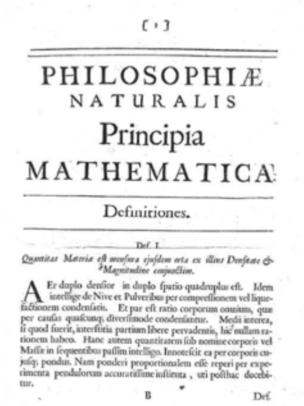
2 Klassische Mechanik

Die Mechanik, die sich mit der Bewegung von Körpern unter dem Einfluss von äußeren Kräften beschäftigt, ist die älteste und in mancher Hinsicht fundamentalste Disziplin der Physik.

Wir beginnen ganz klassisch mit Newtons Axiomen (⇒ S. 14) und untersuchen darauf aufbauend etwa den Energiesatz (⇒ S. 16) oder das Gravitationsgesetz (⇒ S. 18). In diesem Zusammenhang zeigen wir exemplarisch die Probleme auf, die bei Messungen auftreten können (⇒ S. 20), bevor wir mit Hilfe des Energiesatzes einige Grundprobleme der Mechanik behandeln (⇒ S. 22). Wichtige erste Anwendungen sind starre Körper und rotierende Systeme (⇒ S. 24) sowie das Kepler-Problem (⇒ S. 26).
Auch wenn der physikalische Gehalt der klassischen Mechanik schon in den Newton-Axiomen steckt, wurden im Lauf der Zeit doch Formalismen entwickelt, die die Behandlung konkreter Probleme sehr viel einfacher machen, etwa beim Vorliegen von Zwangsbedingungen (⇒ S. 28). Die Lagrange-Mechanik (⇒ S. 30) bietet sich besonders zur Behandlung von Symmetrien an (⇒ S. 32) und spielt daher in erweiterter Form auch auch ein große Rolle in der Quantenfeldtheorie (Kapitel 11). In der Formulierung von Hamilton (⇒ S. 34) hingegen ist die Mechanik ein günstiger Ausgangspunkt für die Weiterentwicklung zur Quantenmechanik (Kapitel 7).
Eine zentrale Rolle nicht nur in der Mechanik spielen Variationsprinzipien (⇒ S. 36) – nahezu alle fundamentalen physikalischen Gesetze lassen sich aus Variationszugängen herleiten. Schon für allgemeine Überlegungen, insbesondere aber für den statistischen Zugang (Kapitel 5) sind die Konzepte des Konfigurations- und vor allem Phasenraums (⇒ S. 38) wichtig.
Beschränkt man sich nicht mehr auf die Näherung von Massepunkten oder starren Körpern, so gelangt man zur Elastomechanik (⇒ S. 40). Diese ist ebenso ein Gebiet der Kontinuumsmechanik wie die Fluidmechanik (⇒ S. 42), die Hydro- und Aerodynamik umfasst. Darin sind ein wesentliches Element Reibungseffekte (⇒ S. 44), die aber auch sonst bei nahezu allen realen Bewegungen eine Rolle spielen.
So vielfältig die Werkzeuge auch sind, die man in der Mechanik zur Verfügung hat, so zeigt sich doch, dass nur für eine sehr begrenzte Klasse von Systemen langfristige Vorhersagen möglich sind. Diese Erkenntnis, die sich natürlich nicht nur auf die Mechanik beschränkt, führt letztlich zur Chaostheorie (⇒ S. 46).

K. Lichtenegger, *Schlüsselkonzepte zur Physik,*
DOI 10.1007/978-3-8274-2385-6_2, © Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2015

Die Newton'schen Axiome


[1]

PHILOSOPHIÆ NATURALIS Principia MATHEMATICA.

Definitiones.

Def. I.

Quantitas Materiæ est mensura ejusdem orta ex illius Densitate & Magnitudine conjunctim.

AEr duplo densior in duplo spatio quadruplus est. Idem intellige de Nive et Pulveribus per compressionem vel liquefactionem condensatis. Et par est ratio corporum omnium, quæ per causas quascunq; diversimode condensantur. Medii interea, si quod fuerit, interstitia partium libere pervadentis, hic nullam rationem habeo. Hanc autem quantitatem sub nomine corporis vel Massæ in sequentibus passim intelligo. Innotescit ea per corporis cujusq; pondus. Nam ponderi proportionalem esse reperi per experimenta pendulorum accuratissime instituta, uti posthac docebitur.

B Def.

Die klassische Mechanik, wie wir sie kennen, beginnt mit Isaac Newtons *Philosophiae naturalis principipa mathematica*. Sicher hatte es davor schon bedeutende Betrachtungen gegeben, etwa die Kepler'schen Gesetze (⇒ S. 26) oder das Trägheitsprinzip, das Galilei bereits richtig erkannt hatte.

Doch erst Newtons Arbeit stellte die Mechanik auf ein tragfähiges Fundament. Erst sie erlaubte es, viele anscheinend unzusammenhängende Einzeltatsachen aus einigen wenigen Grundprinzipien abzuleiten. Die Grundlage dafür sind die drei Newton'schen Axiome:

1. In einem Inertialsystem verbleibt ein Körper, auf den keine äußeren Kräfte wirken, im Zustand der Ruhe oder der gleichförmigen Bewegung.
2. Eine äußere Kraft $\boldsymbol{F}$, die auf einen Körper der Masse m wirkt, ändert seinen – in einem Inertialsystem betrachteten – *Impuls* $\boldsymbol{p} = m\,\boldsymbol{v}$ gemäß
$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F}\,. \tag{2.1}$$
3. Wenn ein Körper auf einen anderen eine Kraft $\boldsymbol{F}_{1\to 2}$ ausübt, dann übt der andere auf den ersten eine gleich große Gegenkraft $\boldsymbol{F}_{2\to 1} = -\boldsymbol{F}_{1\to 2}$ aus, kurz
$$\text{actio} = \text{reactio}.$$

Jedes dieser Axiome verdient eine ausführlichere Betrachtung:

1. Das erste Axiom wirkt auf den ersten Blick wie ein Spezialfall des zweiten, mit $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$. Tatsächlich hat es aber durchaus seine eigene Existenzberechtigung, es definiert erst die Bezugssysteme, in denen das zweite Axiom seine Gültigkeit hat. Eine Formulierung des ersten Axioms, die das besser ausdrückt, wäre etwa: *Ein Inertialsystem ist ein solches, in dem ein Körper, auf den keine äußeren Kräfte wirken, im Zustand der Ruhe oder der gleichförmigen Bewegung bleibt.*
2. Auf dem zweiten Axiom beruhen die meisten konkreten Berechnungen in der Mechanik. Bei konstanter (träger) Masse m kann man es auch in der Form $\boldsymbol{a} = \frac{1}{m}\boldsymbol{F}$ mit der Beschleunigung $\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t^2}$ schreiben. Kennt man Orts-, Zeit- und Geschwindigkeitsabhängigkeit der Kraft $\boldsymbol{F}$, so hat man eine gewöhnlichen Differenzialgleichung zweiter Ordnung für den Ort $\boldsymbol{x}(t)$ des Körpers vorliegen:
$$\ddot{\boldsymbol{x}}(t) = \frac{1}{m}\,\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}(t),\,\dot{\boldsymbol{x}}(t),\,t)\,. \tag{2.2}$$
Diese Differenzialgleichung für $\boldsymbol{x}(t)$ kann man in ein System von meist gekoppelten Differenzialgleichungen für $x_1(t)$, $x_2(t)$ und $x_3(t)$ aufschlüsseln.

Die ursprüngliche Version (2.1) gilt jedoch auch für den Fall veränderlicher Massen. Das wird einerseits in der Relativitätstheorie wichtig, andererseits gibt es auch in der klassischen Mechanik Systeme mit veränderlicher Masse – etwa Raketen, die sich ja gerade durch Ausstoß von verbranntem Treibstoff fortbewegen.

Die Gleichung $\boldsymbol{F} = m\,\boldsymbol{a}$ ist in der Mechanik so zentral dass sich „Kraft ist Masse mal Beschleunigung“ bei vielen tief einprägt. Das „ist“ stellt dabei aber keine Identität dar und ist auch keine vollständige Definition. Auch unabhängig von den Axiomen kann man *Kraft* qualitativ als Einfluss definieren, der den Bewegungszustand eines Körpers ändert oder diesen defomiert. Das zweite Axiom regelt lediglich den quantitativen Zusammenhang der Kraft mit dem Impuls bzw. mit der Beschleunigung und der (trägen) Masse m.

In mechanischen Aufgaben sind die äußeren Kräfte vorgegeben, sie bewirken eine Beschleunigung des betrachteten Körpers. Die Kräfte, die in mechanische Betrachtungen eingehen, beruhen letztlich auf der Gravitationskraft oder auf elektromagnetischen Wechselwirkungen (Coulomb-Anziehung bzw. -Abstoßung, Lorentz-Kraft etc.). Andere Kräfte, etwa die elastische Kraft $\boldsymbol{F} = -k\,\boldsymbol{x}$ im Hooke'schen Gesetz (⇒ S. 40) oder Reibungskräfte wie $\boldsymbol{F} = -\alpha\,\dot{\boldsymbol{x}}$ (⇒ S. 44), lassen sich im Prinzip auf elektromagnetische Wechselwirkungen im betrachteten Material oder Medium sowie auf Gravitationswirkungen zurückführen. Das kann jedoch unter Umständen nur auf sehr komplizierte Weise möglich sein, manchmal auch erst im Kontext der Quantenphysik.

Dementsprechend ist die Angabe einer Kraft in der Form $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}, t)$ nur ein Weg, die effektive Wirkung des komplizierten Zusammenspiels der fundamentalen Wechselwirkungen auf einfache Weise zu parametrisieren. (Neben Gravitation und Elektromagnetismus kommen für sehr kleine Abstände noch die starke (⇒ S. 252) und die schwache Kernkraft (⇒ S. 256) hinzu.) Die Angabe einer solchen Kraft kann letztlich stets nur eine Näherung mit begrenztem Gültigkeitsbereich sein.

Lässt sich die wirkende Kraft $\boldsymbol{F}$ durch ein Potenzial Φ mittels $\boldsymbol{F} = -\mathbf{grad}\,\Phi$ beschreiben, ist sie also *konservativ* (⇒ S. 16), so nimmt das zweite Axiom die elegante Form $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{\nabla}\Phi = 0$ an. Darin werden Impuls $\boldsymbol{p}$ und Potenzial Φ direkt in Verbindung zueinander gesetzt.

3. Im dritten Axiom kommt ein Aspekt des Kraftbegriffs zum Vorschein, der am Anfang oft die größten Probleme macht: Kraft muss nämlich keineswegs eine aktive Größe sein. Liegt beispielsweise dieses Buch auf einem Tisch, so übt es auf diesen eine Gewichtskraft aus – zugleich übt der Tisch eine gleich große entgegengesetzte Kraft auf das Buch aus. Dass auch passive Gegenstände Kräfte ausüben, wird uns oft erst dann bewusst, wenn bestimmte Kräfte nicht mehr aufgebracht werden können, wenn also zum Beispiel der Tisch zusammenbricht.

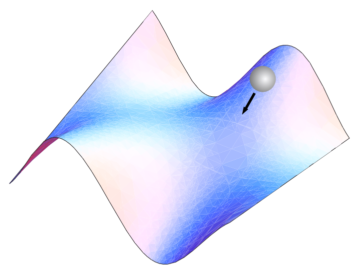
Konservative Kräfte, Gleichgewichte, Energiesatz

In der Mechanik sind Kräfte von außen vorgegeben und können ganz unterschiedliche Formen annehmen, solange sie nur von Teilchenorten, -geschwindigkeiten und gegebenenfalls explizit von der Zeit abhängen, $\boldsymbol{F}\big(\boldsymbol{x}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{x}^{(N)}, \dot{\boldsymbol{x}}^{(1)}, \ldots, \dot{\boldsymbol{x}}^{(N)}, t\big)$.
Eine Abhängigkeit von einer Beschleunigung $\ddot{\boldsymbol{x}}^{(i)}$ oder von noch höheren Ableitungen nach der Zeit würde hingegen zusammen mit dem zweiten Newton'schen Axiom (⇒ S. 14) zum Widerspruch mit dem Superpositionsprinzip für Kräfte führen.[a]

Besonders bedeutsam sind in der Mechanik jene Kräfte, die keine explizite Zeit- und keine Geschwindigkeitsabhängigkeit besitzen und auch vom Ort nur auf ganz spezielle Weise abhängen: Kann man eine Kraft in der Form

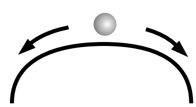
$$\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{\nabla}\Phi = -\mathbf{grad}\,\Phi = -\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}, \frac{\partial\Phi}{\partial x_2}, \frac{\partial\Phi}{\partial x_3}\right)^\top$$

mit einem skalaren *Potenzial* Φ schreiben, so nennt man sie *konservativ*. Für diese Beschreibung eines Kraftfelds als Gradient eines Potenzials gibt es ein sehr anschauliches Bild:

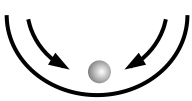


Stellt man sich den Graphen von Φ als Oberfläche einer Landschaft vor, so zeigt, Differenzierbarkeit von Φ vorausgesetzt, $\boldsymbol{\nabla}\Phi$ an jedem Punkt in Richtung des steilsten Anstiegs, $-\boldsymbol{\nabla}\Phi$ hingegen in Richtung des steilsten Abfalls.
Eine kleine Kugel, die man an eine Stelle $\boldsymbol{x}$ legt, würde auf einer solchen Fläche also in Richtung $-\boldsymbol{\nabla}\Phi(\boldsymbol{x})$ losrollen.

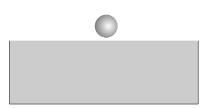
In Ruhe bleibt der Körper nur, wenn $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$ ist. Das ist insbesondere dann der Fall, wenn er sich gerade an einem lokalen Maximum oder Minimum von Φ befindet. Diese beiden Fälle unterscheiden sich allerdings signifikant.



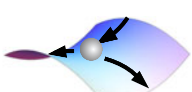
An einem lokalen Maximum genügt eine beliebig kleine Auslenkung, und das System entfernt sich immer weiter vom Ausgangspunkt. Man spricht von *labilem Gleichgewicht*.



Bei einem lokalen Minimum hingegen sind die Kräfte, die durch kleine Auslenkungen entstehen, *rücktreibend*. Der Körper verlässt die Umgebung der Gleichgewichtslage nicht, das Gleichgewicht ist *stabil*.



Ist Φ in einem Bereich um die Gleichgewichtslage herum konstant, so spricht man von einem *indifferenten Gleichgewicht*, es gibt weder weiter auslenkende noch rücktreibende Kräfte.



An einem Sattelpunkt überwiegt der labile Charakter – es gibt ja Richtungen, in die schon eine minimale Störung weiter auslenkende Kräfte erzeugt.

Eine Kraft $\boldsymbol{F}$, die entlang eines Weges wirkt, verrichtet *Arbeit*. Dabei ist es allerdings nur die Komponente in Richtung des Weges, die tatsächlich Arbeit verrichtet. Das lässt sich, wenn der Weg die Punkte $\boldsymbol{x}_1$ und $\boldsymbol{x}_2$ geradlinig durch den Vektor $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1$ verbindet und $\boldsymbol{F}$ konstant ist, bequem durch ein Skalarprodukt beschreiben: $W = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{s}$. Ist die Kraft ortsabhängig oder der Weg C nicht geradlinig, so gilt dieser Zusammenhang nur noch infinitesimal: $\mathrm{d}W = \boldsymbol{F} \cdot \mathbf{d}\boldsymbol{s}$. Die gesamte Arbeit lässt sich durch ein Kurvenintegral ausdrücken:

$$W = \int_C \mathrm{d}W = \int_C \boldsymbol{F} \cdot \mathbf{d}\boldsymbol{s} = \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}(t)) \cdot \dot{\boldsymbol{x}}\, \mathrm{d}t\,.$$

Die gespeicherte Fähigkeit, Arbeit zu verrichten, bezeichnet man als *Energie* – ein Schlüsselbegriff nicht nur in der Physik. Diese Energie kann in verschiedenen Formen vorliegen, etwa als kinetische Energie (Bewegungsenergie). Für eine Punktmasse m, die sich mit Geschwindigkeit $v = \|\boldsymbol{v}\|$ bewegt, ist diese gegeben durch:

$$W_{\mathrm{kin}} = \int \boldsymbol{F} \cdot \mathbf{d}\boldsymbol{s} = \int \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} \cdot \dot{\boldsymbol{x}}\, \mathrm{d}t = m \int \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} \cdot \boldsymbol{v}\, \mathrm{d}t = \frac{m}{2} \int \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{v}^2\right) \mathrm{d}t = \frac{m}{2}\,\boldsymbol{v}^2 = \frac{m}{2}\,v^2.$$

Für jene Kräfte, die ein Potenzial besitzen, $\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{\nabla}\Phi$, lassen sich Potenzialdifferenzen als Energien interpretieren,

$$W_{\mathrm{pot}} = \int_C \boldsymbol{F} \cdot \mathbf{d}\boldsymbol{s} = -\int_C \boldsymbol{\nabla}\Phi \cdot \mathbf{d}\boldsymbol{s} = -\int_C \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}\, \mathrm{d}x_i = -\int_C \mathrm{d}\Phi = \Phi(\boldsymbol{x}_{\mathrm{Anf}}) - \Phi(\boldsymbol{x}_{\mathrm{End}})\,.$$

Da ohnehin stets nur Potenzialdifferenzen in Erscheinung treten, kann man für des Potenzial einen beliebigen Bezugspunkt $\boldsymbol{x}_0$ wählen, für den man $\Phi(\boldsymbol{x}_0) = 0$ setzt. Man nennt $V(\boldsymbol{x}) = \Phi(\boldsymbol{x}) - \Phi(\boldsymbol{x}_0)$ die *potenzielle Energie*.

Der Bezugspunkt $\boldsymbol{x}_0$ wird typischerweise problemangepasst gewählt. Beim Gravitationspotenzial kann es nützlich sein, den tiefsten zugänglichen Punkt als Bezugspunkt zu betrachten. Bei erdnahen astrophysikalischen Problemen hingegen hat es oft Sinn, den Bezugspunkt ins Unendliche zu legen. Die potenzielle Energie in endlicher Entfernung von der Erde ist dann stets negativ.

Wenn alle auf ein System wirkenden Kräfte ein Potenzial besitzen, dann gilt der *mechanische Energiesatz*: Kinetische und potenzielle Energie können zwar ineinander umgewandelt werden, ihre Summe bleibt aber erhalten: $W_{\mathrm{kin}} + W_{\mathrm{pot}} = \mathrm{const.}$

In einem schwingenden Pendel beispielsweise werden ständig kinetische und potenzielle Energie ineinander umgewandelt.

Bei der Anwesenheit von Kräften ohne Potenzial gilt der mechanische Energiesatz nicht mehr. Das ist insbesondere bei den geschwindigkeitsabhängigen Reibungskräften der Fall. Durch sie geht mechanische (d. h. kinetische oder potenzielle) Energie verloren.

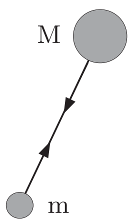
Letztlich lassen sich jedoch auch Reibungskräfte auf komplizierte elektromagnetische Wechselwirkungen zurückführen, die sehr wohl ein Potenzial besitzen. Die ursprüngliche mechanische Energie verschwindet entsprechend nicht einfach, sondern wird in andere Formen umgewandelt, insbesondere in Wärme (⇒ S. 88).[b]

Das Gravitationsgesetz

Eine nahezu allgegenwärtige Kraft, die erste, deren Auswirkungen auch quantitativ untersucht wurden, ist die Gravitation. Diese zeigt sich jedoch auf sehr unterschiedliche Arten, und auf den ersten Blick scheinen jener Einfluss, der irdische Objekte dazu bringt, zu Boden zu fallen, und derjenige, der die Planeten auf ihren Bahnen um die Sonne hält, nichts miteinander zu tun zu haben.

Tatsächlich ist für beide Effekte aber das gleiche Kraftgesetz maßgebend: Zwischen zwei Punktmassen m und M im Abstand r wirkt

$$\boldsymbol{F}_{\text{grav}} = -G_{\text{N}}\,\frac{m\,M}{r^2}\,\boldsymbol{e}_r = -\mathbf{grad}\,V_{\text{grav}}(r) \qquad \text{mit} \qquad V_{\text{grav}}(r) = -G_{\text{N}}\,\frac{m\,M}{r}\,. \tag{2.3}$$



Dabei ist G_{N} die Newton'sche Gravitationskonstante. Da der Radialeinheitsvektor $\boldsymbol{e}_r$ definitionsgemäß nach außen weist und alle vorkommenden Größen (Massen, Abstand) stets positiv sind, garantiert das Vorzeichen, dass die Kraft zur jeweils anderen Masse hin weist.

Wenn wir $r = R+h$ setzen und die Abstandsänderung h während der Fallbewegung klein gegenüber dem Abstand R ist, erhalten wir in guter Näherung[a]

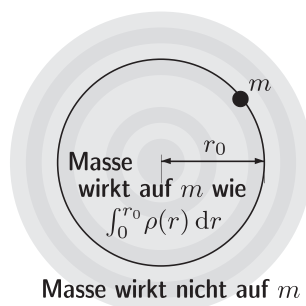
$$V_{\text{grav}}(R+h) = -G_{\text{N}}\,\frac{m\,M}{R}\,\frac{1}{1+\frac{h}{R}} \approx -G_{\text{N}}\,\frac{m\,M}{R}\left(1-\frac{h}{R}\right) = -G_{\text{N}}\,\frac{m\,M}{R} + m\,\frac{G_{\text{N}}\,M}{R^2}\,h.$$

Die additive Konstante $-G_{\text{N}}\,\frac{m\,M}{R}$ ist für das Potenzial irrelevant. Man erhält also mit $g = \frac{G_{\text{N}}\,M}{R^2}$ ein vereinfachtes Potenzial und daraus eine entsprechende Kraft:

$$V^{\text{simp}}_{\text{grav}}(h) = m\,g\,h \qquad \rightarrow \qquad \boldsymbol{F}^{\text{simp}}_{\text{grav}} = -m\,g\,\boldsymbol{e}_r\,. \tag{2.4}$$

Man kann nachrechnen, dass eine sphärisch-symmetrische Massenverteilung $\rho(r)$ auf ein Objekt im Abstand r_0 die gleiche Anziehungskraft ausübt wie die bei $r = 0$ konzentrierte Masse

$$M = \int_0^{r_0} \rho(r)\,\mathrm{d}r.$$



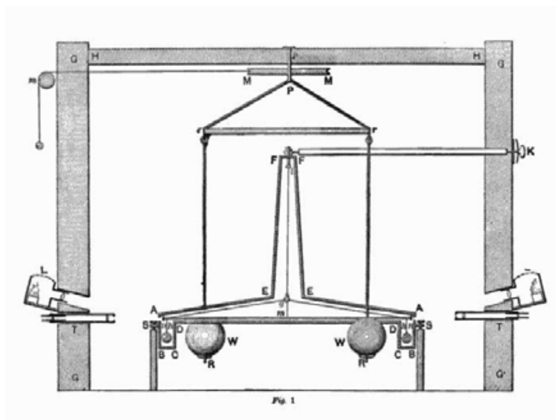
Eine kugelsymmetrisch verteilte Masse, die außerhalb von $r = r_0$ liegt, übt auf ein Objekt bei $r = r_0$ in Summe keine Anziehungskraft aus.

Diesen Sachverhalt nennt man den *Gauß'schen Satz* (nicht zu verwechseln mit dem Gauß'schen Integralsatz). Demnach gelten (2.3) und bei $h \ll R$ auch (2.4) für beliebige sphärisch-symmetrische Objekte, insbesondere (zumindest näherungsweise) für Planeten und Monde. Auf der Erdoberfläche erhält man mit Erdradius $R_\oplus$ und Erdmasse $M_\oplus$ für die Erdbeschleunigung[b]

$$g = \frac{G_{\text{N}}\,M_\oplus}{R_\oplus^2} \approx 9.81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\,.$$

Die Erdbeschleunigung g kann man etwa mit Fallexperimenten oder über die Periodendauer eines Pendels bestimmen. $R_\oplus$ lässt sich beispielsweise mittels trigonometrischer Methoden ermitteln – Eratosthenes von Kyrene hat das schon in der Antike mit bemerkenswerter Genauigkeit getan. Aus der Erdbeschleunigung kann man so das Produkt von Gravitationskonstante und Erdmasse ablesen, nicht jedoch G_N oder $M_\oplus$ separat.

Um diese einzeln zu ermitteln, ist es also notwendig, mit bereits bekannten Massen zu arbeiten. Die klassische Methode dafür ist die Drehwaage von Cavendish. Dabei wird das Drehmoment gemessen, das durch die Gravitationswirkung zweier massiven Kugeln auf zwei kleine Probemassen entsteht. Dieses Drehmoment wird durch die Verdrillung eines Torsionsfadens kompensiert.



Die Verdrillung lässt sich gut messen, heute meist mit einem am Faden angebrachten Spiegel, an dem ein Lichtstrahl reflektiert wird. Man erhält aus solchen oder ähnlichen Experimenten $G_\mathrm{N} \approx 6.674 \cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg\,s}^2}$.
Da sich Massen jedoch nicht abschirmen lassen, ist die experimentelle Bestimmung der Gravitationskonstanten bis heute schwierig. Immerhin müssen für Präzisionsmessungen alle systematischen Fehler durch umliegende Massen korrigiert werden – bis hin zum jahreszeiten- und wetterabhängigen Grundwasserspiegel. Die relative Unsicherheit des aktuellen Wertes liegt bei $\frac{\Delta G_\mathrm{N}}{G_\mathrm{N}} \approx 10^{-4}$, damit ist G_N die mit großem Abstand am ungenauesten bekannte Naturkonstante.

Dass die Gravitationskraft im dreidimensionalen Raum zumindest proportional zu $\frac{1}{r^2}$ abnehmen muss, folgt schon aus geometrischen Überlegungen. Bei konstanter „Quellstärke“ muss der gesamte Kraftfluss durch jede geschlossene Fläche, die die Quelle umgibt, gleich groß sein. Insbesondere gilt das für beliebige Kugeln mit Radius r und Oberfläche $4\pi\, r^2$. Bei radialer Symmetrie muss entsprechend die Kraft $\propto \frac{1}{r^2}$ abnehmen. Die Coulomb-Kraft der Elektrostatik folgt ebenfalls einem $\frac{1}{r^2}$-Gesetz. Die Kernkräfte (⇒ S. 132) hingegen zeigen ein grundlegend anderes Verhalten.

Das Newton'sche Gravitationsgesetz (2.3) gibt eine sehr gute quantitative Beschreibung der Schwerkraft. Da es als eine instantane Fernwechselwirkung formuliert ist, verletzt es jedoch das Relativitätsprinzip. Hier setzt die Allgemeine Relativitätstheorie (⇒ S. 228) ein: In ihr wird die Gravitation auf eine reine Trägheitskraft reduziert – Körper bewegen sich auf Geodäten in einer durch die Massen gekrümmten Raumzeit, die durch *Feldgleichungen*, also auf lokale Weise, beschrieben wird.

Messung der Erdbeschleunigung

Um die Probleme, die bei praktischen Messungen auftreten, zu illustrieren, betrachten wir ein klassisches Beispiel – die möglichst präzise Bestimmung der Erdbeschleunigung g (⇒ S. 18). Die direkteste Art, g zu messen, wäre, einen Körper aus einer bekannten Höhe h fallen zu lassen und die Zeit bis zum Auftreffen am Boden zu stoppen. Zweimalige Integration der Bewegungsgleichung $m\ddot{\boldsymbol{x}} = -mg\boldsymbol{e}_z$ und Projektion auf die z-Achse (normal zur Erdoberfläche nach außen gerichtet) liefert

$$z(t) = z_0 + v_0 t - \frac{g}{2}\,t^2 \quad \xrightarrow{\text{Anf.-Bed.}} \quad z(t) = h - \frac{g}{2}\,t^2\,.$$

Der Boden $z = 0$ ist nach einer Zeit $t = \sqrt{2h/g}$ erreicht, d. h. umgekehrt kann man aus Kenntnis von h und t die Erdbeschleunigung zu $g = \frac{2h}{t^2}$ bestimmen.

Hier treten allerdings zwei Probleme auf. Einerseits hat man einen systematischen Fehler durch die Luftreibung, sofern der Fallversuch nicht im Vakuum stattfindet. Andererseits muss man, um g auf diese Weise zu bestimmen, in der Lage sein, Abstände und vor allem Zeiten sehr genau zu messen. Die Fehlerrechnung ergibt für kleine Fehler

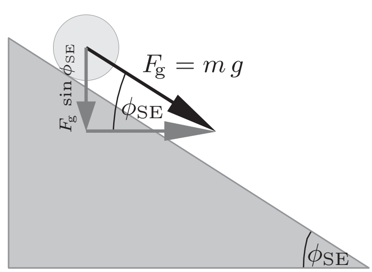
$$\Delta g = \frac{2}{t^2}\,\Delta h + \frac{4h}{t^3}\,\Delta t = \frac{2h}{t^2}\left(\frac{\Delta h}{h} + 2\,\frac{\Delta t}{t}\right), \qquad \text{d. h.} \qquad \frac{\Delta g}{g} = \frac{\Delta h}{h} + 2\,\frac{\Delta t}{t}\,. \tag{2.5}$$

Der relative Fehler von t geht wegen der quadratischen Abhängigkeit gegenüber jenem von h mit doppeltem Gewicht ein. Zudem kann man Abstände auch mit einfachen Mitteln recht präzise messen, während das bei Zeiten deutlich schwieriger ist.

Mit einer Stoppuhr und per Hand wird man kaum in der Lage sein, genauer als etwa auf eine Zehntelsekunde zu messen. Diesen zufälligen Fehler von 0.1 s hat man sogar zweimal, einmal beim Fallenlassen und einmal beim Auftreffen. Selbst wenn $\Delta h = 0$ wäre, müsste man für eine Genauigkeit von einem Prozent bereits $\frac{\Delta t}{t} = \frac{1}{200}$ fordern, d. h. für $\Delta t = 0.2\,\mathrm{s}$ müsste $t = 40\,\mathrm{s}$ sein, das entspräche mit dem Schätzwert $g \approx 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ einer Fallhöhe von $h \approx 8\,\mathrm{km}$!

Das ist nicht praktikabel, zudem ist für solche Fallhöhen die Vernachlässigung des Luftwiderstands sicher nicht mehr zulässig. Erst die moderne elektronische Messtechnik hat es möglich gemacht, mittels an Lichtschranken gekoppelter Uhren die Erdbeschleunigung tatsächlich durch den Fall eines Körpers in einem evakuierten Zylinder zu bestimmen. Historisch allerdings waren andere Methoden notwendig, um g mit akzeptabler Genauigkeit zu ermitteln.

Eine Möglichkeit ist, den Fallversuch auf eine schiefe Ebene (SE) zu verlagern. Ist diese im Winkel $\phi_{\mathrm{SE}} < \frac{\pi}{2} = 90^\circ$ gegenüber der Waagrechten angestellt, so wirkt in z-Richtung nur die kleinere Beschleunigung $-g\,\sin\phi_{\mathrm{SE}}$. Man kann den freien Fall quasi in Zeitlupe betrachten, und durch die längere „Fallzeit“ t wird der relative Fehler $\frac{\Delta t}{t}$ kleiner.



In Wirklichkeit gibt es auf der schiefen Ebene allerdings keinen Fall, sondern ein Rutschen oder Abrollen. Damit sind zusätzlich Reibungsverluste bzw. der Übergang von potenzieller Energie in Rotationsenergie zu berücksichtigen. Beachtet man das nicht, dann liegt ein zusätzlicher systematischer Fehler vor, durch den man die Zeitspanne t stets zu groß und die Erdbeschleunigung entsprechend zu klein erhält.
Eine präzisere Bestimmung von g erlauben Messungen mit einem Fadenpendel, dessen Länge wir mit ℓ bezeichnen. Ist die Masse des Pendelkopfes groß gegenüber der des Fadens („mathematisches Pendel"), so gehorcht der Auslenkwinkel φ der Differenzialgleichung

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{\ell} \sin\varphi = 0\,.$$

Für $\varphi \ll 1$ ist $\sin\varphi \approx \varphi$, und man erhält die Schwingungsgleichung $\ddot{\varphi} + \frac{g}{\ell}\,\varphi = 0$. Deren Lösungen sind harmonische Schwingungen mit der Kreisfrequenz $\omega = 2\pi\nu = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$. Die Schwingungsdauer ist also von der Maximalauslenkung unabhängig, solange diese klein ist. Selbst eine leichte Dämpfung durch Reibung ändert diesen Zusammenhang nicht merklich.
Für die Abhängigkeit des Fehlers Δg von den Fehlern der Pendellänge ℓ und der Schwingungsdauer $\tau = \frac{1}{\nu}$ ist der Zusammenhang ähnlich wie in (2.5), auch hier ist eine möglichst präzise Zeitmessung erforderlich.
Nun lässt sich die Dauer einer einzelnen Schwingung mit einfachen Methoden ebenfalls nicht besonders genau messen, man hat wiederum $\Delta\tau = \Delta t \approx 0.2\,\mathrm{s}$. Bei der Pendelschwingung ist der gewaltige Vorteil aber, dass man ja die Dauer vieler aufeinanderfolgender Perioden messen kann. Wenn n Perioden insgesamt eine Zeit t dauern, dann ist $\tau = \frac{t}{n}$ und entsprechend $\Delta\tau = \frac{\Delta t}{n}$, sofern man fehlerfrei mitzählt. (Wegen $n \in \mathbb{N}$ muss $\Delta n \in \mathbb{Z}$ sein, entsprechend ist die Forderung $\Delta n = 0$ bei sauberem Arbeiten durchaus erfüllbar.) Der Fehler Δt verteilt sich also auf viele Schwingungen, und dadurch kann man τ sehr genau messen.
Auch die Pendelmethode hat aber ihre Tücken. So ist die harmonische Schwingung ja nur eine Näherung, die sich aus der Linearisierung der Differenzialgleichung (d. h. aus $\sin\varphi \approx \varphi$) ergibt. Je größer der maximale Auslenkwinkel $\varphi_{\max}$ ist, desto schlechter ist diese Näherung.
Bei sehr kleinen Auslenkungen wird jedoch das Abzählen der Schwingungen schwierig. Im Extremfall kann es sogar passieren, dass das Pendel während der Messung durch Reibung zum Stillstand kommt. Entsprechend muss man $\varphi_{\max}$ so wählen, dass einerseits der systematische Linearisierungsfehler klein, andererseits aber sinnvolles Messen möglich ist.
Den Linearisierungsfehler vermeidet das von C. Huygens entworfene *Zykloidenpendel*, bei dem der Pendelkopf durch Aufhängung zwischen zwei Zykloiden (⇒ S. 36) selbst auf einer Zykloide gehalten wird.[a] Damit wird die Schwingungsdauer auch bei größeren Auslenkungen konstant. Dafür sind aber die Reibungseffekte größer; zudem ist ein solches Pendel schwerer anzufertigen.

Grundaufgaben der Mechanik

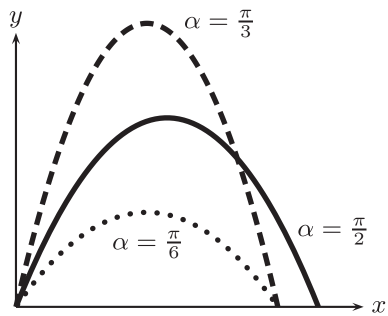
Mit den Bewegungsgleichungen sowie der geschickten Anwendung von Energie- und Impulssatz lassen sich zahlreiche Aufgabenstellungen lösen und teils weitreichende Folgerungen ziehen. Wir betrachten exemplarisch einige davon:

Weitester Wurf Ein Körper soll mit der Geschwindigkeit v_0 so geworfen werden, dass er möglichst weit vom Ausgangspunkt wieder am Boden auftrifft.
Die Bewegungsgleichungen unter Vernachlässigung des Luftwiderstands lauten

$$\ddot{x} = 0, \qquad \ddot{y} = -g,$$

die Anfangsbedingungen sind $x(0) = y(0) = 0$, $\dot{x}(0) = v_0 \cos\alpha$, $\dot{y}(0) = v_0 \sin\alpha$. Dabei bezeichnet α den Wurfwinkel, gemessen zur Horizontalen. Integriert man die Bewegungsgleichungen, so erhält man die Wurfparabel

$$y = \tan\alpha\, x - \frac{g}{2\, v_0^2 \cos^2\alpha}\, x^2 .$$



Eine schnelle Diskussion zeigt, dass für die Wurfweite w, d. h. jenen Wert von x, für den wieder $y = 0$ ist, die Beziehung

$$w(\alpha) = w\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

gilt. Entsprechend wird $w(\alpha)$ für den Winkel $\alpha = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$ maximal.
Für den Luftwiderstand muss in den Bewegungsgleichungen ein Reibungsterm berücksichtigt werden. Die Form der Bahn verändert sich gegenüber der Wurfparabel, insbesondere ist der fallende Teil der Kurve steiler als der ansteigende. Die maximale Weite erreicht man wegen des dadurch kürzeren Weges und der entsprechend geringeren Reibungsverluste nun mit einem Wurfwinkel, der etwas kleiner ist als $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

Elastischer und inelastischer Stoß Stoßen zwei Körper aneinander, so hängt das Resultat nicht nur von den Geschwindigkeiten und den Massen ab, sondern auch von den elastischen Eigenschaften der Körper. Inbesondere betrachtet man gerne zwei Grenzfälle (die hier nur eindimensional behandelt werden; die Indizes 1 und 2 kennzeichnen die beiden Körper, der Strich bezeichnet die Größen nach dem Stoß):

- Beim *total elastischen Stoß* gelten Impulssatz und mechanischer Energiesatz:

  $$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2', \qquad \text{und} \qquad m_1 \frac{v_1^2}{2} + m_2 \frac{v_2^2}{2} = m_1 \frac{(v_1')^2}{2} + m_2 \frac{(v_2')^2}{2} .$$

  Setzen wir $v_2 = 0$ (was nur einer Wahl des Bezugssystems entspricht), so ergibt sich[a]

  $$v_1' = \frac{\frac{m_1}{m_2} - 1}{\frac{m_1}{m_2} + 1}\, v_1 , \qquad v_2' = \frac{2}{\frac{m_1}{m_2} + 1}\, v_1 .$$

http://www.springer.com/978-3-8274-2384-9

Schlüsselkonzepte zur Physik
Von den Newton-Axiomen bis zur Hawking-Strahlung
Lichtenegger, K.
2015, XIII, 428 S. 50 Abb., Softcover
ISBN: 978-3-8274-2384-9