



**Manfred Albach**

# Grundlagen der Elektrotechnik 2

Periodische und nicht periodische  
Signalformen

2., aktualisierte Auflage

# Zeitlich periodische Vorgänge beliebiger Kurvenform

9.1	Grundlegende Betrachtungen .....	127
9.2	Die Harmonische Analyse .....	131
9.3	Anwendung der Fourier-Reihen in der Schaltungsanalyse .....	148

## Einführung

» In diesem Kapitel werden wir die Harmonische Analyse, auch als Fourier-Entwicklung bekannt, verwenden, um einen beliebigen periodischen Signalverlauf in eine Summe einzelner sinus- bzw. cosinusförmiger Schwingungen zu zerlegen. Die Grundschiwingung oder erste Harmonische besitzt die gleiche Periodendauer  $T$  wie das Ausgangssignal. Die Frequenz der Grundschiwingung ist also durch den Kehrwert  $f = 1/T$  festgelegt. Prinzipiell treten unendlich viele Harmonische auf, wobei allgemein die  $n$ -te Harmonische die Frequenz  $f_n = nf$ , also ein ganzzahliges Vielfaches der Grundfrequenz, aufweist. In der Praxis tritt häufig der Fall auf, dass bestimmte Harmonische je nach vorgegebenem Kurvenverlauf den Wert Null annehmen. Die Frage, mit welcher Anzahl von Harmonischen welche Genauigkeit bei der Übereinstimmung mit der Ausgangskurve erreicht wird, wird durch die Konvergenzbetrachtungen in Kapitel G im Anhang beantwortet.

Bei den voraussetzungsgemäß linearen Netzwerken darf die Berechnung für jede einzelne Harmonische separat durchgeführt werden. Die Gesamtlösung ist dann durch einfache Überlagerung der Teillösungen gegeben. Da die Schaltungsanalyse für eine einzelne Harmonische mit der komplexen Wechselstromrechnung durchgeführt werden kann, eröffnet die Harmonische Analyse jetzt auch die Möglichkeit, lineare Schaltungen zu analysieren, bei denen die Strom- und Spannungsformen einen beliebigen, zeitlich periodischen Verlauf aufweisen. «

## LERNZIELE

Nach Durcharbeiten dieses Kapitels und dem Lösen der Übungsaufgaben werden Sie in der Lage sein,

- beliebige periodische Strom- und Spannungsformen in eine Summe von Schwingungen mit diskreten Frequenzen zu zerlegen,
- bestimmte Symmetrieeigenschaften der Signalformen auszunutzen, um die Berechnung der einzelnen Summanden zu vereinfachen,
- Strom- und Spannungsverläufe in den Netzwerken zu berechnen, auch für die Fälle, bei denen die Quellen periodische, aber nicht mehr unbedingt sinusförmige Zeitverläufe aufweisen,
- die Ergebnisse in Spektraldarstellung anzugeben,
- Leistungsbetrachtungen anzustellen und
- weitere Kenngrößen wie Klirrfaktor, Formfaktor oder Welligkeit zu berechnen.

In Kap. 8 haben wir uns auf zeitlich periodische sinusförmige Signalverläufe beschränkt. Die Anwendung der komplexen Wechselstromrechnung setzte außerdem eine einheitliche Frequenz bei allen Strom- und Spannungsverläufen im Netzwerk voraus. Durch Anwendung des Überlagerungsprinzips sind wir aber bereits in der Lage, Netzwerke zu behandeln, in denen sich Gleichspannungs- und Wechselspannungsquellen und ebenso Stromquellen unterschiedlicher Frequenzen befinden, indem wir jeweils nur eine Quelle betrachten und die übrigen Quellen zu Null setzen, d.h. Spannungsquellen durch Kurzschluss und Stromquellen durch Leerlauf ersetzen. Die Überlagerung der so berechneten Teillösungen stellt die Gesamtlösung für das betrachtete Netzwerk dar.

Im folgenden Kapitel werden wir zunächst zeigen, dass durch geeignete Überlagerung von Wechselgrößen, deren unterschiedliche Frequenzen zueinander in einem bestimmten Verhältnis stehen, andere periodische Signalformen erzeugt werden können, die innerhalb der Periodendauer  $T$  einen beliebigen, nicht mehr sinusförmigen Verlauf annehmen.

Mit der anschließend zu behandelnden harmonischen Analyse werden wir dann ein mathematisches Verfahren kennen lernen, mit dessen Hilfe der umgekehrte Weg beschrritten werden kann, nämlich die Zerlegung einer beliebigen periodischen Funktion in eine Summe von Sinus- und Kosinusfunktionen unterschiedlicher Frequenzen. Die bereits erwähnte Vorgehensweise, nämlich die separate Berechnung des Netzwerks für jede einzelne Frequenz mithilfe der komplexen Wechselstromrechnung und die anschließende Überlagerung der Teillösungen, wird uns in die Lage versetzen, Ströme und Spannungen in den Netzwerken auch dann zu berechnen, wenn die Quellen beliebige, zeitlich periodische Kurvenformen aufweisen.

## 9.1 Grundlegende Betrachtungen

Zum leichteren Einstieg in diese Thematik betrachten wir als Beispiel die  $RL$ -Reihenschaltung in ►Abb. 9.1, die an eine Quelle mit der zeitabhängigen Spannung

$$u(t) = U_0 + \hat{u}_1 \cos(\omega_1 t) + \hat{u}_2 \cos(\omega_2 t) \quad (9.1)$$

angeschlossen ist. Dieses Netzwerk lässt sich auf einfache Weise behandeln, indem wir uns die Spannungsquelle, wie auf der rechten Seite der Abbildung dargestellt, in drei einzelne in Reihe liegende Quellen zerlegt denken. Auf ähnliche Weise kann man sich Stromquellen in parallel liegende Einzelquellen zerlegt denken.

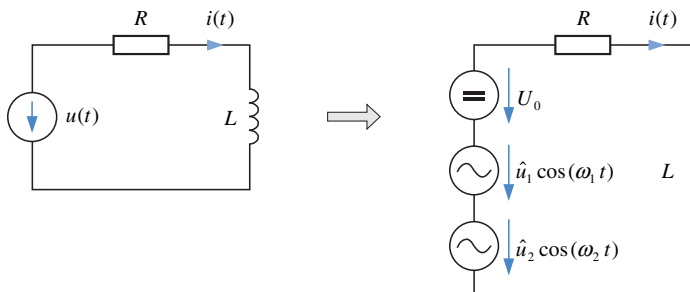


Abbildung 9.1: Überlagerung von Quellen mit unterschiedlichen Frequenzen

Betrachten wir nur die Gleichspannungsquelle, dann erhalten wir als erste Teillösung den zeitlich konstanten Strom  $I = U_0/R$  (die Induktivität stellt bei der Frequenz Null einen Kurzschluss dar). Die Teillösungen infolge der beiden Wechselspannungsquellen können ebenfalls unabhängig voneinander berechnet werden. Wir übernehmen diese Lösungen aus Gl. (8.55) und erhalten den Gesamtstrom

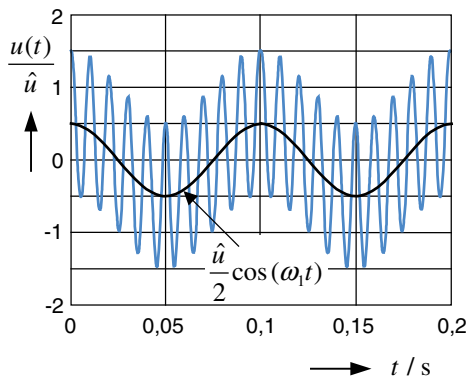
$$i(t) = \frac{U_0}{R} + \frac{\hat{u}_1}{\sqrt{R^2 + (\omega_1 L)^2}} \cos\left(\omega_1 t - \arctan \frac{\omega_1 L}{R}\right) + \frac{\hat{u}_2}{\sqrt{R^2 + (\omega_2 L)^2}} \cos\left(\omega_2 t - \arctan \frac{\omega_2 L}{R}\right). \quad (9.2)$$

Damit haben wir den allgemeinen Stromverlauf im Netzwerk auf der linken Seite der Abb. 9.1 mit der dort angegebenen zeitabhängigen Spannung berechnet. Wenn es also gelingt, einen beliebig vorgegebenen zeitlichen Verlauf der Quellenspannung bzw. des Quellenstromes durch eine Überlagerung von Sinus- und Kosinusfunktionen unterschiedlicher Frequenzen mit eventuell noch einem zusätzlichen Gleichanteil darzustellen, dann können wir jedes lineare Netzwerk mit den bereits bekannten Methoden berechnen.

Im Folgenden soll an drei charakteristischen Beispielen die additive Überlagerung zweier Kosinusfunktionen mit unterschiedlicher Frequenz gezeigt werden. Dabei werden wir feststellen, dass die Summensignale sehr unterschiedliche Eigenschaften aufweisen können. Die Überlagerung zweier Frequenzen, die in einem ganzzahligen Verhältnis zueinander stehen, wird uns den Weg zeigen zu einer Behandlung allgemeiner periodischer Signalformen.

### 1. Fall: $\omega_1 \ll \omega_2$

Wir betrachten zunächst den einfachen Fall, dass die Kreisfrequenz  $\omega_1 = 2\pi f_1$  in Gl. (9.1) wesentlich kleiner als die Kreisfrequenz  $\omega_2$  ist. Die ►Abb. 9.2 zeigt eine Auswertung für  $U_0 = 0$ ,  $\hat{u}_1 = 0,5\hat{u}$ ,  $\hat{u}_2 = \hat{u}$  sowie  $f_1 = 10\text{Hz}$  und  $f_2 = 100\text{Hz}$ .



**Abbildung 9.2:** Überlagerung zweier Wechselspannungen mit sehr unterschiedlichen Frequenzen

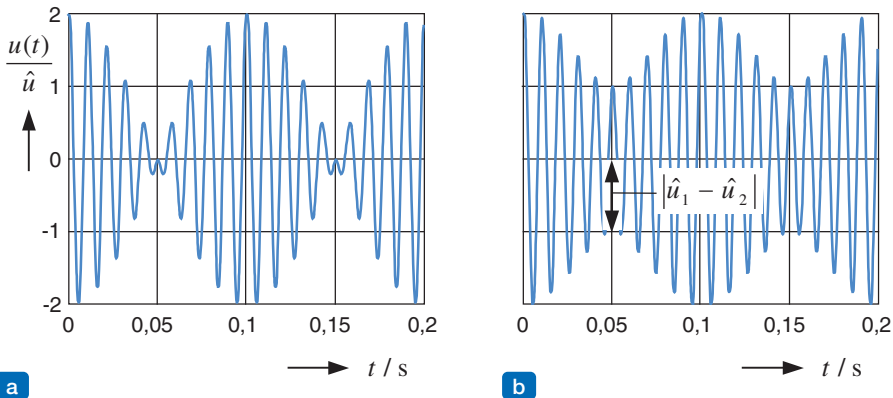
Das Summensignal besteht aus der höherfrequenten Schwingung, die im Rhythmus und mit der Amplitude der kleineren Frequenz in Richtung der Ordinate ausgelenkt ist.

## 2. Fall (Schwebung): $\omega_1 \approx \omega_2$

Ein weiterer, interessanter Fall liegt vor, wenn sich die beiden Kreisfrequenzen  $\omega_1$  und  $\omega_2$  nur geringfügig voneinander unterscheiden. Wir setzen den Gleichanteil wieder zu Null und formen die Quellenspannung (9.1) zunächst in der folgenden Weise um

$$\begin{aligned} u(t) &= \hat{u}_1 \cos(\omega_1 t) + \hat{u}_2 \cos(\omega_2 t) \\ &= \hat{u}_1 [\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t)] + (\hat{u}_2 - \hat{u}_1) \cos(\omega_2 t) \\ &\stackrel{\text{(H.10)}}{=} 2\hat{u}_1 \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right) + (\hat{u}_2 - \hat{u}_1) \cos(\omega_2 t). \end{aligned} \quad (9.3)$$

Für den Sonderfall gleicher Amplituden  $\hat{u}_1 = \hat{u}_2$  besteht die Summenspannung aus einer Schwingung der mittleren Frequenz  $(\omega_1 + \omega_2)/2$ , deren Amplitude von der halben Differenzfrequenz  $(\omega_1 - \omega_2)/2$  beeinflusst ist. Bei ungleichen Ausgangsamplituden tritt noch eine weitere Kosinusfunktion im Summensignal (9.3) auf. In ►Abb. 9.3 sind zwei Auswertungen mit den Frequenzen  $f_1 = 90\text{Hz}$  und  $f_2 = 100\text{Hz}$  dargestellt. In Teilbild a sind die Amplituden der beiden Ausgangsspannungen gleich  $\hat{u}_1 = \hat{u}_2 = \hat{u}$ , in Teilbild b sind die Amplituden  $\hat{u}_1 = \hat{u}/2$  und  $\hat{u}_2 = 3\hat{u}/2$  zugrunde gelegt. Eine derartige Signalform wird allgemein als **Schwebung** bezeichnet. Die Einhüllende der hochfrequenten Schwingung schwankt zwischen der Summe  $\hat{u}_1 + \hat{u}_2$  und der Differenz  $|\hat{u}_1 - \hat{u}_2|$  der beiden Amplituden. Für  $\hat{u}_1 = \hat{u}_2$  geht die Einhüllende bis auf Null zurück, die Schwebung ist in diesem Fall am stärksten ausgeprägt.



**Abbildung 9.3:** Überlagerung zweier Wechselspannungen mit annähernd gleicher Frequenz

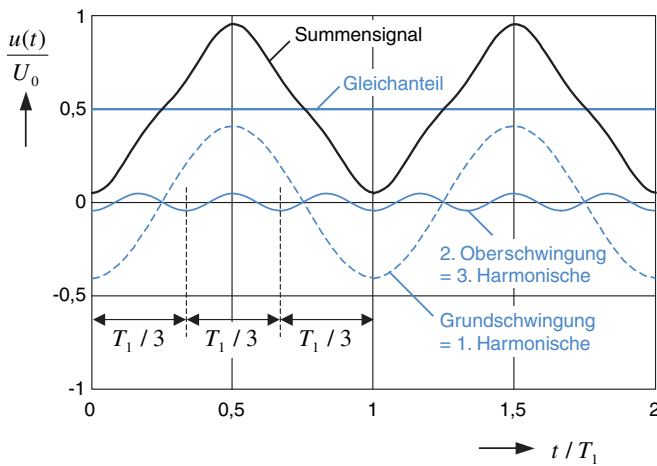
Da die Kreisfrequenzen  $\omega_1$  und  $\omega_2$  in den beiden bisher betrachteten Fällen in einem beliebigen Verhältnis zueinander stehen können, lässt sich im Allgemeinen keine Periodendauer  $T$  finden, nach deren Ablauf sich das Summensignal entsprechend der Gl. (7.6) exakt wiederholt. Diese Fälle werden wir im Folgenden nicht weiter betrachten.

### 3. Fall (Grund- und Oberschwingung): $\omega_2 = n\omega_1$ mit $n = 2, 3, \dots$

Wesentlich wichtiger für unsere weiteren Betrachtungen ist der Fall, bei dem die Kreisfrequenz  $\omega_2$  ein ganzzahliges Vielfaches der Kreisfrequenz  $\omega_1$  ist. Die Schwingung mit der kleineren Frequenz  $f_1$  wird als **Grundschwingung** oder **1. Harmonische** bezeichnet, die Schwingung mit der Frequenz  $nf_1$  als  **$n$ -te Harmonische**. Häufig werden auch die Bezeichnungen **Grund-** und **Oberschwingungen** verwendet. Die 2. Harmonische entspricht dann der 1. Oberschwingung, die 3. Harmonische entspricht der 2. Oberschwingung usw.

Als Beispiel betrachten wir die in ►Abb. 9.4 dargestellte Auswertung für den Spannungsverlauf

$$u(t) = \frac{1}{2}U_0 - U_0 \frac{4}{\pi^2} \left[ \cos(\omega_1 t) + \frac{1}{3^2} \cos(3\omega_1 t) \right]. \quad (9.4)$$



**Abbildung 9.4:** Überlagerung zweier Harmonischer mit einem Gleichanteil

Die Periodendauer der 1. Harmonischen ist durch die Grundfrequenz  $T_1 = 1/f_1$  gegeben. Die 3. Harmonische besitzt die Frequenz  $3f_1$  und daher gilt für ihre Periodendauer  $T_3 = T_1/3$ . Aus der Abbildung ist unmittelbar zu erkennen, dass das aus einer Grundschwingung und ihren Harmonischen gebildete Summensignal die gleiche Periodendauer wie die Grundschwingung aufweist. Die zusätzliche Überlagerung eines Gleichanteils verschiebt das Summensignal lediglich entlang der vertikalen Achse.

Aus der Abbildung ist weiterhin zu erkennen, dass es uns offenbar gelungen ist, durch die Überlagerung von drei Anteilen mit geeignet gewählten Amplituden eine nicht sinusförmige periodische Summenspannung mit näherungsweise dreieckförmigem Verlauf zusammensetzen. Die *Synthese* gegebener periodischer Spannungsverläufe durch *Ausprobieren* verschiedener Werte bei den Amplituden und Phasen der einzelnen Harmonischen ist natürlich mühsam. In den folgenden Kapiteln werden wir uns daher mit der als **Harmonische Analyse** bzw. **Fourier-Analyse** (nach Jean Baptiste Fourier, 1768 – 1830) bezeichneten Methode beschäftigen, mit deren Hilfe wir die Amplituden und Phasen der einzelnen Harmonischen für eine gegebene, zeitabhängige periodische Funktion gezielt berechnen können.

## 9.2 Die Harmonische Analyse

Der französische Mathematiker J. B. Fourier hat gezeigt, dass eine mit  $2\pi$  periodische Funktion  $f(x)$ , die die **Dirichlet'schen Bedingungen** erfüllt, d.h.

- die Funktion ist endlich und
- das Intervall  $0 \leq x \leq 2\pi$  lässt sich in endlich viele Teilintervalle zerlegen, in denen  $f(x)$  stetig und monoton ist,

durch eine Summe von trigonometrischen Funktionen dargestellt werden kann

$$f(x) = a_0 + \hat{a}_1 \cos(x) + \hat{a}_2 \cos(2x) + \hat{a}_3 \cos(3x) + \dots \\ + \hat{b}_1 \sin(x) + \hat{b}_2 \sin(2x) + \hat{b}_3 \sin(3x) + \dots \quad (9.5)$$

Wir können davon ausgehen, dass die genannten Bedingungen bei den in der Praxis auftretenden Problemen immer erfüllt sind. Da wir fast ausschließlich mit zeitabhängigen Strömen  $i(t)$  und Spannungen  $u(t)$  rechnen, deren Periodizität durch die Gl. (7.6), d.h. durch die Periodendauer  $T = 2\pi/\omega$  beschrieben wird, werden wir für die folgenden Betrachtungen die Reihenentwicklung (9.5) mit den entsprechend angepassten Bezeichnungen verwenden. Die Darstellung mit den beiden trigonometrischen Funktionen

$$u(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \hat{a}_n \cos(n\omega t) + \hat{b}_n \sin(n\omega t) \right] \\ = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \hat{a}_n \cos\left(n2\pi \frac{t}{T}\right) + \hat{b}_n \sin\left(n2\pi \frac{t}{T}\right) \right] \quad (9.6)$$

wird als **Normalform** der Fourier-Entwicklung bezeichnet. Durchläuft die Zeit  $t$  den Bereich  $0 \leq t \leq T$ , dann durchläuft das Argument  $x = \omega t$  den Bereich  $0 \leq \omega t \leq 2\pi$ . Die beiden Darstellungen (9.5) und (9.6) sind also äquivalent.

Liegt die Funktion  $u(t)$  nur in einem abgeschlossenen Intervall der Länge  $T$  vor, ohne aber periodisch zu sein, dann kann man sich die Funktion außerhalb des Intervalls nach beiden Seiten periodisch fortgesetzt denken und genauso durch die Summe (9.6) darstellen. Die Reihendarstellung erlaubt dann zwar auch die Berechnung von Funktionswerten außerhalb des Intervalls, diese sind aber nicht von Interesse.

Die vorgegebene Funktion  $u(t)$  wird nach Gl. (9.6) in einen von der Zeit unabhängigen Gleichanteil (Mittelwert)  $a_0$  und in eine Summe von Sinus- und Kosinusfunktionen zerlegt. Die Frequenz der Grundschwingung  $f = 1/T = \omega/2\pi$  wird durch die Länge des Zeitintervalls  $T$  festgelegt. Glieder mit der Ordnungszahl  $n$  ( $n$ -te Harmonische) besitzen die Periodendauer  $T/n$  und damit die Frequenz  $nf$ .

Wir wollen zunächst die Gleichwertigkeit der Normalform (9.6) mit der als **Spektralform** der Fourier-Entwicklung bezeichneten Beziehung

$$u(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{c}_n \sin(n\omega t + \varphi_n) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{c}_n \cos(n\omega t - \psi_n) \quad (9.7)$$

nachweisen, indem wir die Umrechnungsformeln von den Koeffizienten der Normalform zu den Koeffizienten der Spektralform angeben. Aus der geforderten Übereinstimmung der phasenverschobenen Sinusfunktion in Gl. (9.7)



$$\hat{c}_n \sin(n\omega t + \varphi_n) \stackrel{(H.4)}{=} \hat{c}_n \cos(\varphi_n) \sin(n\omega t) + \hat{c}_n \sin(\varphi_n) \cos(n\omega t) \quad (9.8)$$

mit den beiden Funktionen in Gl. (9.6) folgen unmittelbar die beiden Bestimmungsgleichungen

$$\hat{c}_n \sin(\varphi_n) = \hat{a}_n \quad \text{und} \quad \hat{c}_n \cos(\varphi_n) = \hat{b}_n \quad (9.9)$$

für die Werte  $\hat{c}_n$  und  $\varphi_n$ . Mit elementarer Rechnung erhalten wir die Zusammenhänge

$$\hat{a}_n^2 + \hat{b}_n^2 = \hat{c}_n^2 \sin^2(\varphi_n) + \hat{c}_n^2 \cos^2(\varphi_n) \stackrel{(H.1)}{=} \hat{c}_n^2 \rightarrow \hat{c}_n = \sqrt{\hat{a}_n^2 + \hat{b}_n^2} \quad (9.10)$$

und

$$\frac{\hat{a}_n}{\hat{b}_n} = \frac{\hat{c}_n \sin(\varphi_n)}{\hat{c}_n \cos(\varphi_n)} \rightarrow \tan(\varphi_n) = \frac{\hat{a}_n}{\hat{b}_n}. \quad (9.11)$$

Auf die gleiche Weise lässt sich mit dem Additionstheorem (H.5) nachweisen, dass die Amplitude bei den phasenverschobenen Kosinusfunktionen ebenfalls durch die Gl. (9.10) gegeben ist, während für den mit negativem Vorzeichen im Argument eingeführten Phasenwinkel  $\psi_n$  die folgende Beziehung gilt

$$\tan(\psi_n) = \frac{\hat{b}_n}{\hat{a}_n}. \quad (9.12)$$

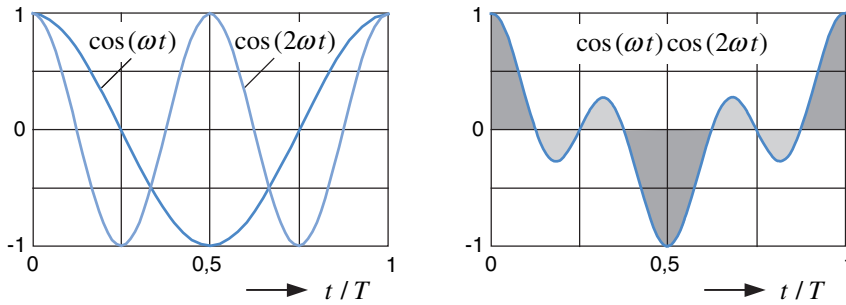
Bei der Auflösung der beiden Gleichungen (9.11) und (9.12) nach den Winkeln  $\varphi_n$  und  $\psi_n$  ist die Periodizität der tan-Funktion zu beachten (siehe Gl. (E.4)).

Die Entwicklung der zeitlich periodischen Funktion  $u(t)$  in die Fourier-Reihe (9.6) erfordert die Berechnung der Koeffizienten  $a_0$ ,  $\hat{a}_n$  und  $\hat{b}_n$ . Bei der Ableitung der dazu benötigten Bestimmungsgleichungen machen wir von einer besonderen Eigenschaft der in Gl. (9.6) enthaltenen trigonometrischen Funktionen Gebrauch<sup>1</sup>. Integriert man nämlich das Produkt zweier beliebiger Funktionen über die komplette Periodendauer, dann verschwindet das Integral immer dann, wenn es sich entweder um verschiedene Funktionen (Konstante oder Sinus- oder Kosinusfunktion) oder um gleiche Funktionen, aber mit unterschiedlichen Ordnungszahlen  $n$  handelt. Bezeichnen wir mit  $g_1(t)$  und  $g_2(t)$  zwei beliebige Funktionen aus der Fourier-Reihe (9.6), dann lässt sich der Zusammenhang formelmäßig folgendermaßen darstellen

$$\int_0^T g_1(t) g_2(t) dt = \begin{cases} 0 & \text{für } g_1 \neq g_2 \\ > 0 & g_1 = g_2 \end{cases}. \quad (9.13)$$

Diese für die folgenden Betrachtungen außerordentlich wichtige Beziehung wird als **Orthogonalitätsrelation** bezeichnet. Zur Veranschaulichung betrachten wir das Produkt der beiden Kosinusfunktionen mit den Ordnungszahlen 1 und 2. Es ist offensichtlich, dass das Integral über die Funktion in ►Abb. 9.5 wegen der gleichen Flächen oberhalb und unterhalb der  $t$ -Achse verschwinden muss.

1 Das konstante Glied vor der Summe ist in die Aussagen einbezogen, da es wegen  $\cos(0) = 1$  als Kosinusfunktion mit der Ordnungszahl  $n = 0$  angesehen werden kann.



**Abbildung 9.5:** Zur Veranschaulichung der Orthogonalitätsrelation an einem Beispiel

Diese Situation trifft in den genannten Fällen immer zu. Handelt es sich dagegen um das Produkt zweier gleicher Funktionen mit der gleichen Ordnungszahl, also um das *Quadrat* einer Funktion, dann ist der Integrand immer positiv und liefert im Ergebnis einen positiven Wert. Alle möglichen, durch Gl. (9.13) erfassten Kombinationen sind in den Gleichungen (H.19) bis (H.25) zusammengestellt und ausgewertet. Die Integrale über die Quadrate der Funktionen liefern unterschiedliche Ergebnisse, je nachdem, ob über die Konstante oder über die trigonometrischen Funktionen integriert wird

$$\int_0^T 1^2 dt = T \quad \text{und} \quad \int_0^T \sin^2(n\omega t) dt = \int_0^T \cos^2(n\omega t) dt = \frac{T}{2}. \quad (9.14)$$

Nach diesen Vorüberlegungen sollen jetzt die Bestimmungsgleichungen für die Koeffizienten abgeleitet werden. Dabei können wir folgendermaßen vorgehen:

- Wir wählen eine Funktion  $g(t)$  aus der Reihendarstellung (9.6) aus und multiplizieren damit beide Seiten der Gl. (9.6).
- Wir integrieren diesen Ausdruck über die komplette Periodendauer  $0 \leq t \leq T$ .
- Auf der linken Gleichungsseite erhalten wir ein Integral über das Produkt der gewählten Funktion  $g(t)$  mit der zu entwickelnden Funktion  $u(t)$ .
- Auf der rechten Gleichungsseite verschwinden alle Integrale mit einer einzigen Ausnahme. Lediglich das Integral über das Quadrat der gewählten Funktion liefert einen von Null verschiedenen Wert. Damit verbleibt auf der rechten Gleichungsseite nur ein einziger Koeffizient, nämlich genau derjenige, der vor der gewählten Funktion  $g(t)$  steht. Mit der Auswahl von  $g(t)$  erhalten wir also die Bestimmungsgleichung für den betreffenden Koeffizienten.

Zur Bestimmung des Mittelwertes  $a_0$  multiplizieren wir die Gl. (9.6) mit der Konstanten  $g(t) = 1$  und integrieren über die komplette Periodendauer

$$\begin{aligned} \int_0^T u(t) dt &= \int_0^T a_0 dt + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^T [\hat{a}_n \cos(n\omega t) + \hat{b}_n \sin(n\omega t)] dt \\ &= a_0 T + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \hat{a}_n \int_0^T \cos(n\omega t) dt + \hat{b}_n \int_0^T \sin(n\omega t) dt \right]. \end{aligned} \quad (9.15)$$

Da die über die Periode  $T$  berechneten Integrale der trigonometrischen Funktionen nach Gl. (H.20) verschwinden, liefert die Summe auf der rechten Seite der Gl. (9.15) keinen Beitrag und für den Mittelwert  $a_0$  verbleibt in Übereinstimmung mit Gl. (7.8) die Bestimmungsgleichung

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt. \quad (9.16)$$

Im nächsten Schritt soll der Koeffizient  $\hat{a}_m$  bestimmt werden. Der Index  $m$  steht stellvertretend für einen Wert aus der Reihe  $n = 1, 2, \dots$ . Zu diesem Zweck wird die Gl. (9.6) zunächst mit der Funktion  $\cos(m\omega t)$  multipliziert und anschließend über die komplette Periodendauer integriert

$$\int_0^T u(t) \cos(m\omega t) dt = \int_0^T a_0 \cos(m\omega t) dt + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \hat{a}_n \int_0^T \cos(n\omega t) \cos(m\omega t) dt + \hat{b}_n \int_0^T \sin(n\omega t) \cos(m\omega t) dt \right]. \quad (9.17)$$

Das erste Integral auf der rechten Seite verschwindet wegen Gl. (9.13) bzw. (H.20). In der Summe verschwinden nach Gl. (9.13) ebenfalls alle Integrale, bei denen der Integrand aus dem Produkt einer Sinus- und einer Kosinusfunktion besteht. Das Integral über das Produkt der beiden Kosinusfunktionen liefert nur für den Sonderfall  $n = m$  einen von Null verschiedenen Wert, so dass auf der rechten Gleichungsseite nur der Ausdruck mit  $\hat{a}_m$  verbleibt

$$\int_0^T u(t) \cos(m\omega t) dt = \hat{a}_m \int_0^T \cos^2(m\omega t) dt \stackrel{(9.14)}{=} \hat{a}_m \frac{T}{2}. \quad (9.18)$$

Lassen wir den Wert  $m$  jetzt der Reihe nach alle Werte  $1, 2, \dots$  durchlaufen, dann erhalten wir nacheinander die Bestimmungsgleichungen für alle Koeffizienten  $\hat{a}_n$ . Diese Gleichung hat immer denselben Aufbau und kann durch Umstellung der Beziehung (9.18) auf die folgende Form gebracht werden

$$\hat{a}_n = \frac{2}{T} \int_0^T u(t) \cos(n\omega t) dt. \quad (9.19)$$

Damit verbleibt noch die Frage nach der Bestimmung der Koeffizienten  $\hat{b}_n$ . Der einzige Unterschied zu bisher besteht darin, dass wir die Ausgangsgleichung (9.6) jetzt mit der entsprechenden Sinusfunktion multiplizieren. Mit den gleichen Rechenschritten erhalten wir die völlig analog aufgebaute Beziehung

$$\hat{b}_n = \frac{2}{T} \int_0^T u(t) \sin(n\omega t) dt. \quad (9.20)$$

Wir fassen die Ergebnisse nochmals übersichtlich zusammen: Abhängig von der Wahl der Integrationsvariablen  $t$  bzw.  $\omega t$  können die Fourier-Koeffizienten durch Auswertung der folgenden Integrale bestimmt werden

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{1}{T} \int_0^T u(t) \, dt & a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\omega t) \, d(\omega t) \\
 \hat{a}_n &= \frac{2}{T} \int_0^T u(t) \cos(n\omega t) \, dt & \hat{a}_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(\omega t) \cos(n\omega t) \, d(\omega t) \\
 \hat{b}_n &= \frac{2}{T} \int_0^T u(t) \sin(n\omega t) \, dt & \hat{b}_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(\omega t) \sin(n\omega t) \, d(\omega t) .
 \end{aligned} \quad \text{bzw.} \quad (9.21)$$

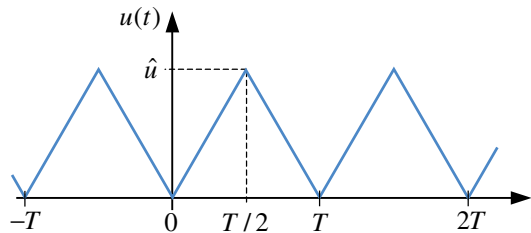
Handelt es sich bei der Funktion  $u(t)$  nicht nur um eine im Intervall  $0 \leq t \leq T$  vorgegebene, sondern um eine mit der Periodendauer  $T$  periodische Funktion, dann können die Integrale (9.21) auch in dem Bereich  $t_0 \leq t \leq t_0 + T$  bzw.  $\varphi_0 \leq \omega t \leq \varphi_0 + 2\pi$  mit beliebigen Anfangswerten  $t_0$  und  $\varphi_0$  berechnet werden. Der Integrationsbereich wird dann meistens im Hinblick auf einfacher auszuwertende Integrale festgelegt.

### Beispiel 9.1: Reihenentwicklung einer Dreiecksfunktion

Der in ►Abb. 9.6 dargestellte dreieckförmige periodische Spannungsverlauf, der in dem Bereich  $0 \leq t \leq T$  durch die Beziehung

$$u(t) = 2\hat{u} \cdot \begin{cases} t/T & \text{für } 0 \leq t \leq T/2 \\ 1-t/T & \text{für } T/2 \leq t \leq T \end{cases} \quad (9.22)$$

beschrieben wird, soll in eine Fourier-Reihe nach Gl. (9.6) entwickelt werden.



**Abbildung 9.6:** Dreieckförmiger periodischer Spannungsverlauf

Für den Gleichanteil erhalten wir mit der Fläche unter dem Dreieck das Ergebnis

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) \, dt = \frac{1}{T} \frac{\hat{u}T}{2} = \frac{1}{2} \hat{u} . \quad (9.23)$$

Bei der Berechnung der übrigen Koeffizienten muss das jeweilige Integral entsprechend der abschnittsweise unterschiedlich definierten Funktion (9.22) in zwei Teilintegrale aufgespalten werden. Damit gilt

$$\begin{aligned}
 \hat{a}_n & \stackrel{(9.21)}{=} \frac{2}{T} \int_0^T u(t) \cos(n\omega t) dt \\
 & \stackrel{(9.22)}{=} \frac{4\hat{u}}{T^2} \int_0^{T/2} t \cos(n\omega t) dt + \underbrace{\frac{4\hat{u}}{T} \int_{T/2}^T \cos(n\omega t) dt}_0 - \frac{4\hat{u}}{T^2} \int_{T/2}^T t \cos(n\omega t) dt \\
 & \stackrel{(H.18)}{=} \frac{4\hat{u}}{T^2} \left[ \frac{\cos(n\omega t)}{(n\omega)^2} + \frac{t \sin(n\omega t)}{n\omega} \right] \Bigg|_0^{T/2} - \frac{4\hat{u}}{T^2} \left[ \frac{\cos(n\omega t)}{(n\omega)^2} + \frac{t \sin(n\omega t)}{n\omega} \right] \Bigg|_{T/2}^T \\
 & = \frac{4\hat{u}}{T^2 (n\omega)^2} [2 \cos(n\pi) - 2] = \frac{2\hat{u}}{(n\pi)^2} [\cos(n\pi) - 1]
 \end{aligned} \tag{9.24}$$

und

$$\begin{aligned}
 \hat{b}_n & \stackrel{(9.21)}{=} \frac{2}{T} \int_0^T u(t) \sin(n\omega t) dt \\
 & \stackrel{(9.22)}{=} \frac{4\hat{u}}{T^2} \int_0^{T/2} t \sin(n\omega t) dt + \frac{4\hat{u}}{T} \int_{T/2}^T \sin(n\omega t) dt - \frac{4\hat{u}}{T^2} \int_{T/2}^T t \sin(n\omega t) dt \\
 & \stackrel{(H.17)}{=} \frac{4\hat{u}}{T^2} \left[ -\frac{T \cos(n\pi)}{2n\omega} \right] + \frac{4\hat{u}}{T} \frac{\cos(n\pi) - 1}{n\omega} - \frac{4\hat{u}}{T^2} \left[ -\frac{T \cos(n2\pi)}{n\omega} + \frac{T \cos(n\pi)}{2n\omega} \right] \\
 & = \frac{4\hat{u}}{n\omega T} \left[ -\frac{\cos(n\pi)}{2} + \cos(n\pi) - 1 + \cos(n2\pi) - \frac{\cos(n\pi)}{2} \right] = 0.
 \end{aligned} \tag{9.25}$$

Berücksichtigt man noch, dass der Ausdruck  $\cos(n\pi) - 1$  für gerade  $n$  verschwindet und für ungerade  $n$  den Wert  $-2$  annimmt, dann ist die Dreiecksfunktion in Abb. 9.6 resultierend durch die nachstehende Fourier-Reihe gegeben

$$\begin{aligned}
 u(t) & = \frac{\hat{u}}{2} - \frac{4\hat{u}}{\pi^2} \left[ \cos(\omega t) + \frac{1}{3^2} \cos(3\omega t) + \frac{1}{5^2} \cos(5\omega t) + \dots \right] \\
 & = \frac{\hat{u}}{2} - \frac{4\hat{u}}{\pi^2} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos(n\omega t).
 \end{aligned} \tag{9.26}$$

Ein Vergleich dieser Beziehung mit der Gl. (9.4) zeigt, dass das Summensignal in Abb. 9.4 nicht zufällig die Form eines Dreiecks annimmt. Es wurde nämlich aus dem Gleichanteil und den beiden ersten Harmonischen der exakten Reihenentwicklung nach Gl. (9.26) berechnet. Die bereits gute Übereinstimmung zwischen dem Summensignal und der Dreiecksfunktion in Abb. 9.6 resultiert aus dem schnellen Abklingen der Amplituden der Oberschwingungen, die im vorliegenden Beispiel mit dem Quadrat der Ordnungszahl  $n$  abnehmen. Im Allgemeinen hängt die Konvergenz von dem Verlauf der Ausgangsfunktion ab. Auch wenn eine exakte Übereinstimmung zwischen der ursprünglichen Funktion und der Fourier-Darstellung erst bei unendlich vielen Gliedern erreicht wird, ist für die Praxis die Verwendung einer geringen Anzahl von Summanden hinreichend genau.

### 9.2.1 Die komplexe Form der Fourier-Reihe

Ausgehend von der Euler'schen Formel (E.6) können die trigonometrischen Funktionen in der Form

$$\cos(n\omega t) = \frac{1}{2}(e^{jn\omega t} + e^{-jn\omega t}) \quad \text{und} \quad \sin(n\omega t) = \frac{1}{2j}(e^{jn\omega t} - e^{-jn\omega t}) \quad (9.27)$$

geschrieben werden. Damit lässt sich die trigonometrische Fourier-Reihe (9.6) auf die komplexe Form

$$\begin{aligned} u(t) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \hat{a}_n \frac{1}{2}(e^{jn\omega t} + e^{-jn\omega t}) - \hat{b}_n \frac{j}{2}(e^{jn\omega t} - e^{-jn\omega t}) \right] \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{\hat{a}_n - j\hat{b}_n}{2} e^{jn\omega t} + \frac{\hat{a}_n + j\hat{b}_n}{2} e^{-jn\omega t} \right] \end{aligned} \quad (9.28)$$

bringen, die mit den Abkürzungen

$$c_0 = a_0, \quad \hat{c}_n = \frac{\hat{a}_n - j\hat{b}_n}{2} \quad \text{und} \quad \hat{c}_{-n} = \frac{\hat{a}_n + j\hat{b}_n}{2} = \hat{c}_n^* \quad (9.29)$$

folgendermaßen geschrieben werden kann

$$u(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \hat{c}_n e^{jn\omega t} + \hat{c}_{-n} e^{-jn\omega t} \right]. \quad (9.30)$$

Lässt man die Summation nicht von 1 bis  $\infty$ , sondern von  $-\infty$  bis  $\infty$  laufen, dann ergibt sich mit  $c_0 = \hat{c}_0$  die kompakte Schreibweise

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{c}_n e^{jn\omega t}. \quad (9.31)$$

Die komplexen Koeffizienten  $\hat{c}_n$  werden aus der Gleichung

$$\begin{aligned} \hat{c}_{\pm n} &\stackrel{(9.29)}{=} \frac{\hat{a}_n \mp j\hat{b}_n}{2} \stackrel{(9.21)}{=} \frac{1}{T} \int_0^T u(t) \cos(n\omega t) dt \mp j \frac{1}{T} \int_0^T u(t) \sin(n\omega t) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T u(t) e^{\mp jn\omega t} dt \end{aligned} \quad (9.32)$$

bzw. mit der vereinfachten Darstellung

$$\hat{c}_n = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) e^{-jn\omega t} dt \quad (9.33)$$

bestimmt. Der Index  $n$  durchläuft jetzt den Wertebereich der ganzen Zahlen  $n = \dots -2, -1, 0, 1, 2, \dots$ . Die Gl. (9.33) hat gegenüber den Bestimmungsgleichungen (9.21) den Vorteil, dass nur ein Integral auszuwerten ist. Die reellen Koeffizienten können aus diesem Ergebnis mithilfe der Gl. (9.29) auf einfache Weise ermittelt werden

$$a_0 = c_0, \quad \hat{a}_n = \hat{c}_n + \hat{c}_{-n} = 2\text{Re}\{\hat{c}_n\} \quad \text{und} \quad \hat{b}_n = j(\hat{c}_n - \hat{c}_{-n}) = -2\text{Im}\{\hat{c}_n\}. \quad (9.34)$$

## Beispiel 9.2: Reihenentwicklung einer Rechteckfunktion

Für die in ►Abb. 9.7 dargestellte Rechteckfunktion sollen die komplexen Koeffizienten  $\hat{c}_n$  und daraus die reellen Koeffizienten  $\hat{a}_n$  und  $\hat{b}_n$  der Fourier-Reihen (9.31) bzw. (9.6) bestimmt werden.

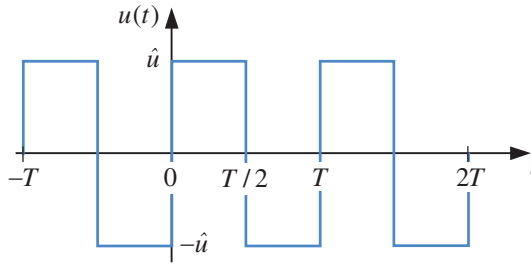


Abbildung 9.7: Rechteckförmiger periodischer Spannungsverlauf

Aus Gl. (9.33) erhalten wir das Integral

$$\begin{aligned}\hat{c}_n &= \frac{\hat{u}}{T} \int_0^{T/2} e^{-jn\omega t} dt - \frac{\hat{u}}{T} \int_{T/2}^T e^{-jn\omega t} dt \\ &= \frac{\hat{u}}{-jn\omega T} \left[ e^{-jn\omega T/2} - e^0 - e^{-jn\omega T} + e^{-jn\omega T/2} \right] = \frac{j\hat{u}}{n2\pi} \left[ e^{-jn\pi} - 1 - 1 + e^{-jn\pi} \right].\end{aligned}\quad (9.35)$$

Die eckige Klammer verschwindet für gerade Werte  $n$  und liefert  $-4$  für ungerade  $n$ . Die resultierenden komplexen Koeffizienten

$$\hat{c}_n = -\frac{j2\hat{u}}{n\pi} \quad \text{mit } n = \dots -3, -1, 1, 3, \dots \quad (9.36)$$

sind rein imaginär. Mit Gl. (9.34) erhalten wir die reellen Koeffizienten

$$a_0 = 0, \quad \hat{a}_n = 2\text{Re}\{\hat{c}_n\} = 0 \quad \text{und} \quad \hat{b}_n = -2\text{Im}\{\hat{c}_n\} = \frac{4\hat{u}}{n\pi} \quad (9.37)$$

und daraus die Reihenentwicklung in Normalform

$$u(t) = \frac{4\hat{u}}{\pi} \left[ \sin(\omega t) + \frac{1}{3} \sin(3\omega t) + \frac{1}{5} \sin(5\omega t) + \dots \right]. \quad (9.38)$$

Im Zusammenhang mit den Fourier-Entwicklungen in den beiden vorangegangenen Beispielen fallen einige Besonderheiten auf, auf die wir etwas detaillierter eingehen wollen:

- Die Berechnung der Koeffizienten (9.21) ist unter Umständen recht aufwändig. Da aber nicht immer alle Koeffizienten benötigt werden (siehe Gl. (9.25)), werden wir uns im nächsten Kapitel mit den Kriterien beschäftigen, unter denen eine vereinfachte Berechnung möglich ist.
- Zur exakten Darstellung der Ausgangsfunktion werden theoretisch unendlich viele Oberschwingungen benötigt. Für eine Auswertung können aber immer nur endlich viele Glieder der Summe berücksichtigt werden. Je schneller die Amplituden der Oberschwingungen abklingen, desto weniger Glieder aus der Summe müssen zur Unterschreitung einer gegebenen Fehlerschranke tatsächlich berücksichtigt werden. Diese Konvergenzfragen stehen insbesondere für die Praxis nicht so sehr im Vordergrund und sind auch für das Verständnis der weiteren Kapitel nicht unbedingt erforderlich. Die Frage, wie der Verlauf der zeitabhängigen Ausgangsfunktion die Konvergenz der Reihenentwicklung und damit den Fehler beeinflusst, der bei einem Abbruch der Summation nach  $n_{max}$  Gliedern entsteht, ist daher für den interessierten Leser in Kap. G im Anhang beantwortet.

## 9.2.2 Vereinfachungen bei der Bestimmung der Fourier-Koeffizienten

In Gl. (9.25) haben wir mit großem Aufwand das triviale Ergebnis  $\hat{b}_n = 0$  berechnet. Hätten wir das nicht einfacher haben können? Um diese Frage zu beantworten, müssen wir uns die Bedeutung der einzelnen Funktionen in der Fourier-Entwicklung (9.6) etwas näher ansehen.

Beginnen wir mit dem Gleichanteil  $a_0$ . Die Bestimmungsgleichung für diesen Koeffizienten ist identisch mit der Gl. (7.8) zur Berechnung des Mittelwertes der gegebenen Funktion. Das zu bildende Integral entspricht der Fläche, die zwischen der Funktion und der horizontalen Achse eingeschlossen ist (vgl. ►Abb. 9.8). Das Rechteck mit der festen Seitenlänge  $T$  und der zu bestimmenden Seitenlänge  $a_0$  besitzt den gleichen Flächeninhalt. Sind also gleich große Flächen oberhalb und unterhalb der horizontalen Achse zwischen der Funktion und der Achse eingeschlossen, dann verschwindet das Integral und es gilt  $a_0 = 0$ . Diese Situation ist in vielen Fällen unmittelbar an dem Verlauf der gegebenen Funktion zu erkennen, wenn diese z.B. symmetrisch zur horizontalen Achse verläuft (vgl. z.B. die Rechteckfunktion in Abb. 9.7).

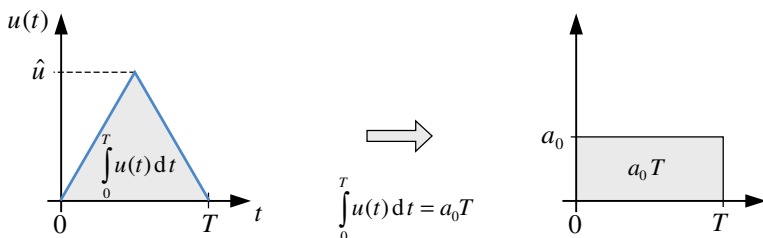


Abbildung 9.8: Zur Berechnung des Mittelwertes



## Symmetrieeigenschaften

Subtrahieren wir von der Ausgangsfunktion den Gleichanteil, dann muss die verbleibende Kurvenform allein durch die Sinus- und Kosinusfunktionen beschrieben werden. Die Frage, welche der Koeffizienten  $\hat{a}_n$  und  $\hat{b}_n$  in der Fourier-Reihe benötigt werden, hängt entscheidend von den Symmetrieeigenschaften der gegebenen Funktion ab. Betrachten wir unter diesem Aspekt zunächst die trigonometrischen Funktionen.

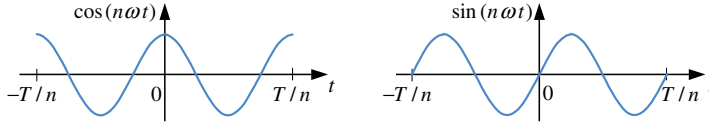


Abbildung 9.9: Gerade und ungerade Funktion

Aus der Abbildung ist unschwer zu erkennen, dass die Kosinusfunktionen **symmetrisch** bezüglich der vertikalen Achse sind, d.h. es gilt

$$\cos(n\omega t) = \cos(-n\omega t). \quad (9.39)$$

Allgemein wird eine Funktion mit der Eigenschaft  $u(t) = u(-t)$  als **gerade Funktion** bezeichnet. Diese Namensgebung hängt damit zusammen, dass ganze rationale Funktionen mit ausschließlich geraden Exponenten diese Eigenschaft aufweisen. Die Konstante  $a_0$  ist in diesem Sinne auch eine gerade Funktion, man könnte sie wegen  $a_0 \cos(0\omega t) = a_0$  auch als ein Glied der Summe mit dem Zählindex  $n = 0$  auffassen. Die in Gl. (9.39) beschriebene Eigenschaft heißt **Symmetrie erster Art**.

Demgegenüber sind die Sinusfunktionen **schiefsymmetrisch** bezüglich der vertikalen Achse, d.h. es gilt

$$\sin(n\omega t) = -\sin(-n\omega t). \quad (9.40)$$

Funktionen mit der Eigenschaft  $u(t) = -u(-t)$  werden als **ungerade Funktionen** bezeichnet, da ganze rationale Funktionen mit ausschließlich ungeraden Exponenten genau dieses Verhalten aufweisen. In diesem Fall spricht man von der **Symmetrie zweiter Art**.

In welcher Weise können uns diese unterschiedlichen Eigenschaften der beiden Funktionen jetzt weiterhelfen? Zunächst gilt die für die einzelne Kosinusfunktion geltende Eigenschaft (9.39) auch für die Summe aller Kosinusfunktionen in der Fourier-Entwicklung (9.6), einschließlich des Gleichanteils. Es ist leicht einzusehen, dass durch diese Summe gerader Funktionen auch nur eine andere gerade Funktion dargestellt werden kann. Ebenso kann durch die Summe aller Sinusfunktionen mit der Eigenschaft (9.40) auch nur eine andere ungerade Funktion dargestellt werden. Daraus lässt sich folgender Umkehrschluss ziehen:

### Merke

Bei der Entwicklung einer *geraden* Funktion in eine Fourier-Reihe verschwinden alle Koeffizienten  $\hat{b}_n$ , bei der Entwicklung einer *ungeraden* Funktion in eine Fourier-Reihe verschwinden die Koeffizienten  $a_0$  und  $\hat{a}_n$ .

Außerdem lässt sich in beiden Fällen der Integrationsbereich halbieren. Das Produkt aus einer geraden Funktion  $u(t)$  mit der geraden Kosinusfunktion in Gl. (9.21) ist wieder eine gerade Funktion. Ebenso ist das Produkt aus einer ungeraden Funktion mit der ungeraden Sinusfunktion eine gerade Funktion. Berechnen wir also das Integral nicht über den Bereich  $0 \leq t \leq T$ , sondern über den Bereich  $-T/2 \leq t \leq T/2$ , dann ist in beiden Fällen wegen der Integration einer jeweils geraden Funktion unmittelbar zu erkennen, dass die beiden Teilbereiche  $-T/2 \leq t \leq 0$  und  $0 \leq t \leq T/2$  den gleichen Beitrag zum Integral liefern. Bei der Berechnung der Koeffizienten kann also der doppelte Wert der Integrale über den Bereich  $0 \leq t \leq T/2$  genommen werden (vgl. Tab. 9.1).

Betrachten wir jetzt noch einmal die Abb. 9.6. Da es sich hier um eine gerade Funktion handelt, hätten wir uns die Berechnung der Koeffizienten  $\hat{b}_n$  in Gl. (9.25) mit den Kenntnissen aus diesem Abschnitt ersparen können und bei der Berechnung der Koeffizienten  $\hat{a}_n$  in Gl. (9.24) hätten wir nur das erste Integral berechnen müssen.

Eine weitere Symmetrieeigenschaft liegt vor, wenn eine Funktion die Bedingung  $u(t) = -u(t + T/2)$  erfüllt. In diesem Fall spricht man von **Halbwellensymmetrie** oder von der **Symmetrie dritter Art**. Eine Funktion mit dieser Eigenschaft kann auch nur durch trigonometrische Funktionen dargestellt werden, die die gleiche Eigenschaft aufweisen, d.h. für die Funktionen in der Fourier-Reihe muss gelten

$$\cos(n\omega t) = -\cos\left[n\omega\left(t + \frac{T}{2}\right)\right] \quad \text{und} \quad \sin(n\omega t) = -\sin\left[n\omega\left(t + \frac{T}{2}\right)\right]. \quad (9.41)$$

Mithilfe der Additionstheoreme (H.4) und (H.5) lässt sich zeigen, dass diese Bedingungen nur für ungerade  $n$  erfüllt sind, d.h. bei Halbwellensymmetrie verschwinden die Koeffizienten  $a_0$  sowie  $\hat{a}_n$  und  $\hat{b}_n$  für  $n = 2, 4, \dots$ . Auch in diesem Fall kann der doppelte Wert der Integrale über den Bereich  $0 \leq t \leq T/2$  genommen werden.

Tritt bei einer geraden oder ungeraden Funktion gleichzeitig Halbwellensymmetrie auf, dann liegt eine **Symmetrie vierter Art** vor. In diesen Fällen verschwinden die entsprechenden Koeffizienten infolge der Eigenschaft gerade oder ungerade und zusätzlich alle Koeffizienten mit gerader Ordnungszahl. Das Integrationsintervall kann auf den Bereich  $0 \leq t \leq T/4$  beschränkt werden, wenn das Integral mit dem Faktor 4 multipliziert wird.

Die verschiedenen Möglichkeiten sind für beispielhafte Kurvenverläufe und mit den dazugehörigen Bestimmungsgleichungen für die Koeffizienten in Tab. 9.1 zusammengestellt<sup>2</sup>.

---

2 Bei den in Tab. 9.1 betrachteten Symmetrien tritt kein Fall auf, bei dem die Koeffizienten ausschließlich gerade Ordnungszahlen aufweisen, im Gegensatz zu der Fourier-Entwicklung Nr. 13 in Tab. H.1. Eigentlich handelt es sich in diesem Fall auch nicht um eine Symmetrie, sondern die Bezeichnung  $T$  wurde in Abwandlung der üblichen Vorgehensweise für zwei komplette Periodendauern verwendet. Die Ursache ist darin begründet, dass diese Funktion durch Gleichrichtung, z.B. aus der 50-Hz-Netzwechselfspannung, entsteht. Da gleichzeitig Netzspannung und gleichgerichtete Spannung in einer Schaltung existieren, bezieht man üblicherweise alle Signale auf die gleiche Periodendauer. Mit der Beibehaltung von  $T = 20\text{ms}$  besteht die Fourier-Reihe dann aus den geradzahligten Oberschwingungen der Netzfrequenz. In der gleichen Weise wird bei dem gleichgerichteten Dreiphasenstrom (Nr. 16 in Tab. H.1) die Periodendauer der Netzfrequenz beibehalten, obwohl die Frequenz der Grundschwingung bei dieser Kurvenform um den Faktor 3 größer ist und die Periodendauer nur  $T/3$  beträgt.

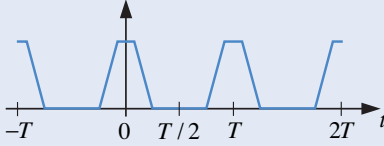
Tabelle 9.1

## Symmetrieeigenschaften von Funktionen

## Symmetrieeigenschaft

## Eigenschaften der Koeffizienten

Gerade Funktion

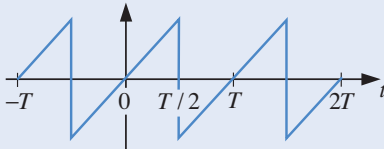


$$u(t) = u(-t)$$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} u(t) dt$$

$$\hat{a}_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} u(t) \cos(n\omega t) dt, \quad \hat{b}_n = 0$$

Ungerade Funktion

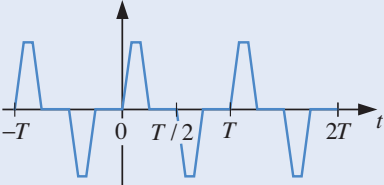


$$u(t) = -u(-t)$$

$$a_0 = 0, \quad \hat{a}_n = 0$$

$$\hat{b}_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} u(t) \sin(n\omega t) dt$$

Halbwellensymmetrie



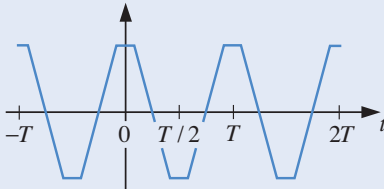
$$u(t) = -u(t + T/2)$$

$$a_0 = 0, \quad \hat{a}_{2n} = 0, \quad \hat{b}_{2n} = 0$$

$$\hat{a}_{2n-1} = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} u(t) \cos[(2n-1)\omega t] dt$$

$$\hat{b}_{2n-1} = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} u(t) \sin[(2n-1)\omega t] dt$$

Gerade Funktion mit Halbwellensymmetrie



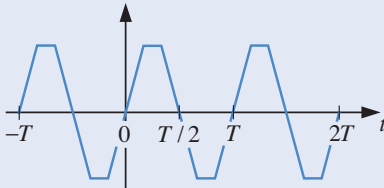
$$u(t) = u(-t) = -u(t + T/2)$$

$$a_0 = 0, \quad \hat{a}_{2n} = 0$$

$$\hat{a}_{2n-1} = \frac{8}{T} \int_0^{T/4} u(t) \cos[(2n-1)\omega t] dt$$

$$\hat{b}_n = 0$$

Ungerade Funktion mit Halbwellensymmetrie

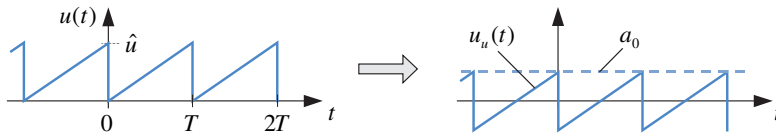


$$u(t) = -u(-t) = -u(t + T/2)$$

$$a_0 = 0, \quad \hat{a}_n = 0, \quad \hat{b}_{2n} = 0$$

$$\hat{b}_{2n-1} = \frac{8}{T} \int_0^{T/4} u(t) \sin[(2n-1)\omega t] dt$$

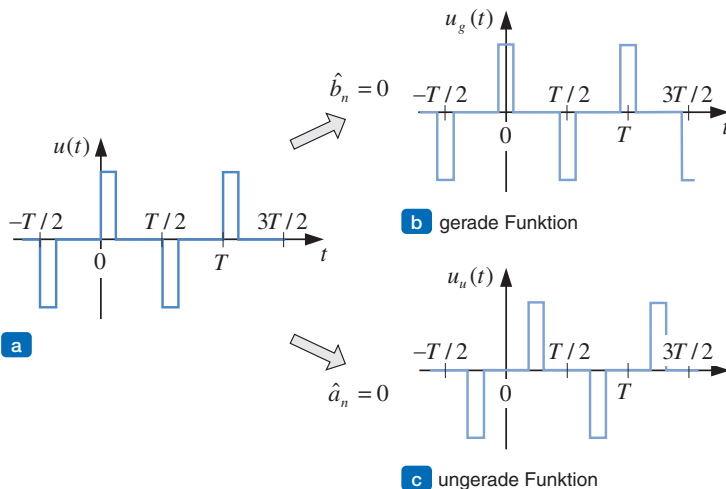
Bei manchen Funktionen sind die Symmetrieeigenschaften zunächst nicht unmittelbar zu erkennen, da sie infolge eines Gleichanteils entlang der vertikalen Achse verschoben sind. Betrachten wir die Sägezahnkurve in ►Abb. 9.10, dann trifft auf diese Kurve keine der genannten Symmetrien zu. Zieht man aber den auf der rechten Seite der Abbildung gestrichelt dargestellten Gleichanteil ab, dann verbleibt eine ungerade Funktion. In der Fourier-Darstellung treten bei dieser Funktion keine Kosinusfunktionen auf und die Koeffizienten  $\hat{a}_n$  verschwinden (vgl. Beispiel Nr. 3 in Tab. H.1). Die Entscheidung, ob es sich um eine gerade oder ungerade Funktion handelt, sollte also erst getroffen werden, nachdem der Gleichanteil abgespalten wurde.



**Abbildung 9.10:** Ungerade Funktion mit überlagertem Gleichanteil

### Erzeugung gerader und ungerader Funktionen durch Achsenverschiebung

Der Aufwand bei der Berechnung der Koeffizienten kann in vielen Fällen durch einfache Verschiebung der Funktion entlang der horizontalen Achse reduziert werden. Betrachten wir als Beispiel die Rechteckfunktion mit verschwindendem Mittelwert in ►Abb. 9.11a. Bei dieser Festlegung des Nullpunktes treten sowohl gerade als auch ungerade Anteile auf, d.h. es müssen beide Integrale zur Bestimmung von  $\hat{a}_n$  und  $\hat{b}_n$  berechnet werden.



**Abbildung 9.11:** Vereinfachte Koeffizientenberechnung durch geänderte Festlegung des Nullpunktes

Wird der Nullpunkt jedoch so wie in Teilbild b gewählt, dann erhalten wir eine gerade Funktion und die Koeffizienten  $\hat{b}_n$  verschwinden. Mit der Wahl des Nullpunktes entsprechend Teilbild c wird die Ausgangsfunktion zur ungeraden Funktion und die Berechnung der Koeffizienten  $\hat{a}_n$  entfällt.

### Zerlegung einer Funktion in ihren geraden und ungeraden Anteil

Im allgemeinen Fall lässt sich eine periodische Funktion jedoch nicht allein durch gerade oder ungerade Anteile beschreiben (vgl. ►Abb. 9.12). Bei der Entwicklung in eine Fourier-Reihe werden dann sowohl die Kosinusfunktionen als auch die Sinusfunktionen benötigt. In manchen Fällen wird die Berechnung der Koeffizienten aber dadurch erleichtert, dass die Ausgangsfunktion  $u(t)$  vorab in ihren geraden  $u_g(t)$  und ihren ungeraden Anteil  $u_u(t)$  zerlegt wird, insbesondere dann, wenn die Fourier-Entwicklungen der Funktionen  $u_g(t)$  bzw.  $u_u(t)$  bereits tabellarisch erfasst sind. Eine erneute Berechnung der betreffenden Koeffizienten ist dann nicht mehr erforderlich.

Zur Aufspaltung einer Funktion in die beiden Anteile können die folgenden Beziehungen verwendet werden

$$u(t) = u_g(t) + u_u(t) \quad \text{mit} \quad \begin{aligned} u_g(t) &= \frac{1}{2}[u(t) + u(-t)] \\ u_u(t) &= \frac{1}{2}[u(t) - u(-t)] \end{aligned} \quad (9.42)$$

Zur Überprüfung dieser Aussage bilden wir zunächst die Summe der beiden Funktionen  $u_g(t)$  und  $u_u(t)$  und erhalten richtig die Ausgangsfunktion  $u(t)$ . Da die beiden angegebenen Funktionen auf der rechten Seite der Gleichung außerdem die Bedingungen  $u_g(t) = u_g(-t)$  und  $u_u(t) = -u_u(-t)$  erfüllen, handelt es sich dabei tatsächlich um die Zerlegung in eine gerade und eine ungerade Funktion.

### Beispiel 9.3: Zerlegung in geraden und ungeraden Anteil

Die in Abb. 9.12 dargestellte Funktion

$$u(t) = 2\hat{u} \cdot \begin{cases} t/T & \text{für } 0 \leq t < T/2 \\ 0 & \text{für } T/2 < t < T \end{cases} \quad (9.43)$$

soll in die beiden Teilfunktionen  $u_g(t)$  und  $u_u(t)$  zerlegt werden.

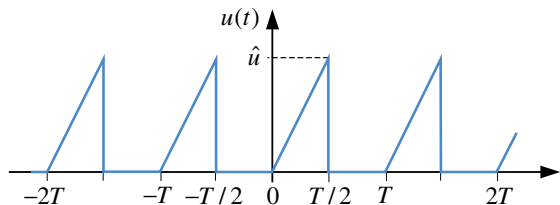
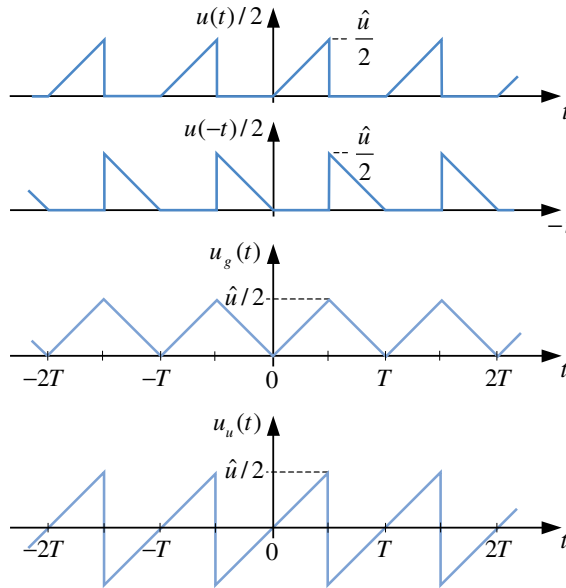


Abbildung 9.12: Ausgangsfunktion für die Zerlegung in geraden und ungeraden Anteil

Nach Gl. (9.42) werden dazu die Funktionen  $u(t)/2$  und  $u(-t)/2$  benötigt. Diese sind in den beiden oberen Diagrammen der ►Abb. 9.13 dargestellt. Die Funktion  $u(-t)/2$  erhält man auf anschauliche Weise aus der Funktion  $u(t)/2$ , indem die Variable  $t$  durch  $-t$  ersetzt, d.h. die Funktion  $u(t)/2$  an der vertikalen Achse gespiegelt wird.

Jetzt muss nur noch die Summe bzw. die Differenz dieser beiden Funktionen gebildet werden, um  $u_g(t)$  bzw.  $u_u(t)$  zu erhalten.



**Abbildung 9.13:** Beispiel für die Zerlegung einer periodischen Funktion in ihren geraden und ungeraden Anteil

Die Funktion  $u_g(t)$  entspricht der bereits bekannten Dreiecksfunktion, jetzt allerdings mit halber Amplitude, deren Koeffizienten  $a_0$  und  $\hat{a}_n$  bereits in Gl. (9.26) angegeben sind. Für die noch durchzuführende Berechnung der Koeffizienten  $\hat{b}_n$  integrieren wir die Sägezahnkurve  $u_u(t) = \hat{u}t/T$  in Abb. 9.13 über den Bereich  $0 \leq t \leq T/2$  entsprechend Tab. 9.1

$$\begin{aligned} \hat{b}_n &= \frac{4\hat{u}}{T^2} \int_0^{T/2} t \sin(n\omega t) dt \stackrel{(H.17)}{=} \frac{4\hat{u}}{T^2} \left[ \frac{\sin(n\omega t)}{(n\omega)^2} - \frac{t \cos(n\omega t)}{n\omega} \right] \Bigg|_0^{T/2} \\ &= \frac{4\hat{u}}{T^2} \left[ -\frac{T \cos(n\pi)}{2n\omega} \right] = -\frac{\hat{u}}{n\pi} \cos(n\pi) = \frac{\hat{u}}{n\pi} (-1)^{n+1}. \end{aligned} \quad (9.44)$$

Zusammenfassend erhalten wir die Fourier-Entwicklung der Funktion (9.43) durch Überlagerung der Ergebnisse (9.26) unter Berücksichtigung des Faktors 1/2 und der Sinusfunktionen mit den Amplituden aus Gl. (9.44)

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{\hat{u}}{4} - \frac{2\hat{u}}{\pi^2} \left[ \cos(\omega t) + \frac{1}{3^2} \cos(3\omega t) + \frac{1}{5^2} \cos(5\omega t) + \dots \right] \\ &\quad + \frac{\hat{u}}{\pi} \left[ \frac{\sin(\omega t)}{1} - \frac{\sin(2\omega t)}{2} + \frac{\sin(3\omega t)}{3} - \frac{\sin(4\omega t)}{4} + \dots \right]. \end{aligned} \quad (9.45)$$

### 9.2.3 Tabellarische Zusammenstellung wichtiger Fourier-Reihen

Für einige in der Elektrotechnik häufig vorkommende Funktionen ist die Fourier-Entwicklung in Kap. H.3 im Anhang angegeben.

#### Einfache Herleitung weiterer Fourier-Reihen

Zur Herleitung weiterer Reihen gibt es verschiedene Möglichkeiten. Es ist nicht unbedingt erforderlich, die Koeffizienten nach Gl. (9.21) jeweils neu zu berechnen. Oft lassen sich die Kurvenformen aus den bereits tabellarisch erfassten Funktionen erzeugen. Sehr vielfältige Möglichkeiten ergeben sich z.B. durch lineare Überlagerung. Die Entwicklung der durch Einweggleichrichtung entstandenen Funktion Nr. 15 (vgl. Tab. H.1) erhält man z.B. aus der Addition der Reihe Nr. 13 mit einer Sinusfunktion (linke Seite der ►Abb. 9.14) und anschließender Halbierung des Ergebnisses (vgl. auch die Koeffizienten bei den genannten Beispielen in der Tab. H.1).

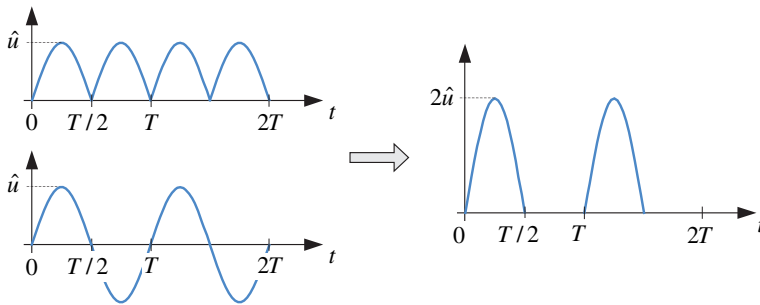


Abbildung 9.14: Überlagerung bekannter Reihenentwicklungen

Insbesondere mit der Zeitfunktion Nr. 10 und den daraus abgeleiteten Sonderfällen Nr. 11 und 12 in der Tabelle lassen sich kompliziertere, stückweise lineare Funktionsverläufe zusammensetzen.

In manchen Fällen muss eine Funktion zunächst auf der Zeitachse verschoben werden, bevor sie mit anderen Funktionen überlagert wird. Bei einer Verschiebung der Kurvenform  $u(t)$  um die Zeitspanne  $t_0$  muss  $t$  durch  $(t - t_0)$  ersetzt werden. Der bisherige Punkt  $u(t = 0)$  wandert auf der Zeitachse nach rechts an die Stelle  $u(t = t_0)$ . Durch Einsetzen dieser Zeitverschiebung in die Fourier-Entwicklung (9.6) und anschließende Anwendung der Additionstheoreme (H.4) und (H.5) erhalten wir die Gleichung

$$\begin{aligned}
 u(t) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \hat{a}_n \cos(n\omega(t - t_0)) + \hat{b}_n \sin(n\omega(t - t_0)) \right] \\
 &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[ \hat{a}_n \cos(n\omega t_0) - \hat{b}_n \sin(n\omega t_0) \right] \cos(n\omega t) \right. \\
 &\quad \left. + \left[ \hat{a}_n \sin(n\omega t_0) + \hat{b}_n \cos(n\omega t_0) \right] \sin(n\omega t) \right\}, \tag{9.46}
 \end{aligned}$$

aus der die Vorschrift zur Berechnung der neuen, in eckigen Klammern stehenden, Koeffizienten direkt abgelesen werden kann.

### Beispiel 9.4: Verschiebung auf der Zeitachse

Ausgehend von der Reihenentwicklung Nr. 13 soll die Fourier-Entwicklung für die gleichgerichtete Kosinusfunktion (Nr. 14) abgeleitet werden.

In der Entwicklung Nr. 13 verschwinden die Koeffizienten  $\hat{b}_n = 0$  und  $n$  nimmt nur gerade Werte an. Wegen der Verschiebung um  $t_0 = T/4$  bzw.  $\omega t_0 = \pi/2$  gelten für die neuen Koeffizienten die Beziehungen

$$\hat{a}_{n,\text{neu}} = \hat{a}_n \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) + 0 = (-1)^{n/2} \hat{a}_n \quad \text{und} \quad \hat{b}_{n,\text{neu}} = 0 + 0. \quad (9.47)$$

#### 9.2.4 Die Linienspektren

Mit der Harmonischen Analyse haben wir eine weitere Möglichkeit zur Beschreibung einer periodischen Funktion kennen gelernt. Einerseits lässt sich die Funktion in der Form  $u(t)$ , also im *Zeitbereich*, mathematisch beschreiben und auch entsprechend grafisch darstellen, andererseits ist aber die gleiche Information in anderer Form auch in der Reihenentwicklung enthalten. Bei der Fourier-Reihe wird die Funktion charakterisiert durch die Amplituden und Phasen der einzelnen Harmonischen und zwar bei der Frequenz der Grundschwingung und bei den Vielfachen dieser Frequenz, d.h. bei den Oberschwingungen. Man spricht in diesem Fall von der Darstellung der Funktion im *Frequenzbereich*. In der dazugehörigen grafischen Darstellung werden dann die Amplituden  $\hat{c}_n$  nach Gl. (9.7) bzw. die Phasen  $\varphi_n$  oder  $\psi_n$  als Funktion der Frequenz aufgetragen. Da sich in diesem Fall nur diskrete Werte bei der Grundfrequenz und deren Vielfachen ergeben, erhalten wir ein so genanntes **Linienspektrum**, im konkreten Fall also ein **Amplitudenspektrum** bzw. ein **Phasenspektrum**. Der Gleichanteil  $a_0$  wird gegebenenfalls beim Amplitudenspektrum mit eingezeichnet.

In vielen praktischen Situationen wie z.B. bei der Verlustberechnung oder der Untersuchung der gegenseitigen Beeinflussung von Schaltungen und Systemen (Elektromagnetische Verträglichkeit) spielen insbesondere die *Amplituden* der Oberschwingungen eine bedeutende Rolle. Aus diesem Grund kann auch die Berechnung der Koeffizienten der Fourier-Entwicklung durch Achsenverschiebung vereinfacht werden (vgl. Abb. 9.11), da sich die Amplituden (9.10) durch diese Maßnahme nicht ändern. Will man jedoch aus den Spektren die Zeitfunktion wieder zusammensetzen, dann wird auch das Phasenspektrum benötigt.

Die beiden Darstellungsarten sind am Beispiel der Dreiecksfunktion in ►Abb. 9.15 nochmals gegenübergestellt. Das schnelle Abklingen der höheren Harmonischen im Amplitudenspektrum deutet darauf hin, dass nur wenige Glieder aus der Fourier-Entwicklung benötigt werden, um eine gute Annäherung an die Ausgangskurve zu erreichen.



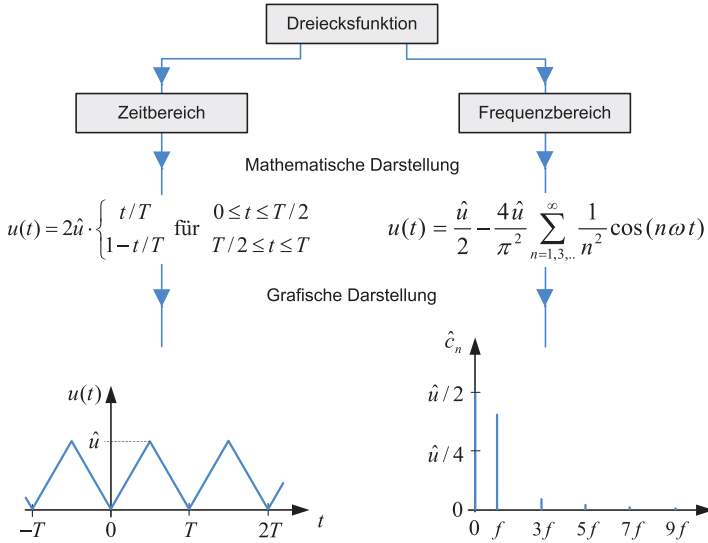


Abbildung 9.15: Darstellung der Dreiecksfunktion im Zeit- und Frequenzbereich

## 9.3 Anwendung der Fourier-Reihen in der Schaltungsanalyse

### 9.3.1 Der Ablaufplan

Die Vorgehensweise bei der Analyse linearer Netzwerke, die an zeitlich periodische Strom- und Spannungsquellen angeschlossen sind, ist als Ablaufplan in ►Abb. 9.16 nochmals zusammengestellt.

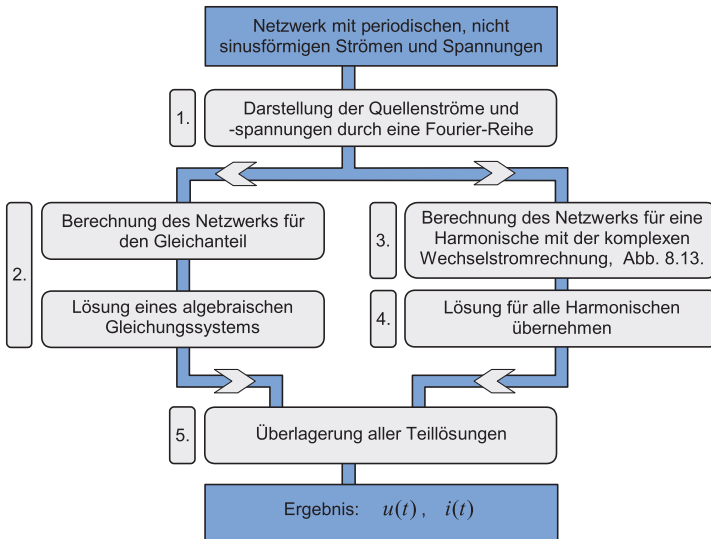


Abbildung 9.16: Berechnungsschema bei periodischen, nicht sinusförmigen Quellen

1. Im ersten Schritt wird die periodische Signalform in eine Fourier-Reihe (9.6) entwickelt. Dies kann mithilfe der Tabellen in Kap. H.3 oder durch Berechnung der Koeffizienten nach Gl. (9.21) oder Gl. (9.33) erfolgen.
2. Sofern die Reihe einen Gleichanteil  $a_0$  enthält, wird das Netzwerk für den Gleichstrom bzw. für die Gleichspannung berechnet. Induktivitäten werden in diesem Fall durch einen Kurzschluss, Kapazitäten durch einen Leerlauf ersetzt.
3. Die Quelle wird durch eine einfache Wechselstrom- bzw. Wechselspannungsquelle ersetzt und das Netzwerk wird mithilfe der komplexen Wechselstromrechnung bei der angenommenen Amplitude und Kreisfrequenz  $\omega$  analysiert.
4. Die Lösung aus der komplexen Wechselstromrechnung wird für alle Harmonischen mit den entsprechenden Amplituden aus der Fourier-Reihe und den zugehörigen Kreisfrequenzen  $n\omega$  übernommen.
5. Die Gesamtlösung ergibt sich durch Überlagerung aller Teillösungen. Befinden sich mehrere Quellen im Netzwerk, dann werden die bisherigen Schritte für alle Quellen durchgeführt und die Lösungen für die einzelnen Quellen wiederum überlagert.

### 9.3.2 Eine einfache Schaltung

Nachdem wir in den vorangegangenen Kapiteln die verschiedenen Aspekte der Fourier-Entwicklung untersucht haben, soll ihre Anwendung an einer konkreten Schaltung demonstriert werden. Die  $RL$ -Reihenschaltung in ►Abb. 9.17 wird an eine gleichgerichtete Wechselspannung  $u(t) = \hat{u}|\sin(\omega t)|$  angeschlossen. Der in diesem Netzwerk fließende zeitabhängige Strom  $i(t)$  soll berechnet werden.

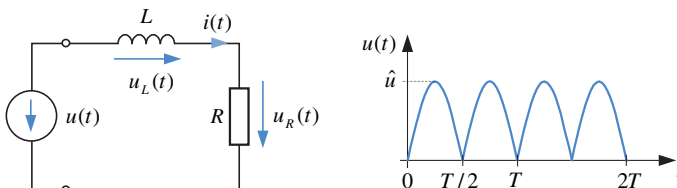


Abbildung 9.17:  $RL$ -Reihenschaltung an gleichgerichteter Wechselspannung

#### Schritt 1:

Der Ausgangspunkt für die weiteren Betrachtungen ist die in Tab. H.1 Nr. 13 angegebene Fourier-Darstellung der gleichgerichteten Spannung

$$\begin{aligned}
 u(t) &= \frac{2\hat{u}}{\pi} - \frac{4\hat{u}}{\pi} \left[ \frac{\cos(2\omega t)}{1 \cdot 3} + \frac{\cos(4\omega t)}{3 \cdot 5} + \frac{\cos(6\omega t)}{5 \cdot 7} + \dots \right] \\
 &= \frac{2\hat{u}}{\pi} - \frac{4\hat{u}}{\pi} \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1} \cos(n\omega t).
 \end{aligned} \tag{9.48}$$

## Schritte 2 bis 5:

Der Unterschied zur Gl. (9.1) besteht jetzt lediglich darin, dass die Summe (9.48) unendlich viele Glieder enthält, die wir uns als Reihenschaltung unendlich vieler Einzelquellen entsprechend Abb. 9.1 vorstellen können. Damit erhalten wir für den Strom ebenfalls eine unendliche Summe, die wir in Analogie zur Gl. (9.2) bereits angeben können

$$i(t) = \frac{2\hat{u}}{R\pi} - \frac{4\hat{u}}{\pi} \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} \frac{1}{(n^2-1)\sqrt{R^2+(n\omega L)^2}} \cos\left(n\omega t - \arctan\frac{n\omega L}{R}\right). \quad (9.49)$$

## Auswertung des Ergebnisses:

Wir wollen jetzt den zeitabhängigen Strom für drei unterschiedliche Werte der Induktivität auswerten. Betrachten wir zunächst den Grenzfall  $L = 0$ . Bei nicht vorhandener Induktivität vereinfacht sich die Beziehung (9.49) und wir erhalten den erwarteten Zusammenhang  $i(t) = u(t)/R$ . Der Strom hat den gleichen zeitlichen Verlauf wie die in Abb. 9.17 dargestellte Spannung. Im anderen Grenzfall  $L \rightarrow \infty$  verschwindet jedes Glied der Summe in Gl. (9.49) und der Strom nimmt den zeitlich konstanten, in Gl. (7.10) berechneten Gleichrichtwert an. Auch diese Situation ist leicht einzusehen, da die Impedanz der Reihenschaltung  $R + j\omega L$  für alle Frequenzen unendlich groß wird und somit nur noch ein Gleichstrom fließen kann.

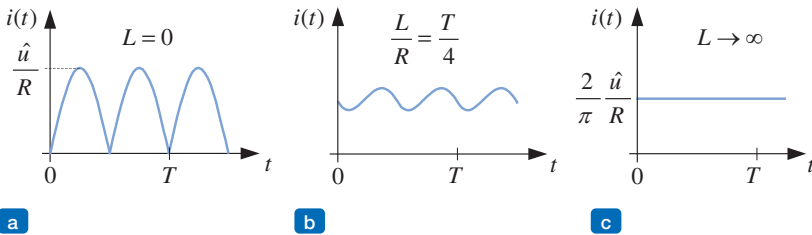


Abbildung 9.18: Stromverlauf in der  $RL$ -Reihenschaltung bei verschiedenen Induktivitäten

Wird die Induktivität ausgehend von dem Anfangswert  $L = 0$  erhöht, dann muss sich auch der Strom ausgehend von der Kurvenform der Spannung in ►Abb. 9.18a in Richtung auf den konstanten Wert in ►Abb. 9.18c ändern. Wird die Induktivität so gewählt, dass das Verhältnis  $L/R$  einem Viertel der Periodendauer entspricht, dann nimmt der Strom den in ►Abb. 9.18b dargestellten Verlauf an.

Infolge der frequenzabhängigen Impedanz der Reihenschaltung weicht die periodische, zeitabhängige Stromform wesentlich von der Spannungsform ab. Der Anteil der Oberschwingungen ist beim Strom deutlich geringer, d.h. die Induktivität wirkt wegen der mit der Frequenz zunehmenden Impedanz glättend auf den Strom. Wir erkennen hier wieder das Verhalten der  $RL$ -Tiefpass-Schaltung in Abb. 8.24, deren Amplitudengang in Abb. 8.25 dargestellt ist.

Man beachte, dass bei den vorausgesetzten linearen Komponenten keine zusätzlichen Harmonischen entstehen, im Gegensatz zu Schaltungen mit nichtlinearen Komponenten. Die Stromverformung wird allein durch die stärkere Dämpfung der höheren Harmonischen verursacht.

### 9.3.3 Die Erzeugung von Subharmonischen

Bei einigen in der Praxis verwendeten Schaltungen führt die spezielle Betriebsweise dazu, dass trotz einer eingangs angeschlossenen sinusförmigen Spannungsquelle mit vorgegebener Frequenz  $f$  innerhalb der Schaltung Strom- und Spannungsverläufe entstehen, deren Spektrum sich nicht nur aus der Frequenz  $f$  und deren Vielfachen  $nf$  zusammensetzt, sondern es entstehen auch Spektralanteile unterhalb von  $f$ . Wir sprechen in diesem Fall von Subharmonischen. Zur Illustration betrachten wir eine einfache Schaltung zur Steuerung der Leistung an einem ohmschen Verbraucher, der an das Wechselspannungsnetz angeschlossen ist.

#### Beispiel 9.5: Pulspaketsteuerung

Ein Heizwiderstand  $R$  ist gemäß ►Abb. 9.19 an die Netzwechselspannung  $\hat{u} \sin(\omega t)$  mit  $\omega = 2\pi \cdot 50\text{Hz}$  angeschlossen. Zur Reduzierung der Heizleistung ist ein elektronischer Schalter  $S$  vorgesehen, der die Verbindung zwischen Quelle und Verbraucher jeweils für komplette Netzhalbwellen unterbrechen kann.

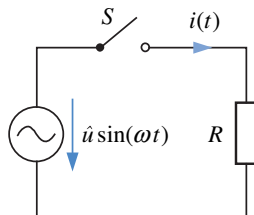


Abbildung 9.19: Steuerung der Verbraucherleistung mit einem Schalter

Aus der Vielzahl der Möglichkeiten wählen wir ein konkretes Beispiel mit festgelegtem Schaltmuster aus. Um die Leistung im Mittel auf 60 % des Maximalwertes abzusenken, wird der Schalter abwechselnd für drei Netzhalbwellen geschlossen und anschließend für zwei Netzhalbwellen geöffnet. Der dazugehörige Netzstrom ist in ►Abb. 9.20 dargestellt.

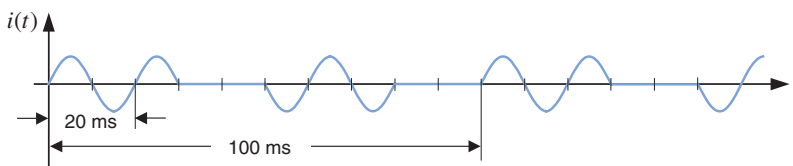
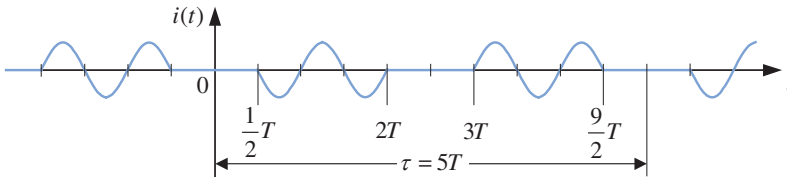


Abbildung 9.20: Pulsmuster des Netzstromes

Die Periodendauer der Quellenspannung beträgt  $T = 1/50\text{Hz} = 20\text{ms}$ . Für den Netzstrom trifft diese Periodendauer aber nicht mehr zu. Die Stromform wiederholt sich auf die gleiche Weise erst nach zehn Netzhalbwellen. Um Verwechslungen zu vermeiden, wollen wir die Periodendauer beim Strom mit  $\tau$  bezeichnen. Wegen  $\tau = 5T$  ist die Frequenz der Grundschiwingung beim Strom  $f = 1/\tau = 10\text{Hz}$  um den Faktor 5 geringer als die Frequenz der Netzwechselfspannung. Die Oberschwingungen des Netzstromes treten also bei Vielfachen von 10Hz auf. Durch die besondere Betriebsweise dieser Schaltung werden Ströme auf den Netzleitungen erzeugt, mit Frequenzen sowohl unterhalb der Netzfrequenz (**Subharmonische**) als auch zwischen den Vielfachen von 50Hz (**Zwischenharmonische**).

Im nächsten Schritt wollen wir das Amplitudenspektrum des Netzstromes nach Abb. 9.20 berechnen. Die Anzahl der positiven und negativen Halbwellen des Stromes innerhalb der Periodendauer  $\tau$  ist gleich, d.h. der Mittelwert verschwindet in jedem Fall und es gilt  $a_0 = 0$ . Zur Reduzierung des Rechenaufwandes verschieben wir die Zeitachse derart, dass entweder die Koeffizienten  $\hat{a}_n$  oder  $\hat{b}_n$  verschwinden. Mit der willkürlichen Wahl des Anfangspunktes  $t = 0$  in ►Abb. 9.21 erhalten wir eine ungerade Funktion und es gilt  $\hat{a}_n = 0$ .



**Abbildung 9.21:** Erzeugung einer ungeraden Funktion durch Achsenverschiebung

Bei geschlossenem Schalter ist der Strom proportional zur Spannung und besitzt die Amplitude  $\hat{i} = \hat{u} / R$ . Er kann also im Zeitbereich folgendermaßen dargestellt werden

$$i(t) = \hat{i} \cdot \begin{cases} \sin(\omega t) & \text{für } T/2 \leq t \leq 2T \text{ und } 3T \leq t \leq 9T/2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (9.50)$$

Im Frequenzbereich wird er ausschließlich durch Sinusfunktionen beschrieben, wobei die Periodendauer der Grundschiwingung durch  $\tau = 5T$  gegeben ist. Zur Unterscheidung von der Kreisfrequenz  $\omega = 2\pi/T$  der Netzspannung bezeichnen wir jetzt die Kreisfrequenz bei der Grundschiwingung des Stromes mit  $\tilde{\omega} = 2\pi/\tau = \omega/5$ . Für die Fourier-Darstellung des Stromes gilt dann

$$i(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{b}_n \sin(n\tilde{\omega}t) = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{b}_n \sin\left(n2\pi \frac{t}{\tau}\right) \quad (9.51)$$

Die Amplituden der Harmonischen erhalten wir durch Berechnung des folgenden Integrals, das aber nur in den Bereichen nicht verschwindenden Stromes einen Beitrag liefert

$$\hat{b}_n = \frac{4}{\tau} \int_0^{\tau/2} i(t) \sin(n\tilde{\omega}t) dt = \frac{4\hat{i}}{\tau} \int_{T/2}^{2T} \sin(\omega t) \sin(n\tilde{\omega}t) dt. \quad (9.52)$$

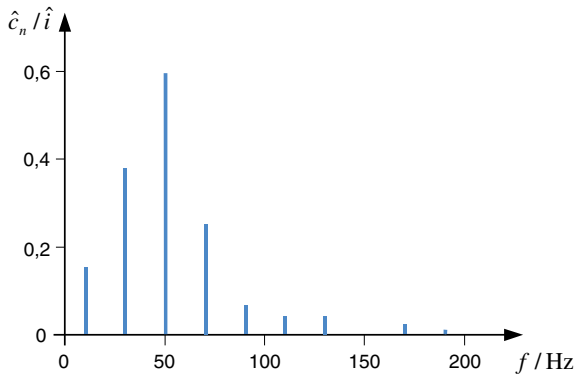
Das Integral kann mit den Formeln in Kap. H.2 berechnet werden. Es ist jedoch darauf zu achten, dass für  $n\tilde{\omega} = \omega$ , d.h. für  $n = 5$  die Beziehung (H.11) und für  $n \neq 5$  die Beziehung (H.12) zu verwenden ist. Als Ergebnis erhalten wir die Koeffizienten

$$\hat{b}_n = \hat{i} \cdot \begin{cases} 0 & n \text{ gerade} \\ \frac{3}{5} & \text{für } n = 5 \\ \frac{20}{\pi(n^2 - 25)} \sin\left(\frac{n\pi}{5}\right) & n \text{ ungerade und } n \neq 5 \end{cases}. \quad (9.53)$$

Zur Darstellung des Amplitudenspektrums werden entsprechend

$$\hat{c}_n \stackrel{(9.10)}{=} +\sqrt{\hat{a}_n^2 + \hat{b}_n^2} = |\hat{b}_n| \quad (9.54)$$

die Beträge der Koeffizienten (9.53) verwendet. Das Ergebnis ist in ►Abb. 9.22 dargestellt.



**Abbildung 9.22:** Amplitudenspektrum für den Strom in Abb. 9.20 bzw. 9.21

Diese Amplituden fallen im Bereich  $n > 5$  sehr schnell mit wachsender Ordnungszahl ab. Es fällt auf, dass bei der Netzfrequenz 50Hz die Amplitude den Wert  $\hat{b}_5 = 0,6\hat{i}$  annimmt, in Übereinstimmung mit der im Mittel auf 60% des Maximalwertes reduzierten Leistung. Auf diese Besonderheit kommen wir in Beispiel 9.7 noch einmal zurück.

### 9.3.4 Effektivwert und Leistung

Die Berechnung der Verluste in einem ohmschen Widerstand erfordert nach Gl. (7.13) die Berechnung des Effektivwertes von Strom oder Spannung. Liegt die Spannung in ►Abb. 9.23 in Form einer Fourier-Entwicklung nach Gl. (9.6) vor, dann muss entsprechend der Definition in Gl. (7.11) das Quadrat dieser Funktion über die Periodendauer integriert werden.

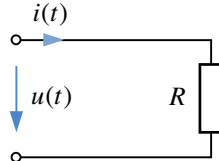


Abbildung 9.23: Verlustberechnung bei periodischem Spannungsverlauf

Für den Effektivwert gilt die Beziehung

$$U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt} \stackrel{(9.6)}{=} \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \left\{ a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [\hat{a}_n \cos(n\omega t) + \hat{b}_n \sin(n\omega t)] \right\}^2 dt} \quad (9.55)$$

Aufgrund der Orthogonalitätsrelation (9.13) liefern wieder nur die quadratischen Glieder einen Beitrag zum Integral, so dass der Effektivwert mithilfe der Fourier-Koeffizienten die resultierende Form

$$U = \sqrt{a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (\hat{a}_n^2 + \hat{b}_n^2)} \stackrel{(9.10)}{=} \sqrt{a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\hat{c}_n}{\sqrt{2}} \right)^2} \quad (9.56)$$

annimmt (vgl. die **Parseval'sche Gleichung** (G.17) im Anhang). Zusammenfassend gilt die Aussage:

#### Merke

Das Quadrat des Effektivwertes einer als Fourier-Entwicklung vorliegenden Funktion ist gegeben durch die Summe aus dem Quadrat des Mittelwertes und den Quadraten der Effektivwerte aller Harmonischen. Die Phasenwinkel haben keinen Einfluss.

Der Effektivwert einer periodischen Funktion kann also einerseits mithilfe der Gl. (7.11) durch Integration über das Quadrat der zeitabhängigen Funktion berechnet werden, andererseits durch geometrische Addition der bekannten Fourier-Koeffizienten. Für die in Tab. H.1 aufgelisteten Beispiele sind die Effektivwerte jeweils mit angegeben.

Ausgehend von der Gl. (9.56) lässt sich ein weiteres Linienspektrum zur Charakterisierung der Leistungsverteilung angeben. Die Darstellung der Quadrate der Effektivwerte bei den einzelnen Harmonischen  $(\hat{a}_n^2 + \hat{b}_n^2)/2$  wird als **Leistungsspektrum** bezeichnet.

### Beispiel 9.6: Effektivwert und Leistungsspektrum einer Dreiecksfunktion

Für die in Abb. 9.6 dargestellte dreieckförmige periodische Spannung soll der Effektivwert bestimmt werden und zwar einerseits mit der zeitabhängigen Funktion nach Gl. (9.22) und andererseits mit der Fourier-Darstellung (9.26).

Ausgehend von Gl. (7.11) erhalten wir die Beziehung

$$U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt} = \sqrt{\frac{2}{T} \int_0^{T/2} u^2(t) dt} \stackrel{(9.22)}{=} \sqrt{\frac{8\hat{u}^2}{T^3} \int_0^{T/2} t^2 dt} = \frac{\hat{u}}{\sqrt{3}}. \quad (9.57)$$

Das Einsetzen der Fourier-Koeffizienten in die Gl. (9.56) liefert zunächst ein Zwischenergebnis mit einer unendlichen Summe

$$\begin{aligned} U &= \sqrt{a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (\hat{a}_n^2 + \hat{b}_n^2)} \stackrel{(9.26)}{=} \sqrt{\frac{\hat{u}^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \left( \frac{-4\hat{u}}{\pi^2} \frac{1}{n^2} \right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{\hat{u}^2}{4} + \frac{8\hat{u}^2}{\pi^4} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^4}} = \sqrt{\frac{\hat{u}^2}{4} + \frac{8\hat{u}^2}{\pi^4} \left[ 1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \dots \right]}. \end{aligned} \quad (9.58)$$

Mit dem in [3] angegebenen Summenwert der numerischen Reihe

$$1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \dots = \frac{\pi^4}{96} \quad (9.59)$$

erhalten wir wieder das gleiche Ergebnis

$$U = \sqrt{\frac{\hat{u}^2}{4} + \frac{\hat{u}^2}{12}} = \frac{\hat{u}}{\sqrt{3}}. \quad (9.60)$$

Liegt also diese dreieckförmige Spannung an einem Widerstand  $R$ , dann können die Verluste durch Einsetzen des aus der Tabelle bekannten Effektivwertes in die Beziehung (7.13) direkt angegeben werden

$$P = \frac{U^2}{R} = \frac{\hat{u}^2}{3R}. \quad (9.61)$$

Das Leistungsspektrum können wir unmittelbar der Gl. (9.58) entnehmen. Der Gleichanteil liefert den Beitrag  $\hat{u}^2/4$ . Die 1. Harmonische trägt  $0,328 \cdot \hat{u}^2/4$  und die 3. Harmonische nur noch  $0,004 \cdot \hat{u}^2/4$  zur Gesamtleistung bei. Zur Leistungsberechnung genügt bei dieser Kurvenform bereits der Gleichanteil mit der Grundschwingung. Alle höheren Harmonischen können vernachlässigt werden.



Mit der Beziehung (9.56) können die Verluste aber nur berechnet werden, wenn der Zweipol ein reiner Widerstand ist. Für den in ►Abb. 9.24 dargestellten verallgemeinerten Fall eines beliebigen linearen Zweipols haben wir bereits in Kap. 8.8 aus der Kenntnis von Wechselspannung und Wechselstrom die Wirkleistung berechnet. Diese dort abgeleitete Beziehung soll jetzt auf den Fall eines periodischen, nicht sinusförmigen Verlaufs von Strom und Spannung erweitert werden.

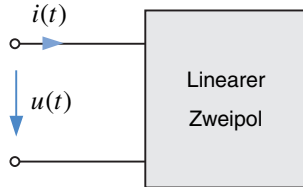


Abbildung 9.24: Leistungsbetrachtungen bei periodischen, nicht sinusförmigen Größen

Wir gehen davon aus, dass sowohl die Spannung als auch der Strom in Abb. 9.24 in der Normalform der Fourier-Entwicklung nach Gl. (9.6) vorliegen

$$\begin{aligned}
 u(t) &= U_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \hat{u}_{g_n} \cos(n\omega t) + \hat{u}_{u_n} \sin(n\omega t) \right] \\
 &= U_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \sqrt{2} U_{g_n} \cos(n\omega t) + \sqrt{2} U_{u_n} \sin(n\omega t) \right] \\
 i(t) &= I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \hat{i}_{g_n} \cos(n\omega t) + \hat{i}_{u_n} \sin(n\omega t) \right] \\
 &= I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \sqrt{2} I_{g_n} \cos(n\omega t) + \sqrt{2} I_{u_n} \sin(n\omega t) \right].
 \end{aligned} \tag{9.62}$$

Die Gleichanteile sollen mit  $U_0$  und  $I_0$  bezeichnet werden. Die Koeffizienten werden durch die Indizes  $g$  für die geraden und  $u$  für die ungeraden Anteile gekennzeichnet.

Die Momentanleistung entspricht dem Produkt der Augenblickswerte und kann durch Einsetzen der Gl. (9.62) für jeden Zeitpunkt angegeben werden. Zur Berechnung der Wirkleistung muss dieser Ausdruck nach Gl. (8.147) über eine komplette Periode integriert werden

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) i(t) dt. \tag{9.63}$$

Dabei verschwinden aufgrund der Beziehung (9.13) wieder alle Mischglieder, so dass lediglich die Integration über die Quadrate der Funktionen auszuführen ist

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T \left\{ U_0 I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \hat{u}_{g_n} \hat{i}_{g_n} \cos^2(n\omega t) + \hat{u}_{u_n} \hat{i}_{u_n} \sin^2(n\omega t) \right] \right\} dt. \tag{9.64}$$

Mit den Ergebnissen dieser Integrale nach Gl. (9.14) kann die Wirkleistung in der folgenden Form dargestellt werden

$$P = U_0 I_0 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \hat{u}_n \hat{i}_n \right] = U_0 I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ U_n I_n \right]. \quad (9.65)$$

Sie setzt sich zusammen aus dem Produkt der Gleichanteile (dies entspricht dem Gleichstromfall, wenn keine Harmonischen vorliegen) und den Produkten der Effektivwerte von Strom und Spannung für die Sinusfunktionen gleicher Frequenz und ebenso für die Kosinusfunktionen gleicher Frequenz.

Wir betrachten jetzt noch den zweiten Fall, bei dem die Fourier-Darstellung mit den in der Phase verschobenen Sinusfunktionen nach Gl. (9.7) vorliegt

$$\begin{aligned} u(t) &= U_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{u}_n \sin(n\omega t + \varphi_{u_n}) = U_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2} U_n \sin(n\omega t + \varphi_{u_n}) \\ i(t) &= I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{i}_n \sin(n\omega t + \varphi_{i_n}) = I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2} I_n \sin(n\omega t + \varphi_{i_n}). \end{aligned} \quad (9.66)$$

Wird das Produkt dieser beiden Funktionen über die Periodendauer  $T$  integriert, dann verschwinden wegen Gl. (H.24) wieder alle Glieder mit unterschiedlichem Zählindex und es verbleiben nach Anwendung eines Additionstheorems zunächst nur zwei Integrale

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T} \int_0^T U_0 I_0 dt + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \hat{u}_n \hat{i}_n \frac{1}{T} \int_0^T \sin(n\omega t + \varphi_{u_n}) \sin(n\omega t + \varphi_{i_n}) dt \right] \\ &\stackrel{(H.6)}{=} U_0 I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{\hat{u}_n \hat{i}_n}{2T} \left( \int_0^T \cos(\varphi_{u_n} - \varphi_{i_n}) dt - \int_0^T \cos(2n\omega t + \varphi_{u_n} + \varphi_{i_n}) dt \right) \right], \end{aligned} \quad (9.67)$$

von denen das zweite keinen Beitrag liefert. Das Endergebnis

$$P = U_0 I_0 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \hat{u}_n \hat{i}_n \cos(\varphi_{u_n} - \varphi_{i_n}) = U_0 I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} U_n I_n \cos(\varphi_{u_n} - \varphi_{i_n}) \quad (9.68)$$

hat die gleiche Form wie die Beziehung (8.158), mit dem Unterschied, dass jetzt über alle Harmonischen summiert wird. In dieser Darstellung sind die bisher betrachteten Fälle für reinen Gleichstrom oder Wechselstrom als Sonderfälle mit enthalten. Die beiden Beziehungen (9.65) und (9.68) sind natürlich gleichwertig und können mit den Formeln (9.10) bis (9.12) ineinander umgerechnet werden.

Das Ergebnis (9.68) hätten wir auch erhalten, wenn wir von der Fourier-Darstellung (9.7) mit den in der Phase verschobenen Kosinusfunktionen ausgegangen wären. Der Übergang von den Sinus- zu den Kosinusfunktionen bedeutet nach (H.5) eine Phasenverschiebung um jeweils  $\pi/2$ , die aber wegen der Differenzbildung im Argument der Kosinusfunktion (9.68) keinen Einfluss hat.

### Merke

Die an einem linearen Zweipol entstehende Wirkleistung setzt sich zusammen aus dem Produkt der Gleichanteile (Mittelwerte) von Strom und Spannung sowie der Summe der Wirkleistungen bei allen Harmonischen.

Die Produkte aus Strom und Spannung unterschiedlicher Frequenzen tragen nicht zur Wirkleistung bei.

Die Scheinleistung wird genauso wie bereits in Gl. (8.164) als das Produkt der Effektivwerte von Strom und Spannung definiert und führt mit Gl. (9.56) auf das Ergebnis

$$S = UI = \sqrt{\left[ U_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} U_n^2 \right]} \left[ I_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} I_n^2 \right]. \quad (9.69)$$

In dem Produkt der Effektivwerte von Strom und Spannung treten Mischterme auf, d.h. die Scheinleistung kann nicht durch Addition der Scheinleistungen bei den einzelnen Harmonischen berechnet werden. Die Definition der Blindleistung folgt ebenfalls der Gl. (8.164)

$$Q^2 = S^2 - P^2. \quad (9.70)$$

Auch die Blindleistung besteht wegen der zusätzlich auftretenden gemischten Glieder nicht mehr allein aus der Summation der Beiträge

$$\tilde{Q} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \hat{u}_n \hat{i}_n \sin(\varphi_{u_n} - \varphi_{i_n}) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n I_n \sin(\varphi_{u_n} - \varphi_{i_n}) \quad (9.71)$$

bei den einzelnen Harmonischen entsprechend Gl. (8.159), sondern es tritt ein weiterer als **Verzerrungsblindleistung**  $D$  bezeichneter Anteil auf

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{P^2 + \tilde{Q}^2 + D^2}. \quad (9.72)$$

Der Leistungsfaktor  $\lambda$  ist analog zur Gl. (8.165) aus dem Verhältnis von Wirkleistung zu Scheinleistung definiert

$$\lambda = \frac{P}{S} = \frac{U_0 I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} U_n I_n \cos(\varphi_{u_n} - \varphi_{i_n})}{\sqrt{\left[ U_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} U_n^2 \right]} \left[ I_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} I_n^2 \right]}. \quad (9.73)$$

Für den Sonderfall, dass die Fourier-Entwicklung nur aus einer, z.B. der  $k$ -ten Harmonischen besteht, vereinfacht sich diese Gleichung zu

$$\lambda = \frac{U_k I_k \cos(\varphi_{u_k} - \varphi_{i_k})}{\sqrt{U_k^2 I_k^2}} = \cos(\varphi_{u_k} - \varphi_{i_k}), \quad (9.74)$$

d.h. der Leistungsfaktor (8.165) ist als Sonderfall in der allgemeineren Beziehung (9.73) enthalten.

# Copyright

Daten, Texte, Design und Grafiken dieses eBooks, sowie die eventuell angebotenen eBook-Zusatzdaten sind urheberrechtlich geschützt. Dieses eBook stellen wir lediglich als **persönliche Einzelplatz-Lizenz** zur Verfügung!

Jede andere Verwendung dieses eBooks oder zugehöriger Materialien und Informationen, einschließlich

- der Reproduktion,
- der Weitergabe,
- des Weitervertriebs,
- der Platzierung im Internet, in Intranets, in Extranets,
- der Veränderung,
- des Weiterverkaufs und
- der Veröffentlichung

bedarf der **schriftlichen Genehmigung** des Verlags. Insbesondere ist die Entfernung oder Änderung des vom Verlag vergebenen Passwortschutzes ausdrücklich untersagt!

Bei Fragen zu diesem Thema wenden Sie sich bitte an: [info@pearson.de](mailto:info@pearson.de)

## Zusatzdaten

Möglicherweise liegt dem gedruckten Buch eine CD-ROM mit Zusatzdaten bei. Die Zurverfügungstellung dieser Daten auf unseren Websites ist eine freiwillige Leistung des Verlags. **Der Rechtsweg ist ausgeschlossen.**

## Hinweis

Dieses und viele weitere eBooks können Sie rund um die Uhr und legal auf unserer Website herunterladen:

**<http://ebooks.pearson.de>**