Mathematik

für Wirtschafts-wissenschaftler

Ein Lehr- und Arbeitsbuch

Teil 2

von Thomas Köhler

Deutscher Betriebswirte-Verlag GmbH

Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler

Thomas Köhler

Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler

Ein Lehr- und Arbeitsbuch

Einfacher Einstieg

Deutscher Betriebswirte-Verlag GmbH, Gernsbach

Bibliografische Informationen der Deutschen Bibliothek

Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet unter http://www.ddb.de abrufbar.

Druck: BoD, Norderstedt
ISBN: 978-3-88640-145-1

Vorwort

Das vorliegende Büchlein ist die Fortsetzung des ersten Bandes der *Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler*, welcher im Herbst vergangenen Jahres erschien. Während letzterer – neben einer Einführung in die mathematischen Grundbegriffe (inklusive Mengenlehre) und einer Darstellung der verschiedenen Zahlenarten – sich vorwiegend mit linearer Algebra (Vektorräumen, Matrizen, Gleichungssystemen) befasste, ist der Inhalt dieses Bandes die reelle Analysis (vorwiegend einer Veränderlichen), ein aus der Schule üblicherweise bereits besser bekannter Stoff, welcher auch für die Anwendung in den wirtschaftswissenschaftlichen Disziplinen von größerer Bedeutung sein dürfte.
Wieder wurde eine Art Gratwanderung versucht: einerseits etwas vom Geist der Mathematik zu vermitteln, d. h. die eine oder andere Aussage zu beweisen oder wenigstens den Beweisgang anzudeuten, andererseits aber doch im Auge zu behalten, dass Studierende der Wirtschaftswissenschaften oft zur Mathematik in einem etwas distanzierterem Verhältnis stehen und auch gar nicht die Zeit haben, sich in die Materie wirklich zu vertiefen. Insofern wurden – wie schon im ersten Band – viele der Beweise in die Anmerkungen verlegt, um den Text einigermaßen flüssig lesbar zu halten. In diesem Sinne wurden auch oft die Voraussetzungen mancher Aussagen verkürzt formuliert, denn viele wollen nur die eigentliche Gleichung („Formel") wissen und nicht genau die Bedingungen ihrer Gültigkeit, die sie ohnehin überlesen würden.
Bei der Beurteilung des Büchleins möge man sich bitte vor Augen halten, dass es sich nicht primär an Mathematiker wendet und zudem die Intention hat, die Darstellung auf möglichst geringem Raum zu leisten. Dabei wurde auch das eine oder andere Mal riskiert, etwas nicht ganz formal korrekt niederzuschreiben, wenn die Hoffnung bestand, damit eine für die Zielgruppe vielleicht verständlichere Darstellung zu liefern.
Inhalt ist, wie gesagt, die reelle Analysis; dabei wurde die mehrerer Veränderlicher vergleichsweise kurz gefasst, nicht zuletzt aber mit der Hoffnung, dass das Wenige dazu Gesagte, verstanden wird und sich auch für längere Zeit dem Gedächtnis einprägt.
Bei den Integrationsmethoden wurden zusätzlich die in einigen vergleichbaren Lehrbüchern nicht besprochene Integration nach Partialbruchzerlegung behandelt, bei den Reihen und speziell den Potenzreihen genauer auf Konvergenzkriterien eingegangen.

Wiederum wurde versucht, die Sachverhalte durch einfache, dafür zahlreiche Beispiele zu illustrieren. Wie in Band 1 wurden Übungsaufgaben präsentiert, die bewusst nicht kreative Umsetzung der gewonnenen Kenntnisse erfordern, sondern nur das unmittelbare Verständnis des Stoffes überprüfen. Die Lösungen mit Kommentaren finden sich im Anhang.

Frau Regina Meier vom Deutschen Betriebswirte-Verlag danke ich für ihre Bereitschaft zur Publikation, Frau Marina Lang für die ausgesprochen wertvolle Hilfe bei der Textgestaltung und ihre äußerst kompetente Lektorierung. Ingmar Böschen war mir – wie schon so oft – eine unersetzliche Hilfe bei der Manuskripterstellung. Meine liebe Frau Carmen hat wieder einmal in ihrer geduldiger Art der Abfassung des Manuskripts beigewohnt und mich tatkräftig durch ihre Ermunterungen bei dieser für mich nicht ganz leichten Arbeit sehr unterstützt.

Hamburg, den 1.2.2011 Thomas Köhler

Inhaltsverzeichnis

1 Folgen und Reihen 9

1.1 Folgen 9

1.2 Reihen 23

Anmerkungen zu Kapitel 1 30

2 Funktionen einer reellen Veränderlichen: Grundbegriffe 34

2.1 Definitionen 34

2.2 Der Graph einer Funktion und seine Charakteristika 36

2.3 Grenzwerte und Stetigkeit von Funktionen 39

2.4 Elementare Funktionen 44

Anmerkungen zu Kapitel 2 55

3 Differentialrechnung einer reellen Veränderlichen 61

3.1 Differenzenquotient und Differentialquotient; Differenzierbarkeit von Funktionen 61

3.2 Ableitungsregeln 66

3.3 Ableitungen elementarer Funktionen 70

3.4 Höhere Ableitungen; Anwendung der Differentialrechnung zur Bestimmung von Nullstellen und Grenzwerten 73

3.5 Kurvendiskussion 77

Anmerkungen zu Kapitel 3 81

4 Integralrechnung 84

4.1 Das bestimmte Integral: geometrische und analytische Definition 84

4.2 Der Hauptsatz der Infinitesimalrechnung; die Begriffe Stammfunktion und unbestimmtes Integral 87

4.3 Integrationsregeln 90

4.4 Integrale elementarer Funktionen 97

4.5 Numerische Integration (numerische Quadratur) 100

4.6 Uneigentliche Integrale 102

Anmerkungen zu Kapitel 4 104

5 Potenzreihen, Taylorpolynome und Taylorreihen 107

5.1 Potenzreihen 107

5.2 Taylorpolynome und Taylorreihen 111

Anmerkungen zu Kapitel 5 114

6 Funktionen mehrerer reeller Veränderlicher 117

6.1 Terminologie; Beispiele 117

6.2 Übertragung von Definitionen und Aussagen aus der Analysis einer Veränderlichen 118

6.3 Differentialrechnung zweier reeller Veränderlicher 121

Anmerkungen zu Kapitel 6 123

7 Anhang: Lösungen zu den Übungen 125

8 Literaturverzeichnis 132

9 Stichwortverzeichnis 133

1 Folgen und Reihen

1.1 Folgen

Definition von Folgen

Eine reelle Zahlenfolge (kurz: Folge), symbolisiert mit $((a_n))$, ist eine in ihrer Abfolge festgelegte (durchnummiertere) Menge reeller Zahlen; a_1 bedeutet also das erste Glied der Folge, a_2 das 2., a_n das n-te Glied (oder auch: der n-te Term), wobei es im Falle **unendlicher Folgen**, die uns allein hier interessieren, **keine Begrenzung** für n gibt; es existiert also u. a. das Element a_{1000}, ebenso $a_{3490087}$ usw., ohne dass man an ein Ende gelangt; auch wenn alle Werte gleich sein sollten, so ist es doch eine unendliche Folge. Die tief gestellte Zahl, der **Index**, beispielsweise 4, bezeichnet die Stellung des Folgengliedes, a_4 den Wert dieses Gliedes. Der Index, die Ordnungszahl, ist also immer eine **natürliche Zahl**, die mit dem Index versehene Zahl kann **irgendeine reelle Zahl** sein, beispielsweise eine Bruchzahl. Wenn hier nur Folgen reeller Zahlen betrachtet werden, so bedeutet dies zweierlei: Erstens dass Folgen komplexer Zahlen uns hier nicht beschäftigen werden – obwohl sie mathematisch kaum schwieriger zu behandeln sind als reelle Zahlenfolgen; relevanter ist folgende Implikation, nämlich dass Folgenglieder (auch wenn sie ausschließlich der Untermenge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ angehören) als Elemente des vollständigen Körpers $\mathbb{R}$ betrachtet werden, somit die wesentliche Eigenschaft aufweisen, dass *jede mit einer oberen Schranke versehene Teilmenge* (also auch eine Folge mit nach oben beschränkten Gliedern) eine **kleinste obere Schranke** besitzt (ein so genanntes **Supremum**; s. Band 1, Kap. 3.4 zum Vollständigkeitsaxiom für $\mathbb{R}$); entsprechend hat eine nach unten beschränkte Folge reeller Zahlen ein **Infimum**, eine größte untere Schranke. Auch wenn die Folgenglieder selbst stets rationale Zahlen sind, kann die größte untere (kleinste obere) Schranke (die sich unter bestimmten Umständen als „Grenzwert" der Folge erweisen wird) eine irrationale Zahl sein – ein Fall, welcher sogar ausgesprochen häufig eintreten wird.
Zwei Folgen $((a_n))$ und $((b_n))$ sind **dann**, aber **auch nur dann gleich**, wenn alle ihre **Folgenglieder gleich** sind; unter Benutzung der in Band 1, Kap. 2.1 eingeführten Formalsprache gilt also:
$((a_n)) = ((b_n)) :\Leftrightarrow a_n = b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Das ist der wesentliche Unterschied zwischen **Mengen** und **Folgen**: Mengen sind gleich, wenn ihre einzelnen Glieder gleich sind, jedes in Menge A vorhandene Element sich irgendwo auch in Menge B finden lässt, Folgen nur

dann, wenn **an gleicher Stelle** immer das **gleiche Element** steht. Die Mengen $A:=\{1;2,3,4...\}$ und $B:=\{2;1,3,4...\}$ sind also gleich, während die Folgen $((a_n))$ mit $a_1=1;a_2=2;a_3=3;a_4=4...$ und $((b_n))$ mit $b_1=2;b_2=1;b_3=3;b_4=4...$ **nicht gleich** sind. (De facto werden wir sie doch als gleich ansehen und mathematisch gleich behandeln, wenn ab einem gewissen Wert n die Terme a_n und b_n **ein für allemal identisch** sind.)

Mathematischer Betrachtung zugänglich sind lediglich Folgen, deren Glieder bekannt sind, sich also angeben lässt, welchen Wert das Folgenglied a_n hat. Im einfachsten Fall geschieht dies **explizit** durch Formulierung der Beziehung zwischen der Zahl n (der Ordnungsnummer des Folgengliedes) und dem Wert a_n. So wäre die Folge der natürlichen Zahlen 1, 2, 3,.. definiert als: $((a_n))$ mit $a_n:=n$, die Folge der Quadratzahlen 1, 4, 9, 16 … folgendermaßen: $((a_n))$ mit $a_n{:=}2^n$, die Folge der Zehnerpotenzen 10, 100, 1000… als $((a_n))$ mit $a_n:=10^n$ Manchmal, wie im gerade gegebenen Beispiel, kann es sinnvoll sein, eine Folge bereits mit dem Glied a_0 beginnen zu lassen, also $a_0=1=10^0$ als ersten Term der Folge anzusehen.

Andererseits wird häufig der Fall eintreten, dass eine Folge für gewisse Werte von n nicht definiert ist, etwa die Folge $((a_n))$ mit $a_n:=\frac{1}{(n-1)\cdot(n-2)}$ überhaupt erst ab $n\geq 3$. Hier würden also die Glieder a_1 und a_2 nicht „existieren"; die ersten Werte lauten:

$$a_3=\frac{1}{(3-1)\cdot(3-2)}=\frac{1}{2};a_4=\frac{1}{(4-1)\cdot(4-2)}=\frac{1}{6}...$$

Weitere wichtige Beispiele sind die konstanten Folgen $((a_n))$ mit $a_n{:=}a$, z. B. $((a_n))$ mit $a_n:=5{,}2$, die aus den immer gleichen Gliedern $a_1=5{,}2;a_2=5{,}2;a_3=5{,}2;a_4=5{,}2...$ besteht. Weiter zu nennen sind die **alternierenden Folgen**, etwa $((a_n))$ mit $a_n{:=}2\cdot(-1)^n$; deren erste Glieder lauten: $a_1=-2;a_2=2;a_3=-2;a_4=2...$, während die ebenfalls alternierende Folge $((a_n))$ mit $a_n:=2\cdot(-1)^{n+1}$ zwar dieselben Elemente, aber in anderer Anordnung enthält, nämlich $a_1=2;a_2=-2;a_3=2;a_4=-2....$

Weniger leicht unmittelbar verständlich und im Allgemeinen anspruchsvoller – gleichwohl nicht weniger wichtig – sind die **induktiv definierten Folgen** $((a_n))$, bei denen sich das n-te Glied a_n mittels mathematischer Operationen aus einer oder mehrerer der vorangehenden Folgenelemente berechnet und man entsprechend die allerersten Folgenglieder explizit angeben muss.

Interessantes Beispiel für eine solch induktiv definierte Folge ist die der **Fibonacci-Zahlen** (die „Fibonacci-Folge"), deren erste Glieder 0 und 1 sind und deren weitere Elemente sich als Summe der unmittelbar vorangehenden beiden ergeben; also $((a_n))$ mit $a_1 := 0; a_2 := 1; a_n := a_{n-2} + a_{n-1}$. $a_3 := a_{3-2} + a_{3-1} = a_1 + a_2 = 0 + 1 = 1$; $a_4 := a_2 + a_3 = 1 + 1 = 2; a_5 = 3; a_6 = 5; a_7 = 8 \ldots$ (s. Anmerkung 1.1).

Während die Fibonacci-Folge nicht zuletzt Esoteriker fasziniert, stellt die **Folge der Primzahlen** $((p_n))$ (also jener natürlicher Zahlen, die nur durch 1 und sich selbst ohne Rest teilbar sind) eine immense Herausforderung an die Mathematiker seit Jahrtausenden dar. Bis heute ist es nicht gelungen, p_n, d. h. die in die Reihenfolge *n*-te Primzahl explizit als Funktion von *n* anzugeben (s. Anmerkung 1.2). Sie lässt sich nur induktiv definieren – und das in mathematisch sehr unbefriedigender Weise –, nämlich als $p_1 = 2$ (1 gilt definitionsgemäß nicht als Primzahl) und p_n : = kleinste Primzahl, die größer als p_{n-1} ist.
Ebenfalls induktiv definiert sind die **Summenfolgen** $((s_n))$ oder **Reihen** zu gegebenen Folgen $((a_n))$. Sie entstehen, indem man zur Bildung des *n*-ten Gliedes der Reihe die ersten *n* Glieder der zugrunde liegenden Folge aufsummiert, also $s_1 = a_1; s_2 = a_1 + a_2; s_3 = a_1 + a_2 + a_3$; allgemein also $s_1 := a_1; s_n := s_{n-1} + a_n$. Wir werden uns in Kap. 1.2 eingehend mit diesen Reihen beschäftigen.
Hauptsächlich kommen hier die explizit definierten Folgen zur Sprache. Das Gesagte gilt aber meist für Folgen allgemein (auch für induktiv definierte).

Folgencharakteristika: Monotonie und Beschränktheit

Was in erster Linie an Folgen interessiert, ist, ob sie **konvergent** sind, d. h. einen „Grenzwert" besitzen und – falls ja –, welchen Wert dieser hat (s. unten). Über das erstere, die Existenz eines Grenzwerts, geben die Charakteristika **Monotonie** und **Beschränktheit** wichtige Entscheidungshilfen.
Def. 1.1: Eine Folge $((a_n))$ heißt *monoton steigend*, wenn für alle *n* gilt: $a_{n+1} \geq a_n$. (Da in dieser Definition auch die Möglichkeit der Gleichheit aufeinander folgender Glieder vorgesehen ist, wäre die Bezeichnung „nicht fallend" eigentlich korrekter, ist aber umständlich und zunehmend ungebräuchlicher.) Eine Folge $((a_n))$ heißt *streng monoton steigend*, wenn für alle *n* $a_{n+1} > a_n$ gilt. Entsprechend heißt eine Folge $((a_n))$ *monoton fallend* bzw. *streng monoton fallend*, wenn für alle *n* die Ungleichung besteht: $a_{n+1} \leq a_n$ (bzw. $a_{n+1} < a_n$). Da für das Konvergenzverhalten einer Folge die ersten (endlich vielen) Glieder irrelevant sind – nur die „infiniten", also sich unend-