)$. Dann gibt es ein $\xi \in (a,b)$ mit $f(\xi) = c$.



Ein solches ξ können wir einfach angeben: Sei ξ das Supremum der Menge

$$A = \left\{x \in [a,b] \colon f(x) < c\right\} .$$

Dann ist $f(\xi)$ tatsächlich gleich c: Wäre nämlich $f(\xi) < c$, so gäbe es ein $\eta > \xi$ mit $f(x) < c$ für alle $x \in (\xi, \eta)$. Also wäre ξ keine obere Schranke von A.

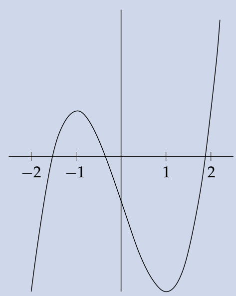
Wäre $f(x) > c$, so gäbe es $\eta < \xi$, so dass $f(x) > c$ für alle $x \in (\eta, \xi)$. Dann wäre auch η eine obere Schranke von A und ξ wäre nicht die *kleinste* obere Schranke. Es bleibt somit nur der Fall $f(\xi) = c$ übrig. ■

Existiert ein (positives) ξ mit $f(\xi) = c$, so gibt der Beweis der Existenz des Supremums (Satz 1.3) uns im Prinzip die Möglichkeit, eine Binärentwicklung oder eine Dezimalbruchentwicklung eines Elements ξ zu finden, sobald wir in der Lage sind, Funktionswerte auszurechnen. Nehmen wir einfachheitshalber an, dass $a, b \in \mathbb{N}$.

Bestimme zunächst die maximale natürliche Zahl $\lfloor x \rfloor_0$ mit $f(\lfloor x \rfloor_0) \le c$. Danach suche x_{-1} zwischen 0 und 9 maximal mit $f(\lfloor x \rfloor_1) \le c$ usw. Im Allgemeinen suche x_{-n} zwischen 0 und 9 maximal mit $f(\lfloor x \rfloor_n) \le c$ usw. Diese Methode, die Dezimalentwicklung von ξ zu bestimmen, haben wir schon bei $\sqrt{2}$ gesehen. Bei $\sqrt{2}$ suchen wir ein ξ mit $\xi^2 = 2$, dies ist das Beispiel $f(x) = x^2$.

Beispiel:
Wir suchen eine Nullstelle ξ der Gleichung $f(x) = x^3 - 3x - 1 = 0$. Wir sehen in dem Graphen drei Nullstellen. Wir werden die größte Nullstelle annähern.

$f(1) = -3$	$f(2) = 1$
$f(1,8) < 0$	$f(1,9) > 0$
$f(1,87) < 0$	$f(1,88) > 0$
$f(1,879) < 0$	$f(1,880) > 0$
$f(1,8793) < 0$	$f(1,8794) > 0$
$f(1,87938) < 0$	$f(1,87939) > 0$



Wir finden die Annäherung $\xi \approx 1,87938\cdots$ der größten Nullstelle.

Aufgaben

Lösung

Aufgabe 3.20 Bestimmen Sie fünf Nachkommastellen der beiden anderen Nullstellen von $f(x)$ in dem Beispiel auf der vorherigen Seite.

Aufgabe 3.21 Finden Sie zwei Nachkommastellen einer reellen Lösung der nachfolgenden Gleichungen. Sie können hierbei einen Taschenrechner benutzen.

1. $x^3 - 3x + 4 = 0$	2. $2x^3 - 2x^2 - 2x + 4 = 0$
3. $\sqrt{x} + \sqrt{x+1} - 4 = 0$	4. $\cos(x) - x = 0$
5. $x^3 - 15x + 10 = 0$	6. $x^4 + 25x^3 - 15 = 0$
7. $-x^5 - 4x^2 + 2\sqrt{x} + 5 = 0$	8. $\tan(x) + 2x - 5 = 0$

Aufgabe 3.22 Es sei $f\colon [0,2] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(0) = f(2)$. Zeigen Sie, dass ein $\xi \in [0,1]$ existieren mit $f(\xi) = f(\xi + 1)$.

Aufgabe 3.23 Zeichnen Sie den Graphen von $f(x) = \sqrt{2x+5}$ und $g(x) = 4 - x^2$. Zeigen Sie, dass zwei ξ existieren mit $f(\xi) = g(\xi)$ und finden Sie jeweils drei Nachkommastellen von ξ.

Aufgabe 3.24 Sei $f\colon [-1,1] \to [-1,1]$ stetig. Dann gibt es ein $\xi \in [-1,1]$ mit $f(\xi) = \xi$. Dieses ξ nennen wir einen Fixpunkt.

Bemerkung: Ist $D = \{(x,y)\colon x^2 + y^2 \leq 1\}$ die Kreisscheibe und $f\colon D \to D$ stetig (bis jetzt nicht im Buch definiert, siehe aber Abschnitt 4.12), so hat f einen Fixpunkt. Eine ähnliche Aussage gilt ebenso für höhere Dimensionen. Dieser Satz heißt der *Brouwersche Fixpunktsatz*. Der ist jedoch für höhere Dimensionen viel schwieriger zu beweisen.

3.5 Grenzwerte

Sei $f\colon A \to \mathbb{R}$ eine Funktion, a ein Häufungspunkt von A. Wir sagen, $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existiert genau dann, wenn es eine **in a stetige** Funktion $g\colon A \cup \{a\} \to \mathbb{R}$ gibt mit

$$g(x) = f(x) \text{ wenn } x \in A \text{ und } x \neq a\,.$$

Den Wert $g(a) = b$ nennen wir den Grenzwert von $f(x)$ für x gegen a, Notation $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$.

Hierbei ist $A \cup \{a\}$ die Menge, die aus A entsteht durch Hinzunahme von a (soweit a noch nicht zu A gehörte). Man nennt g eine in a stetige Fortsetzung von f.

Der Grenzwert b ist eindeutig bestimmt, denn er ist gleich $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)$ für eine beliebige konvergente Folge (a_n) in A mit Grenzwert a.

Eine andere Beschreibung des Grenzwertes ist durch den folgenden Satz gegeben, welcher direkt aus der Definition der Stetigkeit folgt.

Satz 3.7 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ genau dann, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle $x \in A$ mit $0 < |x - a| < \delta$ gilt $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Auf ähnliche Weise können wir einseitige Grenzwerte definieren.

Es sei $f\colon A \to \mathbb{R}$ gegeben. Sei $A^+ := \{x \in A\colon x > a\}$ und a ein Häufungspunkt von A^+. Wir definieren den rechtsseitigen Grenzwert: $\lim\limits_{x\searrow a} f(x) = b$ genau dann, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle $x \in A$ mit $0 < x - a < \delta$ gilt $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Auf analoge Weise definieren wir den linksseitigen Grenzwert $\lim\limits_{x\nearrow a} f(x) = b$.

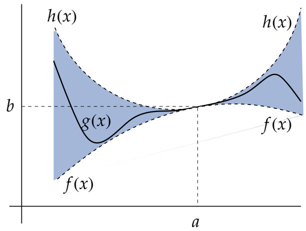
Sind A, a wie in obiger Definition und $f^+\colon A^+ \to \mathbb{R}$, gegeben durch $f^+(x) := f(x)$ für $x \in A^+$, so gilt $\lim\limits_{x\to a} f^+(x) = \lim\limits_{x\searrow a} f(x)$, vorausgesetzt, diese Grenzwerte existieren.

Aufgaben

Lösung

Aufgabe 3.25 Beweisen Sie die nachfolgenden **Rechenregeln** für Grenzwerte.

1. Es sei A eine Menge, a ein Häufungspunkt von A, $f, g\colon A \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$. Es sei $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ und $\lim\limits_{x\to a} g(x) = c$. Dann gilt:
   a. $\lim\limits_{x\to a} f(x) + g(x) = b + c$
   b. $\lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot g(x) = b \cdot c$
   c. Ist $c \neq 0$, so ist $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b}{c}$.
2. Sei a ein Häufungspunkt von A, b ein Häufungspunkt von B, $f\colon A \to B$. $g\colon B \to \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$
   und $\lim\limits_{y\to b} g(y) = c$.
   a. Ist g stetig in b, so gilt $\lim\limits_{x\to a} g(f(x)) = g(b)$.
   b. Ist $f(x) \neq b$ für alle $x \in A$ (z.B. $b \notin B$), dann ist $\lim\limits_{x\to a} g(f(x)) = \lim\limits_{y\to b} g(y)$.
3. **(Einschließungssatz)** Es sei a ein Häufungspunkt von A, $f, g, h\colon A \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ für alle x und $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = b$. Dann existiert auch $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ und ist gleich b.



Tipp: Diese Aufgabe ist nicht schwer. Benutzen Sie z.B. Satz 3.5.

Aufgabe 3.26 Sei $f(x) = -1$ für $x < 0$ und $f(x) = x$ für $x > 0$. Zeigen Sie, dass $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ nicht existiert.

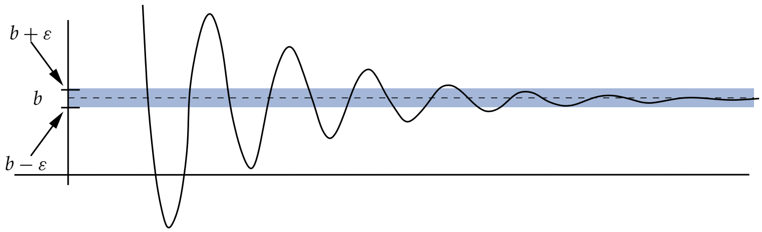
Aufgabe 3.27 Berechnen Sie die nachfolgenden Grenzwerte, falls sie existieren.

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1}$
2. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3 - 2x + 1}{x^2 - 1}$
3. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{3x^4 - 8x^3 + 16}{x^3 - 3x^2 + 4}$
4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3 + 4x - 6}{x^2 - 1}$
5. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^m - a^m}{x^n - a^n} (m, n \in \mathbb{N})$
6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{2+x} - \sqrt{2-x}}{x}$
7. $\lim\limits_{x\nearrow 1} \dfrac{1 + \sqrt{2-2x} - \sqrt{2x - x^2}}{1 - x + \sqrt{1 - x^2}}$
8. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{2x+1} - \sqrt{3x}}{\sqrt{x+3} - 2\sqrt{x}}$

3.6 Asymptote

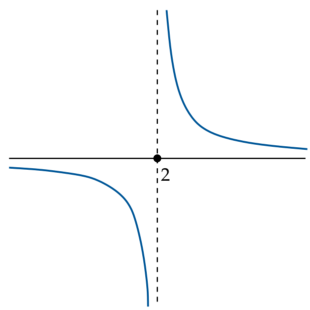
Es sei $f\colon \lfloor a, \infty \rfloor$ eine Funktion. Wir sagen, dass $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b$, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ ein K gibt, so dass für alle $x > K$ gilt, $|f(x) - b| < \varepsilon$.
Auf ähnliche Weise definiert man $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$.

Die geometrische Interpretation von $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b$ ist, dass sich der Graph von f für große x immer mehr an die Gerade $y = b$ anlehnt. Wir nennen diese Gerade in diesem Fall eine **waagerechte Asymptote** von f. Wir bemerken, dass $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b$ genau dann gilt, wenn für jede Folge (a_n), welche gegen ∞ divergiert, $\lim\limits_{n \to \infty} f(a_n) = b$ ist.



Sei $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir definieren $\lim\limits_{x \searrow a} f(x) = \infty$, wenn für alle $K \in \mathbb{R}$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass $f(x) > K$ für jedes $x \in \lfloor a, a + \delta \rfloor$.
Analog definiert man $\lim\limits_{x \searrow a} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \nearrow b} f(x) = \infty$ und $\lim\limits_{x \nearrow b} f(x) = -\infty$.

Auch diese Definition kann man wieder mit Hilfe von Folgen interpretieren. Wenn $\lim\limits_{x \searrow a} f(x) = \pm\infty$, so sagen wir, dass die Gerade $x = a$ eine **senkrechte Asymptote** des Graphen von f ist. In nebenstehendem Beispiel ist $\lim\limits_{x \searrow 2} f(x) = \infty$ und $\lim\limits_{x \nearrow 2} f(x) = -\infty$. Die Gerade $x = 2$ ist eine senkrechte Asymptote. Auf naheliegende Weise definiert man dann auch $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$.



Aufgaben

Lösung

Aufgabe 3.28 Bestimmen Sie die nachfolgenden Grenzwerte, falls sie existieren:

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+3x-4}{2x^3+7x-1}$
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x^3+2}{2x^2-6}$
3. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$
4. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^4-1}{4x^2-3}$
5. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt[3]{x^3+x^2}-x\right)$
6. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{4+x}-\sqrt{x}\right)\sqrt{x}$
7. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sin(x)}{x}$
8. $\lim\limits_{x\to\infty} \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$

Aufgabe 3.29

1. Geben Sie eine Definition für die Begriffe $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$.
2. Zeigen Sie: Ist $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ und $\lim\limits_{x\to a} g(x) = b$ für $b \in \mathbb{R}$, so ist $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x)) = \infty$.

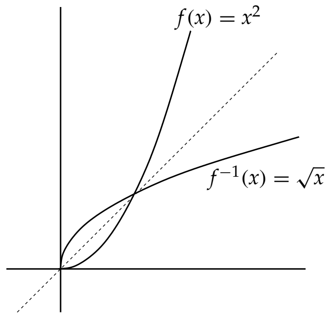
Aufgabe 3.30 Finden Sie die waagerechte und senkrechte Asymptote der nachfolgenden Funktionen.

1. $f(x) = \dfrac{x-2}{x^3-1}$
2. $f(x) = \dfrac{x^2+x}{x^2-1}$
3. $f(x) = \frac{1}{x}$
4. $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$
5. $f(x) = \dfrac{x+2}{x-3}$
6. $f(x) = \dfrac{x^3-4}{|x|^3+1}$
7. $f(x) = \dfrac{x^3-4}{x^3+1}$
8. $f(x) = \dfrac{1}{\cos(x)}$
9. $f(x) = \dfrac{(x-2)^2}{x^2-4}$
10. $f(x) = \dfrac{x+1}{x+2}$
11. $f(x) = \dfrac{\cos(x)}{x}$
12. $f(x) = \dfrac{2x-3}{x^2-x-6}$

Aufgabe 3.31 Eine Gerade $y = ax + b$ mit $a \neq 0$ heißt **schiefe Asymptote** von f, wenn $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)-(ax+b) = 0$ oder $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-(ax+b) = 0$. Bestimmen Sie die schiefen Asymptoten der nachfolgenden Funktionen.

1. $f(x) = \dfrac{2x^2-1}{x+3}$
2. $\dfrac{3x^3+2x^2}{-x^2-3x+2}$
3. $f(x) = \dfrac{x^4-3x^2-5}{x^2+3x-2}$
4. $x + \arctan(x)$

3.7 Umkehrfunktionen



Nehmen wir an, es existiert eine inverse Funktion zu f. Ein Punkt (x, y) liegt auf dem Graph von f genau dann, wenn (y, x) auf dem Graph von f^{-1} liegt. Wir bekommen den Graph von f^{-1} durch Spiegelung des Graphen von f in der Geraden mit der Gleichung $x = y$. Als Beispiel nehmen wir die Funktion $f\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$, gegeben durch $f(x) = x^2$; siehe die nebenstehende Abbildung. Die inverse Funktion ist $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.

Wir haben somit

$$f(x) = y \text{ genau dann, wenn } x = f^{-1}(y) .$$

Hieraus folgen die Gleichungen

$$f^{-1}(f(x)) = x \text{ und } f(f^{-1}(y)) = y .$$

Wenn man also die zu f inverse Funktion f^{-1} finden will, so muss man die Gleichung $f(x) = y$ nach x lösen: $x = f^{-1}(y)$. Voraussetzung ist dabei natürlich, dass diese Gleichung wirklich genau eine Lösung hat. Ist $f\colon A \to B$ mit A und B Teilmengen von $\mathbb{R}$, ist dies geometrisch folgendermaßen zu interpretieren: Für jedes b aus B **schneidet** die Gerade mit der Gleichung $y = b$ den Graph von f **genau einmal.**

Satz 3.8 Es sei I ein (offenes, halboffenes, abgeschlossenes) Intervall und $f\colon I \to \mathbb{R}$ sei streng monoton und stetig. Dann ist $J := f(I)$ auch ein (offenes, halboffenes, abgeschlossenes) Intervall und die Umkehrfunktion $f^{-1}\colon J \to I$ ist auch stetig.

Aus dem Zwischenwertsatz folgt sofort, unter Benutzung der Aufgabe 1.33, dass $f(I) = \{f(x)\colon x \in (a, b)\}$ ein Intervall ist. Wir betrachten nur den Fall $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ monoton wachsend. Die restlichen Fälle werden dem Leser überlassen.
Sei $c \in (a, b)$ und $d = f(c)$. Sei $\varepsilon > 0$ mit $\varepsilon < c - a$ und $\varepsilon < b - c$. Wähle δ mit $f(c - \varepsilon) < d - \delta < d < d + \delta < f(c + \varepsilon)$. Dann ist für alle $x \in (d - \delta, d + \delta)$

$$f(c - \varepsilon) < x < f(c + \varepsilon)$$

also

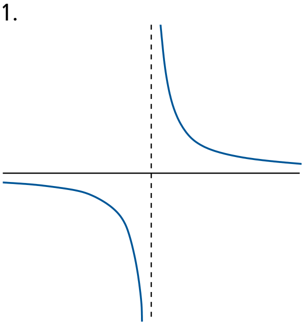
$$c - \varepsilon < f^{-1}(x) < c + \varepsilon . \qquad \blacksquare$$

Aufgaben

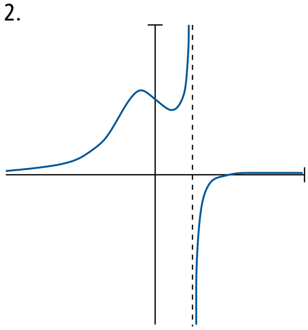
Lösung

Aufgabe 3.32 Hier sind Graphen einiger Funktionen f gezeichnet. Bestimmen Sie, ob f eine Umkehrfunktion hat, und zeichnen Sie gegebenenfalls den Graph der Umkehrfunktion.

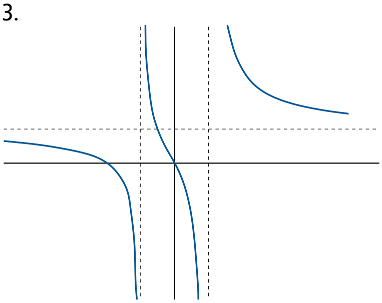
1.



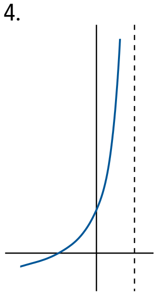
2.



3.



4.



Aufgabe 3.33 Bestimmen Sie, welche der nachfolgenden Funktionen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Umkehrfunktion haben, und bestimmen Sie diese gegebenenfalls.

1. $f(x) = 2x$ 2. $f(x) = -3x + 7$ 3. $f(x) = x^4$ 4. $f(x) = 1/(x+3),\ f(-3) = 0$

Aufgabe 3.34 Bestimmen Sie die inverse Funktion zu den nachfolgenden Funktionen. Bestimmen Sie den Wertebereich.

1. $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$ 2. $f(x) = \dfrac{4x-3}{5}$ 3. $f(x) = \dfrac{1}{2x+3}$

Rechnen Sie jeweils nach, dass $f^{-1}(f(x)) = x$.

3.8 Die Exponentialfunktion

Für eine natürliche Zahl n und $a > 0$ ist a^n definiert durch $a^n = \prod_{j=1}^{n} a$. Wir definieren für alle $x \in \mathbb{R}$ und $a > 0$ die Exponentialfunktion a^x.

Für eine endliche Binärzahl $x = x_\ell \ldots x_0, x_{-1} \ldots x_{-k} = \sum_{j=-k}^{\ell} x_j 2^j$ und $a > 0$ definieren wir die Zahl a^x induktiv nach k.
Ist $k = 0$, so ist $x \in \mathbb{N}_0$ und a^x schon definiert. Sonst definieren wir $a^x := \sqrt{a^{2x}}$.

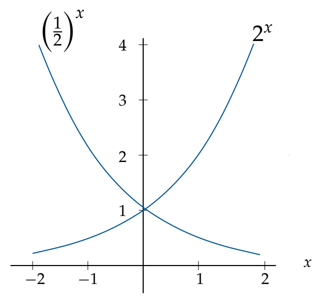
Da $2x = \sum_{j=-k+1}^{\ell+1} x_{j-1} 2^j$, ist somit a^{2x} induktiv definiert.

Ist nun x eine reelle Zahl und $a > 1$, so ist die Folge $(a^{\lfloor x \rfloor_n})$ monoton wachsend. Wir werden zeigen, dass die Folge beschränkt ist, und deshalb ist die nachfolgende Definition sinnvoll.

Ist $a > 1$ und $x > 0$, so definieren wir $a^x := \lim\limits_{n\to\infty} a^{\lfloor x \rfloor_n}$, für $x < 0$ setzen wir $a^x := 1/a^{-x}$.
Ist $0 < a < 1$, so definieren wir $a^x := (1/a)^{-x}$.

Satz 3.9

1. Der Wert a^x ist wohldefiniert.
2. Ist $x < y$ und $a > 1$, dann ist $a^x < a^y$.
3. Die Funktion $f(x) = a^x$ ist stetig ($a > 0$).
4. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ ($a > 0$)
5. $(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$ ($a, b > 0$)
6. Die Funktion $f(x) = x^a$ ist stetig ($x > 0$).
7. $(a^x)^y = a^{xy}$ ($a > 0$)



Beispiel: Wir berechnen die ersten dezimalen Nachkommastellen von $3^{\sqrt{2}}$, wobei wir die ersten sieben Binärstellen von $\sqrt{2}$ benutzen, also $\sqrt{2} = 1{,}0110101\ldots$ Dann gilt $2^7\sqrt{2} \approx 10110101 = 181$ und $3^{181} \approx 2{,}28520 \cdot 10^{86}$. Nach siebenmaligem Drücken der $\sqrt{\ }$-Taste erhalten wir $3^{\sqrt{2}} \approx 4.72801$. Eine andere, aber ähnliche Methode besteht darin, $a_i = 3^{2^{-i}}$ zu berechnen. Es gelten die Annäherungen:

i	1	2	3	4	5	6	7
a_i	1.73205	1.31607	1.14720	1.07107	1.03492	1.01731	1.00861

Also $3^{\sqrt{2}} \approx 3a_2a_3a_5a_7 \approx 4.72801$. Der „richtige“ Wert ist $4{,}72880\ldots$. Später werden wir schnellere Methoden zur Berechnung von a^x, insbesondere $3^{\sqrt{2}}$, kennenlernen.

Aufgaben

CWS COMPANION WEBSITE WWW.PEARSON-STUDIUM.DE
Lösung

Aufgabe 3.35 In dieser Aufgabe sollten Sie einen Taschenrechner benutzen. In den nachfolgenden Beispielen berechnen Sie jeweils sieben binäre Nachkommastellen von x und berechnen Sie hiermit eine Annäherung von a^x, genau wie im Beispiel auf der vorherigen Seite. Vergleichen Sie das Ergebnis mit einer „direkten" Berechnung von a^x auf dem Taschenrechner.

1. $a = 2,\ x = \sqrt{2}$ 2. $a = 2,\ x = \sqrt{3}$
3. $a = \pi,\ x = \pi$ 4. $a = 5,\ x = \sqrt{5}$

Tipp: Berechnen Sie $2^7\sqrt{2}$ mit dem Taschenrechner.

Aufgabe 3.36 Sei $a > 0$ mit $a \neq 1$. Zeigen Sie, dass $a^x + a^{-x} \geq 2$ und $a^x + a^{-x} = 2$ genau dann, wenn $x = 0$.

Aufgabe 3.37 Lösen Sie die nachfolgenden Gleichungen.

1. $2^{x^2-1} = 4$ 2. $2^{|x|} = 8$ 3. $4^x - 2^x - 2 = 0$
4. $10^{3x+5} = 1$ 5. $9^x - 3^x - 3^{x+1} + 3 = 0$ 6. $2^x + 3^x = 13$

Aufgabe 3.38 Sei $a > 1$. Begründen Sie die Aussagen $\lim\limits_{x\to\infty} a^x = \infty$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0$. Was gilt für $0 < a < 1$?

Aufgabe 3.39 Bestimmen Sie die nachfolgenden Grenzwerte.

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2^x - 1}{2^x + 1}$ 2. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2^x - 1}{2^x + 1}$ 3. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2^x - 1}{2^{-x} + 1}$
4. $\lim\limits_{x\nearrow 0} \dfrac{2^x - 1}{2^x + 1}$ 5. $\lim\limits_{x\nearrow 0} \dfrac{2^x + 1}{2^x - 1}$ 6. $\lim\limits_{x\searrow 0} \dfrac{2^x + 1}{2^x - 1}$

Aufgabe 3.40 In dieser Aufgabe dürfen Sie ein Rechengerät verwenden, aber Sie dürfen hierbei die a^x-Funktion nur für $x \in \mathbb{N}$ benutzen.
Begründen Sie die nachfolgenden Ungleichungen.

1. $1{,}071 < 2^{0,1} < 1{,}072$ 2. $1{,}116 < 3^{0,1} < 1{,}117$ 3. $1{,}258 < 10^{0,1} < 1{,}259$

Ausgehend von diesen Werten, berechnen Sie zwei Nachkommastellen von

4. $2^{0,2}$ 5. $3^{0,2}$ 6. $10^{0,3}$.

Beweis des Satzes 3.9

Wir nehmen, soweit nicht anders erwähnt, an, dass $a > 1$. Den Fall $0 < a < 1$ leitet man leicht hieraus ab. Für natürliche Zahlen n, m leitet man die Rechenregeln $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ und $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$ sofort aus der Definition ab. Ebenfalls ist für natürliche Zahlen n, m mit $n < m$ die Ungleichung $a^n < a^m$ klar. Wir werden im Folgenden die bekannte Identität $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ $(a, b > 0)$ benutzen sowie $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ für $0 < a < b$.

Lemma 3.10 Ist $a, b > 0$ und sind x, y endliche Binärzahlen, so gilt:

1 Ist $a > 1$ und $x < y$, so ist $a^x < a^y$.
2 $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$
3 $(ab)^x = a^x b^x$
4 $(a^x)^y = a^{xy}$

In den ersten drei Teilaussagen sei $k \in \mathbb{N}_0$ die kleinste Zahl mit $2^k x$ und $2^k y \in \mathbb{N}$ und der Beweis wird durch Induktion nach k erbracht.

1 Es gilt $2x < 2y$ und deshalb $a^x = \sqrt{a^{2x}} < \sqrt{a^{2y}} = a^y$.

2 $a^x \cdot a^y = \sqrt{a^{2x}} \cdot \sqrt{a^{2y}} = \sqrt{a^{2x} \cdot a^{2y}} = \sqrt{a^{2(x+y)}} = a^{x+y}$

3 $(a \cdot b)^x = \sqrt{(a \cdot b)^{2x}} = \sqrt{a^{2x} \cdot b^{2x}} = \sqrt{a^{2x}} \cdot \sqrt{b^{2x}} = a^x \cdot b^x$

4 Die Gleichung $(a^x)^y = a^{xy}$ zeigen wir erst für $y \in \mathbb{N}$. Bemerke:

$$(\sqrt{a})^y = \underbrace{\sqrt{a} \cdot \ldots \cdot \sqrt{a}}_{y} = \sqrt{a^y}\,.$$

Ist nun $k \geq 0$ minimal mit $2^k x \in \mathbb{N}$ und $y \in \mathbb{N}$, so gilt mit Induktion nach k

$$(a^x)^y = \left(\sqrt{a^{2x}}\right)^y = \sqrt{(a^{2x})^y} = \sqrt{a^{2xy}} = a^{xy}$$

Ist nun x eine beliebige endliche Binärzahl und $k \geq 0$ minimal mit $2^k y \in \mathbb{N}$, so folgt mit Induktion nach k:

$$(a^x)^y = \sqrt{(a^x)^{2y}} = \sqrt{a^{2xy}} = a^{xy}\,.$$

■

Beweis von Satz 3.9 Ist x eine Binärentwicklung, so gibt es eine natürliche Zahl k mit $\lfloor x \rfloor_n < k$ für jedes n. Also ist $(a^{\lfloor x \rfloor_n})$ beschränkt durch a^k. Weil $\lfloor x \rfloor_n \leq \lfloor x \rfloor_{n+1}$, ist die Folge $(a^{\lfloor x \rfloor_n})$ monoton wachsend. Deshalb existiert der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} a^{\lfloor x \rfloor_n}$.

1 Es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a^{2^{-n}} = 1$, siehe Aufgabe 3.7. Sind x und y zwei verschiedene Binärentwicklungen der gleichen Zahl, wobei x eine endliche Binärentwicklung ist, so ist für n groß $\lfloor x \rfloor_n = \lfloor y \rfloor_n + 2^{-n}$ und

$$\lim_{n\to\infty} a^{\lfloor x \rfloor_n} = \lim_{n\to\infty} a^{\lfloor y \rfloor_n + 2^{-n}} = \lim_{n\to\infty} a^{\lfloor y \rfloor_n} \cdot \lim_{n\to\infty} a^{2^{-n}} = \lim_{n\to\infty} a^{\lfloor y \rfloor_n}\,.$$

2 Sind c, d endliche Binärzahlen $0 < x < c < d < y$, dann folgt $a^x \leq a^c < a^d \leq a^y$. Ist $x < 0 < y$, so ist $a^x = 1/a^{-x} < 1 < a^y$. Ist $x < y < 0$, so ist $a^x = 1/(a^{-x}) < 1/a^{-y} = a^y$.

3 Wegen $\lim\limits_{k\to\infty} a^{1/2^k} = 1$ gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein k mit

$$1 - \varepsilon < a^{-1/2^k} < a^{1/2^k} < 1 + \varepsilon$$

Ist nun $-1/2^k < x < 1/2^k$, so folgt $1 - \varepsilon < a^{-1/2^k} < a^x < a^{1/2^k} < 1 + \varepsilon$. Daher ist a^x in $x = 0$ stetig.

Sei nun $b > 0$ beliebig, dargestellt durch eine nicht endliche Binärentwicklung. Sei $\varepsilon > 0$ und k gegeben mit $a^b - a^{\lfloor b \rfloor_k} < \varepsilon$. Ist nun $\lfloor b \rfloor_k < x < b$, dann gilt $a^b - \varepsilon < a^{\lfloor b \rfloor_k} \leq a^x \leq a^b$, die Funktion a^x ist somit linksseitig stetig in b. Für die rechtsseitige Stetigkeit nehmen wir ein k mit $a^{1/2^{k-1}} - 1 < \varepsilon / a^b$. Es ist $b < \lfloor b \rfloor_k + \frac{1}{2^{k-1}}$. Ist nun $b < x < \lfloor b \rfloor_k + \frac{1}{2^{k-1}}$, so folgt wie oben $a^{\lfloor b \rfloor_k} \leq a^b \leq a^x \leq a^{\lfloor b \rfloor_k + 1/2^{k-1}}$ und somit

$$a^x - a^b \leq a^{\lfloor b \rfloor_k + 1/2^{k-1}} - a^{\lfloor b \rfloor_k} = a^{\lfloor b \rfloor_k}(a^{1/2^{k-1}} - 1) < a^{\lfloor b \rfloor_k} \varepsilon / a^b < \varepsilon \,.$$

Also ist a^x auch rechtseitig stetig in b. Weil $a^{-x} = 1/a^x$, folgt Stetigkeit für alle $b < 0$.

4 Wir benutzen die (Folgen)Stetigkeit der Funktion a^x und Lemma 3.10, Nr. 2:

$$\begin{aligned} a^{x+y} &= a^{\lim\limits_{n\to\infty}(\lfloor x \rfloor_n + \lfloor y \rfloor_n)} = \lim_{n\to\infty} a^{\lfloor x \rfloor_n + \lfloor y \rfloor_n} = \lim_{n\to\infty} \left(a^{\lfloor x \rfloor_n} \cdot a^{\lfloor y \rfloor_n} \right) \\ &= \lim_{n\to\infty} a^{\lfloor x \rfloor_n} \cdot \lim_{n\to\infty} a^{\lfloor y \rfloor_n} = a^x \cdot a^y \end{aligned}$$

5 Wegen Lemma 3.10, Nr. 3 gilt:

$$(a \cdot b)^x = \lim_{n\to\infty} (a \cdot b)^{\lfloor x \rfloor_n} = \lim_{n\to\infty} \left(a^{\lfloor x \rfloor_n} \cdot b^{\lfloor x \rfloor_n} \right) = \lim_{n\to\infty} a^{\lfloor x \rfloor_n} \cdot \lim_{n\to\infty} b^{\lfloor x \rfloor_n} = a^x \cdot b^x$$

6 Es reicht, dies für $a > 0$ zu zeigen. Ist $a < n$, so folgt $1 \leq x^a \leq x^n$ für $x > 1$. Da x^n stetig ist, folgt:

$$1 \leq \lim_{x \searrow 1} x^a \leq \lim_{x \searrow 1} x^n = 1 \,.$$

Dann gilt auch $\lim\limits_{x \nearrow 1} x^a = \lim\limits_{x \searrow 1} (1/(1/x)^a) = 1$. Also ist $f(x) = x^a$ stetig in $x = 1$. Ist $b > 0$, dann $\lim\limits_{x\to b} x^a = b^a \lim\limits_{x\to b} (x/b)^a = b^a$, somit ist $f(x) = x^a$ in $x = b$ stetig.

7 Wegen Lemma 3.10, Nr. 4 und weil a^x folgenstetig ist, gilt:

$$\left(a^{\lfloor x \rfloor_k} \right)^y = \lim_{n\to\infty} \left(a^{\lfloor x \rfloor_k} \right)^{\lfloor y \rfloor_n} = \lim_{n\to\infty} a^{\lfloor x \rfloor_k \lfloor y \rfloor_n} = a^{\lfloor x \rfloor_k y}$$

Weil x^a stetig ist, folgt hieraus, wiederum die Stetigkeit von a^x benutzend:

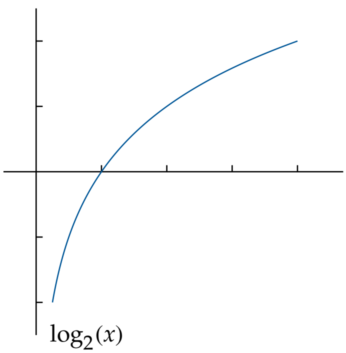
$$(a^x)^y = \left(\lim_{k\to\infty} a^{\lfloor x \rfloor_k} \right)^y = \lim_{k\to\infty} \left(a^{\lfloor x \rfloor_k} \right)^y = \lim_{k\to\infty} a^{\lfloor x \rfloor_k y} = a^{xy} \,.$$

■

3.9 Der Logarithmus

Die Exponentialfunktion $f(x) = a^x$ ist für $a > 1$ streng monoton wachsend. Die Wertemenge der Funktion ist $(0, \infty)$: Weil $1/a < 1$, ist $\left(\frac{1}{a^n}\right)$ eine Nullfolge. Es folgt, dass die Folge (a^n) von oben nicht beschränkt ist und somit jedes Element in $[1, \infty)$ in der Wertemenge von a^x ist. Genauso sehen wir, dass jedes Element aus $(0, 1)$ in der Wertemenge liegt.

Sei $a > 1$ und $f\colon \mathbb{R} \to (0, \infty)$, $f(x) = a^x$. Die zu f inverse Funktion wird mit $\log_a(x)$ bezeichnet und Logarithmus zur Basis a genannt. Diese Funktion $\log_a\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}$ ist stetig und $a^x = y \iff x = \log_a(y)$.



Hieraus erhalten wir nach den allgemeinen Formeln für Umkehrfunktionen:

$$x = a^{\log_a(x)}, \quad \log_a\left(a^x\right) = x\,.$$

Eine andere geläufige Notation für $\log_a(x)$ ist ${}^a\log(x)$.

Satz 3.11 (Rechenregeln für den Logarithmus)
Ist $a > 0, a \neq 1, x, y > 0$, dann:

$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$$
$$\log_a\left(b^x\right) = x \log_a(b)$$

$$\log_a(xy) = \log_a\left(a^{\log_a(x)} \cdot a^{\log_a(y)}\right) = \log_a\left(a^{\log_a(x) + \log_a(y)}\right) = \log_a(x) + \log_a(y)$$
$$\log_a(b^x) = \log_a\left(\left(a^{\log_a(b)}\right)^x\right) = \log_a\left(a^{x \log_a(b)}\right) = x \log_a(b)$$

Wir wenden die Funktion $\log_c$ auf beide Seiten der Gleichung $a^{\log_a(b)} = b$ an. Es folgt $\log_a(b) \cdot \log_c(a) = \log_c(b)$ oder anders geschrieben:

$$\log_a(b) = \frac{\log_c(b)}{\log_c(a)}\,.$$

Diese Gleichung besagt, dass es reicht, über ein (schnelles) Verfahren zur Berechnung der Logarithmen zu nur **einer** Basis c zu verfügen. Als Basis wird normalerweise die sogenannte eulersche Zahl $\mathrm{e} = 2{,}7182818\ldots$ gewählt, aus Gründen, die uns erst in einem späteren Kapitel klar werden können.

Aufgaben

Lösung

Aufgabe 3.41 Zeigen Sie: Für $a, b > 0$, $a, b \neq 1$ gilt $\log_a(b) = \dfrac{1}{\log_b(a)}$.

Aufgabe 3.42 Berechnen Sie:

1. $\log_2(4)$ 2. $\log_4(2)$ 3. $\log_{10}(100)$ 4. $\log_2(\sqrt{2})$
5. $\log_4(2^{10})$ 6. $\log_{49}(7)$ 7. $\log_8(2)$ 8. $\log_9(\sqrt[3]{3})$.

Aufgabe 3.43 Beweisen Sie, dass $10^3 < 2^{10} < 10^4$ gilt, und folgern Sie, dass $0,3 < \log_{10}(2) < 0,4$. Folgern Sie aus $10^{30} < 2^{100} < 10^{31}$, dass $0,30 < \log_{10}(2) < 0,31$.

Aufgabe 3.44 Es gilt $\log_{10}(2) \approx 0,30103$. Berechnen Sie Annäherungen von

1. $\log_{10}(4)$ 2. $\log_{10}(5)$ 3. $\log_{10}(20)$ 4. $\log_{10}\left(\sqrt{2}\right)$.

Aufgabe 3.45 Es gilt $\log_{10}(2) \approx 0,30103$ und $\log_2(7) \approx 2,80735$. Berechnen Sie Annäherungen von

1. $\log_{10}(7)$ 2. $\log_5(4)$ 3. $\log_{10}(14)$ 4. $\log_7(14)$.

Aufgabe 3.46

1. Es gelten die Ungleichungen $2^1 < 3 < 2^2$, $2^3 < 3^2 < 2^4$, $2^6 < 3^4 < 2^7$, $2^{12} < 3^8 < 2^{13}$, $2^{25} < 3^{16} < 2^{26}$. Leiten Sie hieraus ab, dass, in binärem System geschrieben, gilt $\log_2(3) = 1,1001\ldots$, also $1,5625 < \log_2(3) < 1,625$.
2. Zeigen Sie mit der gleichen Methode, dass $2,25 < \log_2(5) < 2,375$.

Aufgabe 3.47 Schreiben Sie mit der Methode der vorherigen Aufgabe ein Computerprogramm zur Berechnung von $\log_2(a)$ für $a > 1$ und testen Sie dieses. Schreiben Sie ebenfalls ein Programm, welches $\log_{10}(a)$ für $a > 1$ berechnet.

3.10 Maxima und Minima

Satz 3.12 Ist $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, so hat f ein Maximum und ein Minimum.

Wir zeigen zunächst, dass eine stetige Funktion f beschränkt ist, d. h., es gibt eine reelle Zahl M, so dass $f(x) \leq M$ für jedes $x \in [a,b]$.

Sei dazu s das Supremum der Menge $\{t \in [a,b]\colon g \text{ beschränkt auf } [a,t]\}$. Dann ist f auch auf $[a,s]$ beschränkt: Wegen der Stetigkeit von f gibt es ein $t < s$, so dass f auf $[t,s]$ beschränkt ist, und weil f auch auf $[a,t]$ beschränkt ist, folgt die Behauptung. Ist $s < b$, dann gibt es wegen der Stetigkeit ein $t > s$, so dass f auf $[a,t]$ beschränkt ist. Also ist $s = b$.

Wir zeigen, dass f ein Maximum hat. Es sei W die Wertemenge und M das Supremum von W, das somit eine (endliche) reelle Zahl ist. Ist M nicht in W, so betrachten wir die stetige Funktion $g(x) = \frac{1}{M-f(x)}$. Da $f(x)$ Werte in der Nähe von M hat, ist die Funktion $g(x)$ auf $[a,b]$ nicht beschränkt, Widerspruch, weil die Funktion $g(x)$ stetig auf $[a,b]$ ist und deshalb beschränkt sein sollte. ■

Satz 3.13 (Bolzano-Weierstraß) Sei (x_n) eine beschränkte Folge reeller Zahlen. Dann hat (x_n) eine konvergente Teilfolge, d. h., es gibt eine Folge natürlicher Zahlen $n_1 < n_2 < \cdots$, so dass (x_{n_k}) eine konvergente Folge ist.

Betrachte $A = \{x_n\colon n \in \mathbb{N}\}$. Hat A endlich viele Elemente, so gibt es $n_1 < n_2 < \cdots$ mit $x_{n_1} = x_{n_2} = \cdots$, also gibt es eine (konstante) konvergente Teilfolge. Sonst hat A einen Häufungspunkt p, siehe Satz 1.8. Dann wähle $n_1 = 1$ und induktiv $n_k > n_{k-1}$, so dass $|x_{n_k} - p| < 1/k$. ■

Wir können nun einen zweiten Beweis des Satzes 3.12 angeben. Sei

$$M = \sup\{f(x)\colon x \in [a,b]\}$$

Hierbei ist $M = \infty$ erlaubt, wenn f nicht beschränkt wäre. Wähle eine Folge (b_n) mit $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = M$ und $x_n \in [a,b]$ mit $f(x_n) = b_n$. Dann hat (x_n) eine konvergente Teilfolge (x_{n_k}) mit Grenzwert in $[a,b]$, es gilt deshalb mit $x = \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}$, dass $f(x) = f(\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}) = \lim\limits_{k\to\infty} b_{n_k} = M$, insbesondere ist $M < \infty$ eine reelle Zahl. ■

Aufgaben

COMPANION WEBSITE
Lösung

Aufgabe 3.48 Geben Sie ein Beispiel einer stetigen Funktion $f\colon (0,1] \to \mathbb{R}$, die kein Maximum hat.

Aufgabe 3.49 Geben Sie ein Beispiel einer Funktion $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, die kein Maximum hat.

Aufgabe 3.50 Geben Sie ein Beispiel einer nicht stetigen Funktion $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, welche trotzdem ein Maximum und ein Minimum hat.

Aufgabe 3.51 Es sei $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion.

1. Es sei $\lim\limits_{x\searrow a} f(x) = \infty$ und $\lim\limits_{x\nearrow b} f(x) = \infty$. Zeigen Sie, dass f auf (a,b) ein Minimum hat.
2. Was gilt, wenn $\lim\limits_{x\searrow a} f(x) = \lim\limits_{x\nearrow b} f(x) = -\infty$?
3. Was gilt, wenn $\lim\limits_{x\searrow a} f(x) = \infty$ und $\lim\limits_{x\nearrow b} f(x) = -\infty$?

Aufgabe 3.52 Sei $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ mit a_i reelle Zahlen und n eine gerade Zahl. Zeigen Sie, dass die Funktion f auf $\mathbb{R}$ ein Minimum annimmt, wenn $a_n > 0$, und ein Maximum, wenn $a_n < 0$.

Aufgabe 3.53 Sei $f\colon (a,b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $\lim\limits_{x\searrow a} f(x) = -\infty$. Zeigen Sie, dass f ein Maximum hat.

Aufgabe 3.54 Geben Sie ein Beispiel einer Funktion $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, welche kein Maximum und kein Minimum hat.

Aufgabe 3.55 Sei $A = \left\{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots\right\}$. Geben Sie eine stetige Funktion $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ an mit $f(x) = 0$ für $x \in A$ und $f(x) < 0$ für $x \notin A$.

Das Maximum kann somit in abzählbar vielen Punkten angenommen werden.

Aufgabe 3.56 Geben Sie ein Beispiel einer stetigen Funktion $f\colon (0,1] \to \mathbb{R}$, welche kein Maximum und auch kein Minimum hat.

3.11 Cauchyfolgen

Bei der Definition einer konvergenten Folge wurde der Grenzwert schon mit angegeben. Nun passiert es öfter, dass man die Konvergenz einer Folge nachweisen will, den Grenzwert aber nicht kennt. (Dies passiert im Prinzip schon bei monoton wachsenden beschränkten Folgen.) Um dennoch die Konvergenz der Folge nachweisen zu können, benutzt man des Öfteren den Begriff der Cauchyfolge. Wir werden diesen Begriff in diesem Buch nicht weiter benutzen.

Ein Folge (a_n) heißt eine Cauchyfolge, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein N existiert, so dass für alle $n, m \geq N$ gilt $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

Die geometrische Interpretation ist, dass die a_n beliebig nahe beieinander liegen für alle hinreichend großen n.

Satz 3.14 Eine Folge reeller Zahlen ist konvergent genau dann, wenn sie eine Cauchyfolge ist.

Ist (a_n) konvergent mit Grenzwert a, so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein N mit $|a_n - a| < \varepsilon/2$ für alle $n \geq N$. Dann folgt mit Hilfe der Dreiecksungleichung für $n, m \geq N$:

$$|a_n - a_m| = |(a_n - a) + (a - a_m)| \leq |a_n - a| + |a - a_m| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon\ .$$

Sei umgekehrt (a_n) eine Cauchyfolge. Dann ist (a_n) beschränkt, denn es gibt ein N, so dass für $n \geq N$ gilt $|a_n - a_N| < 1$, also $|a_n| < |a_N| + 1$. Es gilt dann, dass $|a_n| < \max\{|a_1|, \ldots, |a_{N-1}|, |a_N| + 1\}$ ist.

Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß 3.13 hat (a_n) eine konvergente Teilfolge. Sei a der Grenzwert dieser Teilfolge. Wir behaupten, dass $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ ist.

Sei $\varepsilon > 0$. Weil a ein Häufungspunkt und (a_n) eine Cauchyfolge ist, gibt es ein N mit den folgenden Eigenschaften:

$|a_N - a| < \varepsilon/2$ und $|a_n - a_N| < \varepsilon/2$ für $n \geq N$.
Es folgt für $n \geq N$:

$$|a_n - a| = |(a_n - a_N) + (a_N - a)| \leq |a_n - a_N| + |a_N - a| < \varepsilon\ .$$

∎