Jan Gehrke

# Mathematik im Studium

Brückenkurs für Wirtschafts- und Naturwissenschaften

Oldenbourg

# Mathematik im Studium

## Brückenkurs für Wirtschafts- und Naturwissenschaften

Von

Diplom-Physiker
Jan Gehrke

Duale Hochschule Baden-Württemberg
Stuttgart

Oldenbourg Verlag München

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.


Rosenheimer Straße 145, D-81671 München
Telefon: (089) 45051-0
oldenbourg.de



Lektorat: Rainer Berger
Herstellung: Anna Grosser
Coverentwurf: Kochan & Partner, München
Coverbild: Turin Olympic Bridge, iStockphoto
Gedruckt auf säure- und chlorfreiem Papier
Gesamtherstellung: Grafik + Druck GmbH, München

ISBN 978-3-486-59910-7

*Für meine Eltern*

*Herbert und Petra*

# Inhaltsverzeichnis

# Vorwort

## Über Brückenkurse

Ein Brückenkurs leistet viel: Er wiederholt kompakt den Stoff der Mittel- und Oberstufe, da Studienanfänger hier regelmäßig kleinere oder größere Lücken haben, und greift auf den relevanten weiterführenden Mathematikstoff der Vorlesungen vor. In der Konsequenz hilft er dabei, Studienanfängern den Schock zu ersparen, der viele beim Anwenden der Mathematik als unverzichtbares Werkzeug im wirtschafts- und naturwissenschaftlichen Studium ereilt.

## Einsatzmöglichkeiten und Aufbau dieses Buches

Genau hier setzt dieses Buch an: Es bereitet mit klarem Blick auf das im Studium Notwendige vor, wiederholt und vermittelt Neues. Zahlreiche Beispiele veranschaulichen den Stoff. Durch eine Vielzahl von Übungen kann das Gelernte zudem gefestigt werden. Grau unterlegte Boxen heben darüber hinaus das Wichtigste hervor. Dabei gilt es folgende Randnotizen zu unterscheiden:

D Eine Definition oder ein grundlegender Satz

F Eine wichtige Formel

A Eine Anmerkung oder ein Tipp

M Sollte man sich merken

! oder ? Feststellung oder Frage

Natürlich könnten wir einige Boxen dabei mit mehr als einem Buchstaben versehen. Wichtig sind sie aber alle und das Verständnis dieser Boxen kann als Grundvokabular für ein Weitergehen in der Mathematik angesehen werden.
Das sollten Sie sich generell merken: Auch in der Mathematik muss ein gewisser „Grundwortschatz“ beherrscht werden, sonst können Sie es vergessen, in dieser Sprache zu spre-

chen. Sie kommen ja auch nicht auf die Idee, in einer fremden Sprache ohne Vokabeln und Grammatik kommunizieren zu wollen.

Das Buch ist in 16 Kapitel und drei Anhänge unterteilt. Ein Großteil nimmt die Behandlung von Funktionen (die Analysis) ein. Als Finale sind für diesen Teil die Kapitel über Umkehrfunktionen und Integralrechnung zu sehen. Die Vektorgeometrie beschränkt sich auf zwei große Kapitel: Eines für Beweise, das andere für konkrete Rechnungen im Raum. Ein kleines Kapitel über zwei einfache numerische Verfahren schließt das Buch ab, um einen kleinen Vorgeschmack auf die Numerik zu vermitteln. Die Anhänge beschäftigen sich mit sehr elementaren Themen, die kein ganzes Kapitel gefüllt hätten.

## Internet(t)

Zu diesem Buch werden Zusatzmaterialien online angeboten. Unter **www.oldenbourg-wissenschaftsverlag.de** den Titel *Mathematik im Studium* aufrufen und die angebotenen Zusatzmaterialien herunterladen.

## Errata

Natürlich waren wir bemüht, bei der Entstehung dieses Buches Fehler zu vermeiden. Falls es doch welche gibt (und das ist trotz aller Bemühungen und Mühen sicher), bitten wir dies zu entschuldigen und hoffen, dass der Fehlerfinder diese dem Autor per Mail mitteilt (**wiso@oldenbourg.de.**) und so zur Verbesserung des Werkes beiträgt.

## Dank

Bei der Entstehung eines solchen Buches gibt es vielen Leute zu danken. Ich möchte hier die wichtigsten Menschen erwähnen und vergesse dabei hoffentlich niemanden:

- Zu allererst danke ich meiner Familie, als da wären meine Eltern, denen dieses Buch gewidmet ist, meine beiden Schwestern Kerstin und Svenja und meine Désirée, für Ihr Vertrauen in mich, ihre Liebe und ihre immer währende Unterstützung. Ohne sie (und das ist sicher) gäbe es dieses Buch nicht.
- Weiterer Dank gilt Herrn Studiendirektor i.R. Klaus Hewig, der mir die interessanten Seiten der Mathematik gezeigt und mich gefördert hat. Gäbe es mehr Lehrer von seiner Sorte, so könnten wir uns Brückenkurse sparen.
- Ich bedanke mich auch bei Herrn Dr. Holger Cartarius, der den Stein ins Rollen brachte.
- Des Weiteren danke ich dem Oldenbourg-Verlag und hier ganz besonders Herrn Rainer Berger für die stets kooperative und angenehme Zusammenarbeit.

- Nicht zuletzt gilt mein Dank Herrn Prof. Dr. Hans-Joachim Elzmann und Herrn Prof. Dr. Dirk Reichardt, die es mir ermöglichten, dieses Buch zu schreiben und die mich in meinem Vorhaben stets bestärkten.

Jetzt bleibt mir nur noch, jedem Leser viel Freude mit diesem Buch zu wünschen. Möge es seinen Zweck erfüllen und Ihnen einen erfolgreichen Start in Ihr Studium ermöglichen.

Merklingen, im Sommer 2010

Jan Peter Gehrke

# I Einführung

Wir beginnen unseren Weg hin zu unserem angestrebten Ziel, der Aufarbeitung der für den Beginn eines Studiums relevanten Mathematik, mit ein paar einfachen Beispielen, die uns verdeutlichen sollen, welchen Problemen wir uns u.a. zu stellen haben. Die vollständige Lösung der in den folgenden Beispielen angesprochenen Aufgaben ist dem Leser allerdings erst später, nach der Lektüre der entsprechenden Kapitel (u.a. Kapitel VII), möglich und zwar dann, wenn die benötigten mathematischen Hilfsmittel erarbeitet wurden.

## I.1 Ein paar Beispiele

**Beispiel 1 - Die Suche nach dem größten Schächtelchen**

Gegeben ist ein quadratisches Stück Papier mit der Seitenlänge $a = 20$ cm.

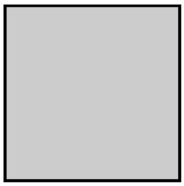

Abbildung I.1.1: Ein quadratisches Blatt Papier.

Nun soll das Papier auf folgende Weise zurechtgeschnitten und gefaltet werden:

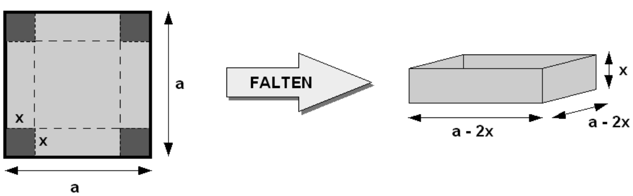


Abbildung I.1.2: Das zurechtgeschnittene Blatt Papier und die daraus faltbare Schachtel mit dem Volumen $V(x) = (a - 2x)^2 \cdot x$.

Das $x$ ist hier derart zu wählen, dass das Volumen der entstehenden Schachtel maximal, also möglichst groß, wird. Es stellt sich für uns dabei die Frage:

? **Für welches x wird das Volumen V des Schächtelchens maximal?**

Eine erste Abschätzung der „besten Wahl von $x$“ kann an Hand einer Tabelle erfolgen:

| **Versuch** | **x** | **Volumen** $\mathbf{V = (20 - 2x)^2 \cdot x}$ |
|---|---|---|
| **1** | 1 cm | 324 $cm^3$ |
| **2** | 2 cm | 512 $cm^3$ |
| **3** | 3 cm | 588 $cm^3$ |
| **4** | 4 cm | 576 $cm^3$ |
| **usw.** | ... | ... |

Tabelle I.1.1: Schächtelchenvolumen für verschiedene $x$.

Es sieht so aus, dass für $x = 3$ cm das maximale Volumen erreicht wird. Aber ist dem wirklich so?

**Beispiel 2 - Die optimale Einzäunung**

Es sind 100 Meter Maschendrahtzaun gegeben. Wir sollen hiermit ein rechteckiges Gebiet so einzäunen, dass der Flächeninhalt des entstehenden Gatters maximal wird.

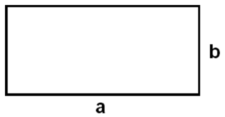


Abbildung I.1.3: Der Zaun mit dem Umfang $U = 2a + 2b = 100$ Meter. Wir wählen $a$ und bestimmen damit $b$. Der Flächeninhalt ist $A = a \cdot b$.

Nun können wir (wie in Beispiel 1) erneut eine Tabelle aufstellen und mittels dieser abschätzen, für welche Wahl der Seitenlängen der Flächeninhalt am größten wird. Wir beachten vor dem Aufstellen der Tabelle, dass

$$U = 2a + 2b = 100 \Leftrightarrow a + b = 50 \Leftrightarrow b = 50 - a$$

ist. Wir geben also nur eine der beiden Seitenlängen vor und die andere ergibt sich sofort aus der Bedingung, dass wir 100 Meter Maschendrahtzaun zu verbrauchen haben. Dies ist also allen Möglichkeiten gemeinsam, dass sie alle den gleichen Umfang haben. Dies sei aber nur eine Bemerkung am Rande. Stellen wir nun unsere Tabelle auf (siehe Tabelle I.1.2).

| **Versuch** | **a** | $\mathbf{b = 50 - a}$ | **Fläche** $\mathbf{A = a \cdot b}$ | **Umfang** $\mathbf{U = 2a + 2b}$ |
|---|---|---|---|---|
| **1** | 5 m | 45 m | 225 $m^2$ | 100 m |
| **2** | 10 m | 40 m | 400 $m^2$ | 100 m |
| **3** | 15 m | 35 m | 525 $m^2$ | 100 m |
| **4** | 20 m | 30 m | 600 $m^2$ | 100 m |
| **5** | 25 m | 25 m | 625 $m^2$ | 100 m |
| **6** | 30 m | 20 m | 600 $m^2$ | 100 m |
| **usw.** | ... | ... | ... | ... |

Tabelle I.1.2: Fläche und Umfang des eingezäunten Gebiets für verschiedene Seitenlängen.

In diesem Beispiel scheint der größte Flächeninhalt für $a = b = 25$ m angenommen zu werden. Dies ist in der Tat das tatsächliche Maximum aller Flächeninhalte bei diesem Problem. Die Begründung hierfür kann mit dem Wissen aus Kapitel VII gegeben werden, aber auch schon mit Hilfe der quadratischen Funktionen aus Kapitel III ist die Angabe des Maximums (in diesem Fall) zweifelsfrei möglich. Vielleicht bemerken wir schon jetzt, dass in beiden Beispielen nur ein gewisser Zahlenbereich für die gesuchten Größen sinnvoll ist. Diese Feststellung bringt uns viel später zur sog. Untersuchung der Randwerte.

Aus den beiden Beispielen ist zu ersehen, welcher Problematik wir uns zu stellen haben: In beiden Fällen versuchten wir, einen größtmöglichen Wert für eine bestimmte Größe bei der Lösung des Problems zu erhalten. Diese Größe hing von anderen Größen ab, welche wir frei wählen konnten. Je nach Wahl veränderte sich die zu maximierende Größe. Die mit den Tabellen gefundenen Werte haben wir uns im Hinterkopf vermerkt. Doch sind die so gefundenen Werte wirklich die allerbesten? Können wir das noch genauer untersuchen? Diese Fragen müssen wir zum jetzigen Zeitpunkt leider hinten anstellen, denn ihre Beantwortung muss bis Kapitel VII warten. Dort werden wir das Bestreben, den größtmöglichen Wert zu finden, als Suche nach den Extrema einer Funktion wieder aufgreifen.

## I.2 Interpretation von Schaubildern

Auch in diesem Unterkapitel wollen wir anhand zweier Beispiele, die selber gerechnet werden können und sollen, einen weiteren Schritt auf unserem langen Weg tun.

Bisher haben wir voneinander abhängige Werte zur besseren Übersicht in Tabellen eingetragen (Unterkapitel I.1). Zwei voneinander abhängige Größen lassen sich jedoch zumeist in einem Schaubild sehr gut grafisch darstellen und veranschaulichen.
Aus Schaubildern können wir Werte schneller ablesen und auch einfacher Überlegungen anstellen, wie der weitere Verlauf aussehen könnte bzw. der zu sehende Verlauf zu interpretieren ist. Im Folgenden wollen wir uns in der Interpretation von Schaubildern üben und uns an den Umgang mit ihnen gewöhnen, da sie in Zukunft eine wichtige Rolle spielen werden.