Giancoli Physik

Gymnasiale Oberstufe

PEARSON
Schule

Kapitel 10

Wellen und Wellenausbreitung

Wellen wie Wasserwellen oder Wellen entlang eines Seils bewegen sich von ihrer Quelle fort. Bei den hier abgebildeten Wellen eines gespannten Seils oder Gummibands handelt es sich allerdings um stehende Wellen. Sie scheinen sich nicht auszubreiten; doch kann man sich jede der gezeigten Wellen vorstellen als die Überlagerung aus einer nach rechts laufenden Welle und der reflektierten, die zurück nach links läuft. Ebenso kann man sich stehende Wellen als Oszillationen eines gespannten Seils in Resonanz denken. Jede dieser stehenden Wellen tritt bei einer bestimmten Frequenz auf. Überlegen Sie, wie sich die Frequenzen zueinander verhalten.

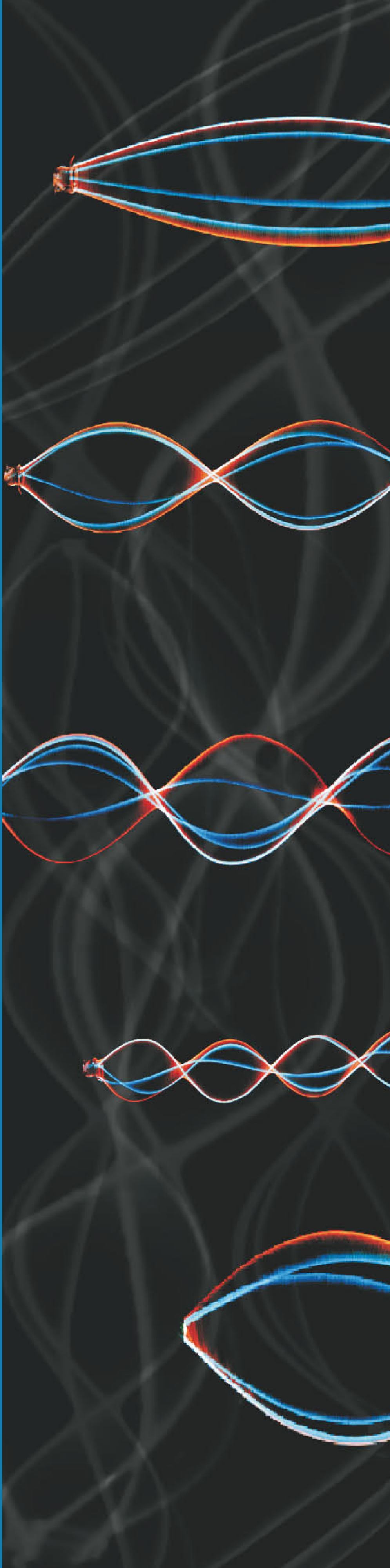


Abbildung 10.1 Ein Stein wird ins Wasser geworfen: Wasserwellen breiten sich vom Quellpunkt aus.

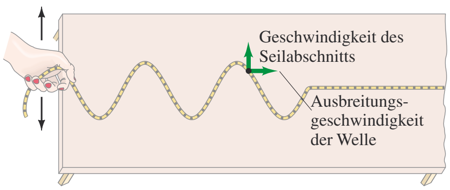


Abbildung 10.2 Wellenbewegung entlang eines Seils. Die Wellen breiten sich nach rechts entlang des Seils aus. Die Segmente des Seils schwingen auf der Tischoberfläche hin und her.

Wenn Sie einen Stein in einen See werfen, breiten sich kreisförmige Wellen aus (▶ Abbildung 10.1). Wellen breiten sich auch entlang eines Seils aus, das gerade über einen Tisch verläuft und von dem Sie ein Ende hin- und herbewegen (▶ Abbildung 10.2). Wasserwellen und Wellen entlang eines Seils sind zwei allgemeine Beispiele für Wellenbewegungen.

Schwingungen und Wellenbewegungen sind eng miteinander verknüpfte Phänomene. Schwingungen sind periodische Vorgänge bezüglich der Zeit, Wellen sind periodische Vorgänge bezüglich Zeit und Raum. Wir sagen auch, Schwingungen breiten sich in der Zeit aus, Wellen in Zeit und Raum. Wellen – ob Meereswellen, Seilwellen, Erdbebenwellen oder Schallwellen in der Luft – haben eine Schwingung als Ursache. Im Falle von Schall schwingt nicht nur die Quelle, auch der Empfänger – das Trommelfell oder die Membran eines Mikrophons – ist ein schwingendes System. Das Medium, in dem sich die „mechanischen Wellen" ausbreiten, schwingt selber (so wie die Luft bei Schallwellen). In diesem Kapitel wollen wir uns zunächst hauptsächlich mit **mechanischen Wellen** wie Wasserwellen und Wellen auf einem Seil befassen, danach sehen wir uns auch Schallwellen genauer an. In späteren Kapiteln begegnen wir anderen Formen der Wellenausbreitung, einschließlich elektromagnetischer Wellen und Licht.

Wenn Sie schon einmal Meereswellen beobachtet haben, die sich auf das Ufer zu bewegen, haben Sie sich vielleicht gefragt, ob die Wellen Wasser vom Meer zum Strand transportieren. Das ist definitiv nicht der Fall.[1] Wasserwellen bewegen sich mit einer erkennbaren Geschwindigkeit. Doch jedes Wasserteilchen (oder Molekül) oszilliert lediglich um eine Gleichgewichtslage herum. Man kann das deutlich beobachten anhand von Blättern, die sich auf und ab bewegen, wenn eine Welle auf sie trifft. Die Blätter (oder ein Stück Kork) werden durch die Wellen nicht vorwärtsbewegt; vielmehr schwingen

1 Lassen Sie sich nicht durch das „Brechen" der Meereswellen irritieren. Das passiert, weil die Wellen mit dem Ufergrund wechselwirken und damit keine einfachen Wellen mehr sind.

sie um ihre Ruhelage, denn sie folgen damit nur der Bewegung des Wassers selbst. Ganz ähnlich bewegen sich die einzelnen Stückchen eines Seils (Abbildung 10.2) nur hin und her, während sich die Welle nach rechts ausbreitet. Das sind die allgemeinen Eigenschaften mechanischer Wellen: (1) Eine Welle kann sich über eine große Entfernung mit einer bestimmten Geschwindigkeit ausbreiten; (2) jedes Teilchen des Wellenmediums (Wasser oder Seil) schwingt um eine Ruhelage; diese Bewegung ist einfach harmonisch, wenn die Welle sinusförmig ist. Obgleich also die Welle selbst nicht stofflich ist, kann sich das Wellenmuster in einem Medium ausbreiten.

Wellen übertragen Energie von einem Ort zum andern. Eine Wasserwelle nimmt die Energie beispielsweise durch einen Steinwurf oder durch Winde weit draußen auf See auf. Die Energie wird durch die Wellen zum Ufer transportiert. Die oszillierende Hand in Abbildung 10.2 überträgt Energie auf das Seil, die dann entlang desselben transportiert wird und auf einen Körper am anderen Seilende übertragen werden kann. Jede sich ausbreitende Wellenart überträgt Energie.

10.1 Eigenschaften von Wellen

Wir wollen einen Blick darauf werfen, wie eine Welle entsteht und warum sie sich ausbreitet. Schauen wir uns zuerst ein einzelnes **Wellenpaket** an (► Abbildung 10.3). Die Hand hebt ein Seilende an, und weil es mit den benachbarten Seilstücken verbunden ist, verspüren auch diese eine aufwärts gerichtete Kraft und bewegen sich nach oben. Weil sich jedes folgende Seilstück aufwärts bewegt, bewegt sich der Wellenkamm entlang des Seils nach außen. In der Zwischenzeit ist das Endstück des Seils durch die Hand wieder in seine Ausgangsposition zurückgekehrt, und nachdem jedes folgende Seilstück seinen Scheitelwert erreicht hat, wird es durch die benachbarten, vorausgehenden Seilsegmente wieder zurückgezogen. Die Quelle eines Wellenpakets ist also eine Störung, und die Anziehungskräfte zwischen aneinander grenzenden Seilstücken verursachen das nach außen wandernde Wellenpaket. Wellen in anderen Medien werden auf ganz ähnliche Weise erzeugt und vorwärts bewegt.

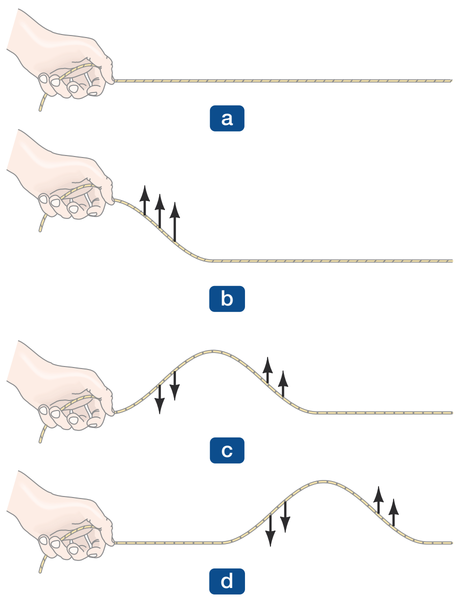


Abbildung 10.3 Bewegung eines Wellenpakets. Die Pfeile zeigen die Geschwindigkeit der Seilsegmente an. Beachten Sie, dass die Ausbreitungsgeschwindigkeit nach rechts weist.

Eine Welle wie die aus Abbildung 10.2 hat als Quelle eine kontinuierliche und oszillierende Anregung. Das bedeutet, die Quelle ist eine *Schwingung* oder *Oszillation*. In Abbildung 10.2 versetzt eine Hand ein Seilende in Schwingungen. Wasserwellen können durch ein beliebiges schwingendes Objekt an der Oberfläche, beispielsweise Ihre Hand, erzeugt werden. Oder das Wasser fängt durch Windböen oder einen hineingeworfenen Stein oder Tennisball an zu schwingen. Eine vibrierende Stimmgabel oder eine Trommelbespannung erzeugt Schallwellen. Und wie wir noch sehen werden, sind schwingende elektrische Ladungen die Ursache für elektromagnetische Wellen und Licht. Fast jeder oszillierende Körper sendet Wellen aus.

Die Quelle jeder beliebigen Wellenart ist eine Schwingung. Es ist die *Schwingung*, die sich ausbreitet und somit die Welle räumlich ergibt. Wenn sich die Welle sinusförmig als einfache harmonische Schwingung ausbreitet, dann wird die Welle selbst – vorausgesetzt, das Medium ist ideal elastisch – sowohl räumlich als auch zeitlich sinusförmig sein. Könnten Sie zu einem

Sinusförmige Wellen:
im Raum
in der Zeit

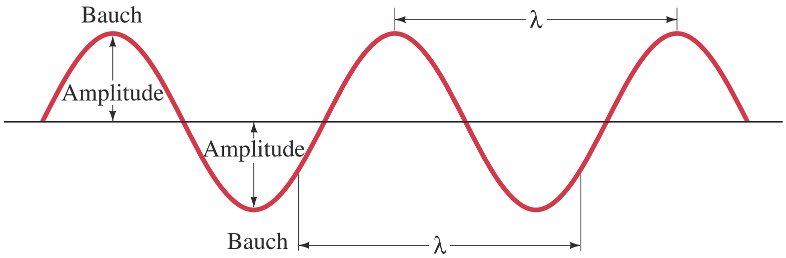


Abbildung 10.4 Wichtige Kenngrößen einer sinusförmigen Welle.

Tabelle 10.1

Schallgeschwindigkeit verschiedener Stoffe bei 20 °C und 1 bar

Material	Geschwindigkeit (m/s)
Luft	343
Luft (0 °C)	331
Helium	1005
Wasserstoff	1300
Wasser	1440
Meerwasser	1560
Eisen und Stahl	$\approx$ 5000
Glas	$\approx$ 4500
Aluminium	$\approx$ 5100
Hartholz	$\approx$ 4000

bestimmten Zeitpunkt ein Bild einer sich im Raum ausbreitenden Welle aufnehmen, so würden Sie erkennen, dass die Welle die Form einer Sinus- oder Kosinus-Funktion hat. Wenn Sie andererseits die Bewegung des Mediums an einem bestimmten Punkt über einen längeren Zeitraum beobachten würden – beispielsweise die Wasseroberfläche durch zwei nah beieinander stehende Pierpfeiler oder durch ein Bullauge hindurch –, so würden Sie das Auf und Ab der Wellen als sinusförmig in der Zeit erkennen.

Einige der wichtigen Größen, die der Beschreibung einer periodischen, sinusförmigen Welle dienen, sind in ▸ Abbildung 10.4 gezeigt. Die hohen Punkte einer Welle heißen Wellenberge oder Wellenkämme, die tiefen bilden die Wellentäler. Die **Amplitude** ist der Maximalwert eines Wellenbergs oder Wellentals relativ zur Ruhelage. Die gesamte Auslenkung vom Wellenberg zum Wellental beträgt die doppelte Amplitude. Der Abstand zweier Wellenberge voneinander heißt **Wellenlänge** und wird mit dem griechischen Buchstaben λ (lambda) bezeichnet. Die Wellenlänge ergibt sich auch aus dem Abstand zweier beliebiger aufeinanderfolgender Punkte auf der Welle, die identisch sind. Die **Frequenz** f, manchmal auch durch den griechischen Buchstaben ν (ny) bezeichnet, ist die Anzahl der Wellenberge – oder kompletter Zyklen –, die pro Zeiteinheit einen bestimmten Punkt passieren. Wie zuvor in Gleichung 9.2 ist $T = 1/f$.

Die **Ausbreitungsgeschwindigkeit** v ist die Geschwindigkeit, mit der sich Wellenberge (oder jeder andere Abschnitt der Wellenform) ausbreiten. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit wird oft als *Phasengeschwindigkeit* bezeichnet. Sie muss unterschieden werden von der Geschwindigkeit der Teilchen im Medium selbst. Beispielsweise ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit der sich entlang eines Seils ausbreitenden Welle in Abbildung 10.2 nach rechts gerichtet. Dagegen bewegen sich die Teile des Seils nach oben und unten.

Ein Wellenberg legt die Distanz einer Wellenlänge λ in einer Periode T zurück. Somit ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle v gleich λ/T oder (mit $1/T = f$):

$$v = \lambda f \, . \qquad (10.1)$$

Nehmen Sie beispielsweise an, eine Welle habe eine Wellenlänge von 5 m und eine Frequenz von 3 Hz. Da drei Wellenberge einen gegebenen Punkt pro Sekunde passieren und der Wellenbergabstand 5 m beträgt, muss der erste Wellenberg (oder jeder beliebige andere Wellenteil) 15 m in einer Sekunde zurücklegen. Somit ist die Geschwindigkeit 15 m/s.

10.2 Wellenarten

Transversale und longitudinale Wellen

Durchläuft eine Welle ein Seil, etwa von links nach rechts wie in ▸ Abbildung 10.2, so schwingen die Teile des Seils senkrecht zur Ausbreitungsrichtung der Welle. Eine derartige Welle heißt **Transversalwelle** (Querwelle). Eine zweite Wellenart ist die **Longitudinalwelle** (Längswelle). In ihr schwingen die Teilchen des Mediums in derselben Richtung wie die Ausbreitungsrichtung der Welle. Longitudinalwellen lassen sich leicht mit einer Sprungfeder erzeugen, deren eines Ende mit der Hand abwechselnd gestaucht und gedehnt wird, wie in ▸ Abbildung 10.5b dargestellt. Zum Vergleich dazu zeigt Abbildung 10.5a eine Transversalwelle. Eine Serie von Kompressionen und Expansionen breiten sich entlang der Feder aus. Die Kompressionen sind jene Gebiete, wo die Windungen momentan enger beieinander liegen. Expansionen sind die Regionen, in denen die Windungen momentan weiter voneinander entfernt sind. Kompressionen und Expansionen korrespondieren mit den Wellenbergen und Wellentälern bei Transversalwellen.

Ein wichtiges Beispiel einer Longitudinalwelle ist der Schall. Eine vibrierende Trommelbespannung beispielsweise komprimiert und verdünnt abwechselnd die unmittelbar davor befindliche Luft und erzeugt so Longitudinalwellen, die sich von der Trommel fort durch die Luft ausbreiten (▸ Abbildung 10.6).

Wie im Fall von Transversalwellen oszillieren die Mediumteilchen nur geringfügig um ihre Ruhelage, wohingegen die Welle selber große Distanzen zurücklegen kann. Was sind nun Wellenlänge, Frequenz und Ausbreitungsgeschwindigkeit bei Longitudinalwellen? Die Wellenlänge ist der Abstand zwischen zwei aufeinanderfolgenden Kompressionen (oder Expansionen), und die Frequenz ist die Anzahl der Kompressionen, die einen gewählten Punkt pro Sekunde durchlaufen. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit ist die Geschwindigkeit, mit der sich jede Kompression zu bewegen scheint. Sie ist gleich dem Produkt aus Wellenlänge und Frequenz: $v = \lambda f$ (Gleichung 10.1).

Longitudinalwellen kann man grafisch darstellen, indem man die Dichte der Moleküle (oder Windungen einer Sprungfeder) gegen ihren Ort aufträgt (▸ Abbildung 10.7b). Wir werden öfter solche grafischen Darstellungen nutzen, weil sich so das, was passiert, viel leichter illustrieren lässt. Beachten Sie, dass die Kurve starke Ähnlichkeit mit derjenigen einer Transversalwelle hat.

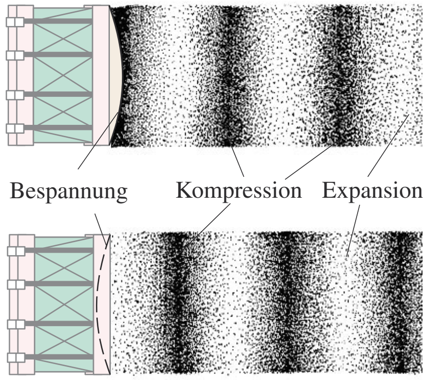


Abbildung 10.6 Erzeugung von Schallwellen (Longitudinalwellen).

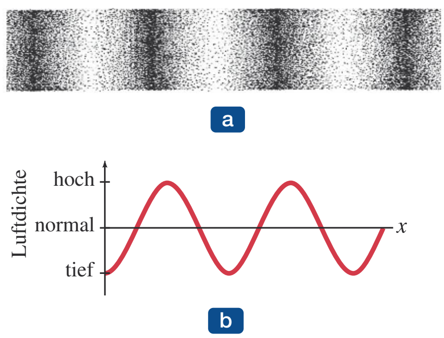


Abbildung 10.7 (a) Eine Longitudinalwelle mit (b) ihrer grafischen Darstellung.

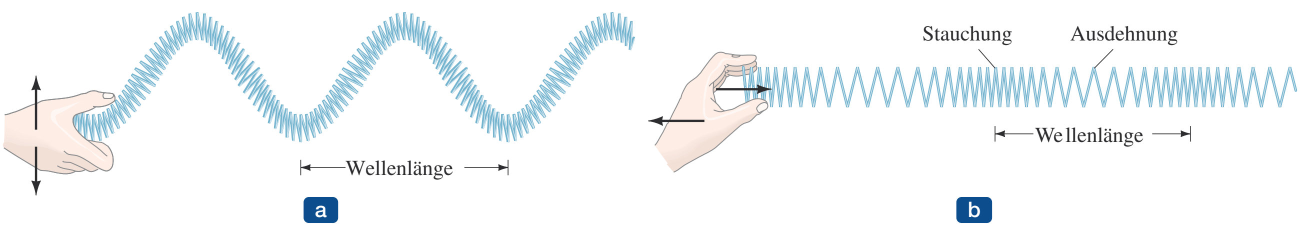


Abbildung 10.5 (a) Transversalwelle; (b) Longitudinalwelle.

ANGEWANDTE PHYSIK

Erdbebenwellen

Andere Wellen

Bei einem Erdbeben entstehen sowohl transversale als auch longitudinale Wellen. Die Transversalwellen, die durch den Erdkörper laufen, heißen S-Wellen (S für Scherung), die Longitudinalwellen werden Druckwellen (P-Wellen, von engl. *pressure*) genannt. Sowohl Longitudinal- als auch Transversalwellen können sich in einem Festkörper ausbreiten, da die Atome oder Moleküle in jede Richtung relativ zu ihrer Ruhelage schwingen können. In Flüssigkeiten hingegen können sich nur Longitudinalwellen ausbreiten, da eine transversale Ausbreitung keine rücktreibende Kraft bewirken würde, denn eine Flüssigkeit ist durch Scherung sehr leicht verformbar. Aus diesem Grund folgerten Geophysiker, dass ein Teil des Erdkerns flüssig sein muss: Longitudinalwellen können durch den gesamten Erddurchmesser laufen und auf der anderen Erdseite nachgewiesen werden, nicht jedoch Transversalwellen.

Neben diesen beiden Wellentypen, die sich im Erdkörper (oder einer anderen Substanz) ausbreiten können, gibt es noch *Oberflächenwellen*, die sich entlang der Grenzfläche zweier eng beieinander liegender Materialien ausbreiten. Eine Wasserwelle ist genau genommen ein Oberflächenwelle, die sich an der Grenzfläche zwischen Luft und Wasser ausbreitet. Die Bewegung jedes Wasserteilchens an der Oberfläche ist kreisförmig oder elliptisch (▸ Abbildung 10.8), somit ist sie eine Kombination aus transversalen und longitudinalen Bewegungen. Unter der Oberfläche gibt es gleichfalls ein Gemisch aus transversalen und longitudinalen Wellenbewegungen, wie abgebildet. Auf dem Grund ist die Bewegung ausschließlich longitudinal. Wenn sich eine Welle dem Ufer nähert, wird sie am Grund durch Reibung verlangsamt, während sich der Wellenberg mit größerer Geschwindigkeit weiter fortbewegt (▸ Abbildung 10.9) und sich an der Spitze überschlägt.

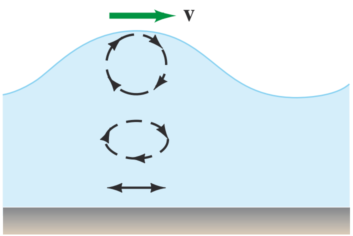


Abbildung 10.8 Eine Wasserwelle ist ein Beispiel für eine Oberflächenwelle, eine Überlagerung aus Transversal- und Longitudinalwellen.

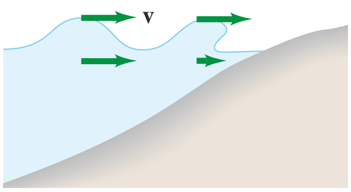


Abbildung 10.9 Wie eine Welle bricht. Die grünen Pfeile zeigen die Geschwindigkeit der Wassermoleküle.

Oberflächenwellen treten auch bei einem Erdbeben auf. Sie breiten sich entlang der Erdoberfläche aus und sind die Hauptverursacher von Erdbebenschäden.

Wellen, die sich in einer Richtung entlang einer Linie ausbreiten, wie Transversalwellen auf einer gespannten Schnur oder Longitudinalwellen in einem Stab oder einem flüssigkeitsgefüllten Röhrchen, heißen *lineare* oder *eindimensionale Wellen*. Oberflächenwellen wie die Wasserwellen aus Abbildung 10.1 sind *zweidimensionale Wellen*. Wellen schließlich, die sich von einer Quelle ausgehend in alle Richtungen ausbreiten, wie Schallwellen eines Lautsprechers oder Erdbebenwellen durch den Erdkörper, sind *dreidimensionale Wellen*. Wir werden mit allen drei Typen von Wellen zu tun haben, besonders aber mit eindimensionalen Wellen, da sie einfacher aufgebaut und leichter zu verstehen sind.

10.3 Energietransport in Wellen

Wellen übertragen Energie von einem Ort zum andern. Wenn Wellen sich durch ein Medium ausbreiten, wird die Energie als Schwingungsenergie von einem Teilchen zum nächsten Teilchen des Mediums übertragen. Bei einer sinusförmigen Welle der Frequenz f bewegen sich die Teilchen entsprechend einer Bewegung eines harmonischen Oszillators. Dabei hat jedes Teilchen die Energie $E = \frac{1}{2}kD_M^2$, wobei D_M die maximale Auslenkung (Amplitude) der Teilchenbewegung ist, entweder transversal oder longitudinal (siehe Abbildung 9.10a, in der wir D_M durch A ersetzt haben). Unter Benutzung von Gleichung 9.7a können wir schreiben $k = 4\pi^2 mf^2$, wobei m die Masse eines Teilchens (oder kleinen Volumens) des Mediums ist. Mit der Frequenz ausgedrückt ergibt sich

$$E = \frac{1}{2}kD_M^2 = 2\pi^2 mf^2 D_M^2 \,.$$

Für dreidimensionale Wellen, die sich in einem elastischen Medium ausbreiten, ist die Masse $m = \rho V$, wobei ρ die Dichte des Mediums und V das Volumen eines kleinen Ausschnitts des Mediums ist. Für das Volumen gilt $V = Al$, A ist darin der Querschnitt, durch den die Welle wandert (► Abbildung 10.10). Wir können l als die Distanz auffassen, die die Welle in der Zeit Δt als $s = v\Delta t$ zurücklegt, wobei v die Ausbreitungsgeschwindigkeit ist. Somit gilt $m = \rho V = \rho As = \rho Av\Delta t$ und

$$\Delta E = 2\pi^2 \rho Av\Delta t f^2 D_M^2 \,. \tag{10.2}$$

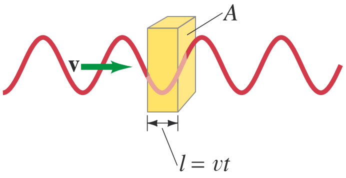


Abbildung 10.10 Berechnung der von einer Welle mit der Geschwindigkeit v übertragenen Energie.

Aus dieser Gleichung erhalten wir das wichtige Resultat, dass **die in einer Welle transportierte Energie proportional zum Quadrat der Amplitude und zum Quadrat der Frequenz ist**. Die mittlere Energieübertragungsrate ist die mittlere Leistung:

Wellenenergie $\propto$ (Amplitude)^2

Wellenenergie $\propto$ (Frequenz)^2

$$\overline{P} = \frac{\Delta E}{\Delta t} = 2\pi^2 \rho Avf^2 D_M^2 \,. \tag{10.3}$$

Die Intensität I einer Welle schließlich ist definiert als die mittlere Leistung, die durch eine Einheitsfläche senkrecht zum Energiestrom transportiert wird:

$$I = \frac{\overline{P}}{A} = 2\pi^2 v\rho f^2 D_M^2 \,. \tag{10.4}$$

Wenn eine Welle sich von einer Quelle in alle Richtungen ausbreitet, handelt es sich um eine dreidimensionale Welle. Beispiele sind Schallwellen unter freiem Himmel, Erdbebenwellen und Lichtwellen. Ist das Medium isotrop (in allen Richtungen von gleicher Beschaffenheit), so spricht man von *sphärischen Wellen* oder Kugelwellen (► Abbildung 10.11). Indem sich die Welle ausbreitet, wird die übertragene Energie über einen immer größer werdenden Bereich verteilt, denn eine Kugelfläche mit Radius r ist gleich $4\pi r^2$. Damit wird die Intensität einer Welle

$$I = \frac{\overline{P}}{A} = \frac{\overline{P}}{4\pi r^2} \,.$$

Ist die mittlere Leistung $\overline{P}$ konstant, so nimmt die Intensität proportional zum quadrierten Abstand von der Quelle ab:

$$I \propto \frac{1}{r^2} \,. \quad \text{(sphärische Welle)} \tag{10.5}$$

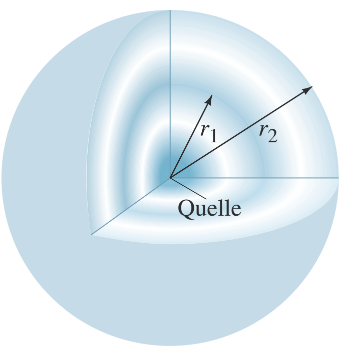


Abbildung 10.11 Wellen, die sich von einer Quelle fortbewegen, haben eine sphärische Form. Gezeigt sind zwei unterschiedliche Wellenbäuche (oder Wellenknoten) mit Radius r_1 und r_2.

Die Amplitude einer sphärischen Welle nimmt gleichfalls mit dem Abstand ab. Da die Intensität proportional zum Quadrat der Amplitude ist ($I \propto D_M^2$, Gleichung 10.4), muss die Amplitude mit $1/r$ abnehmen, so dass $I \propto D_M^2$ proportional zu $1/r^2$ ist (Gleichung 10.5). Also gilt

Amplitude $\propto \frac{1}{r}$

$$D_M \propto \frac{1}{r} .$$

Für eine eindimensionale Welle wie eine Transversalwelle auf einem Seil oder ein longitudinales Wellenpaket entlang eines dünnen Metallstabs ist die Situation anders. Der Ausbreitungsbereich bleibt konstant, also bleibt auch die Amplitude D_M konstant (Reibung vernachlässigt). Somit nehmen Amplitude und Intensität nicht mit dem Abstand ab.

In der Realität ist Dämpfung durch Reibung stets vorhanden, und ein Teil der Energie einer Welle wird in thermische Energie umgewandelt. Somit verringern sich Amplitude und Intensität einer eindimensionalen Welle mit wachsendem Abstand von der Quelle. Für eine dreidimensionale Welle wird die Abnahme größer sein als die oben diskutierte, obgleich der Effekt oft recht gering sein mag.

Beispiel 10.1 Intensität von Erdbeben

Wenn die Intensität einer longitudinalen Erdbebenwelle 100 km von der Quelle $1{,}0 \cdot 10^6\ \mathrm{W/m^2}$ ist, wie groß ist dann die Intensität in 400 km Entfernung?

Lösung

Die Intensität nimmt mit dem Entfernungsquadrat ab. Daher wird die Intensität in 400 km Abstand $(\frac{1}{4})^2 = \frac{1}{16}$ des Wertes in 100 km Entfernung betragen, also $6{,}2 \cdot 10^4\ \mathrm{W/m^2}$.

10.4 Mathematische Beschreibung der Wellenausbreitung

Wir wollen nun eine Welle betrachten, die sich entlang der x-Achse ausbreitet. Es könnte beispielsweise eine Transversalwelle auf einem Seil oder eine Longitudinalwelle entlang eines Stabes oder flüssigkeitsgefüllten Röhrchens sein. Wir setzen voraus, dass die Wellenform sinusförmig ist und eine Wellenlänge λ und Frequenz f besitzt. Zum Zeitpunkt $t = 0$ ist die Wellenform gegeben durch

$$D(x) = D_M \sin \frac{2\pi}{\lambda} x , \tag{10.6}$$

(dargestellt durch die durchgehende Kurve in ▸ Abbildung 10.12). $D(x)$ ist die **Auslenkung**[2] der Welle (sei sie nun longitudinal oder transversal) an Position x, und D_M ist die **Amplitude** (maximale Auslenkung) der Welle. Diese Beziehung ergibt eine Kurve, die sich selbst stets nach einer Wellenlänge wiederholt. Das genau haben wir beabsichtigt, so dass die Auslenkung bei $x = 0, x = \lambda, x = 2\lambda$ und so weiter dieselbe ist (da $\sin 4\pi = \sin 2\pi = \sin 0$).

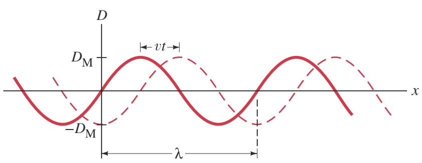


Abbildung 10.12 Eine sich ausbreitende Welle. In der Zeit t legt sie die Distanz vt zurück.

Stellen wir uns nun vor, dass sich die Welle mit der Geschwindigkeit v nach rechts bewegt. Nach einer Zeit t hat sich jeder Teil der Welle (tatsächlich die gesamte Wellenform) nach rechts bewegt. Das zeigt die gestrichelte Kurve aus Abbildung 10.12 an. Betrachten Sie einen beliebigen Punkt auf der Welle zum Zeitpunkt $t = 0$: etwa ein Wellenkamm, der sich an einer bestimmten Stelle x befindet. Nach einer Zeit t hat dieser Kamm eine Distanz vt zurückgelegt, seine neue Position ist um den Abstand vt größer als seine alte. Um diesen neuen Punkt auf der Wellenform zu beschreiben, muss das

2 Einige Bücher schreiben $y(x)$ anstelle von $D(x)$. Um Verwirrung zu vermeiden, reservieren wir y (und z) für die Koordinatenpositionen von Wellen in zwei oder drei Dimensionen. Unser $D(x)$ kann für Druck (in Longitudinalwellen), Auslenkung (in transversalen mechanischen Wellen) oder – wie wir noch sehen werden – elektrische oder magnetische Felder in elektromagnetischen Wellen stehen.

Argument der Sinusfunktion dasselbe sein wie zum Zeitpunkt $t = 0$, also ersetzen wir x in Gleichung 10.6 durch $(x - vt)$:

$$D(x, t) = D_M \sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x - vt)\right] . \tag{10.7a}$$

Eindimensionale Wellengleichung

Anders gesagt, wenn Sie auf einem Wellenkamm reiten, bleibt das Argument der Sinusfunktion $(2\pi/\lambda)(x - vt)$ gleich $(= \pi/2, 5\pi/2$ usw.). Wenn t wächst, muss x ebenfalls wachsen, damit $(x - vt)$ konstant bleibt.

Sinusförmige Wellen bezeichnen wir auch als *harmonische Wellen*. Gleichung 10.7a ist die mathematische Darstellung einer sinusförmigen Welle, die sich entlang der x-Achse nach rechts (x wächst) bewegt. Sie liefert die Auslenkung $D(x, t)$ der Welle an jedem beliebigen Punkt x zu jeder beliebigen Zeit t. Die Funktion $D(x, t)$ beschreibt eine Kurve, die die tatsächliche Wellenform im Raum zum Zeitpunkt t darstellt. Mit $v = \lambda f$ (Gleichung 10.1) können wir Gleichung 10.7a in andere Formen bringen, die oft vorteilhafter sind:

$$D(x, t) = D_M \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda} - \frac{2\pi t}{T}\right) = D_M \sin 2\pi(x/\lambda - t/T) . \tag{10.7b}$$

Darin ist $T = 1/f = \lambda/v$ die Periode. In der Form

$$D(x, t) = D_M \sin(kx - \omega t) \tag{10.7c}$$

ist $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$ die Winkelgeschwindigkeit und

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \tag{10.8}$$

die Wellenzahl. (Nicht zu verwechseln mit der Federkonstanten k; es sind sehr unterschiedliche Größen.) Alle drei Formen, Gleichungen 10.7a, 10.7b und 10.7c sind gleichwertig. Gleichung 10.7c ist am einfachsten zu schreiben und möglicherweise die allgemeinste. Die Größe $(kx - \omega t)$ und ihre Äquivalente in den anderen beiden Gleichungen sind die **Phasen** einer Welle. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit v wird Phasengeschwindigkeit genannt, da sie die Geschwindigkeit einer festen Phase (oder Form) der Welle beschreibt. Sie kann mit ω und k ausgedrückt werden als

$$v = \lambda f = \left(\frac{2\pi}{k}\right)\left(\frac{\omega}{2\pi}\right) = \frac{\omega}{k} . \tag{10.9}$$

Für eine Welle, die sich in negativer x-Richtung bewegt (abnehmende x-Werte), ersetzen wir in der Wellengleichung einfach v durch $-v$.

Wir wollen noch einen Blick auf Gleichung 10.7c werfen. Zum Zeitpunkt $t = 0$ haben wir

$$D(x, 0) = D_M \sin kx ,$$

als Startwert unserer sinusförmigen Wellenform. Schauen wir uns die Wellenform im Raum zu einem bestimmten späteren Zeitpunkt t_1 an, so erhalten wir

$$D(x, t_1) = D_M \sin(kx \pm \omega t_1) .$$

Das bedeutet, wenn wir ein Bild der Welle zum Zeitpunkt $t = t_1$ schießen, würden wir eine Sinuswelle mit der Phasenverschiebung ωt_1 sehen. Für einen festen Wert $t = t_1$ hat die Welle folglich eine Sinusform im Raum. Sehen wir uns andererseits einen festliegenden Ort an, etwa $x = 0$, können wir das Zeitverhalten der Welle studieren:

$$D(0, t) = D_M \sin -\omega t \, .$$

Dabei haben wir Gleichung 10.7c benutzt. Das ist (bis auf das negative Vorzeichen) die uns aus Abschnitt 9.2 (Gleichung 9.4) bekannte Gleichung für die harmonische Schwingung. Für jeden anderen festen x-Wert wie $x = x_1$ gilt $D = D_M \sin(kx_1 - \omega t)$, was sich nur durch die konstante Phasenverschiebung kx_1 unterscheidet. Folglich verhält sich die Auslenkung in der Zeit exakt wie eine harmonische Schwingung. Die Gleichungen 10.7 kombinieren diese Aspekte und geben uns die Darstellung einer **bewegten Sinuswelle**.

10.5 Das Superpositionsprinzip

Wenn zwei oder mehr Wellen zum selben Zeitpunkt denselben Ort passieren, ist für viele Wellen die tatsächliche Auslenkung die algebraische oder Vektorsumme der einzelnen Auslenkungen. Das nennt man das **Superpositionsprinzip (Überlagerungsprinzip)**. Es gilt für mechanische Wellen, solange die Auslenkungen nicht zu groß werden und es eine lineare Beziehung zwischen den Auslenkungen und den elastischen beziehungsweise rücktreibenden Kräften des Mediums gibt.[3] Ist beispielsweise die Amplitude einer mechanischen Welle so groß, dass sie den elastischen Bereich des Mediums überschreitet und demnach das Hooke'sche Gesetz nicht mehr gilt, so ist das Superpositionsprinzip nicht mehr genau erfüllt[4] Wir werden uns jedoch größtenteils mit Systemen beschäftigen, in denen wir die Gültigkeit des Superpositionsprinzips voraussetzen dürfen.

Ein Ergebnis des Superpositionsprinzips ist, dass wenn zwei Wellen denselben Raumbereich passieren, sie ihre Bewegung unabhängig voneinander fortsetzen. Vielleicht ist Ihnen zum Beispiel schon einmal aufgefallen, dass Wellen auf einer Wasseroberfläche (zweidimensionale Wellen), die aufeinander zulaufen, nach der „Begegnung" unverändert ihren Weg fortsetzen, als liefen sie durch die jeweils andere Welle hindurch (▶ Abbildung 10.20).

▶ Abbildung 10.13 gibt ein Beispiel für das Superpositionsprinzip: Drei Wellen unterschiedlicher Amplitude und Frequenz laufen über ein gespanntes Seil. Zu jedem Zeitpunkt, wie im in der Abbildung gezeigten Moment, ist die tatsächliche Amplitude an einer beliebigen Stelle x die Summe der Amplituden der drei Wellen an der Stelle. Die resultierende Welle ist keine einfache sinusförmige Welle, sie heißt die *zusammengesetzte Welle*.

Es kann gezeigt werden, dass jede zusammengesetzte Welle als Überlagerung vieler einfacher sinusförmiger Wellen unterschiedlicher Amplituden, Frequenzen und Wellenlängen aufgefasst werden kann. Das nennt man *Fourier'sches Gesetz*. Eine komplexe periodische Welle der Periode T lässt sich darstellen als Summe reiner kosinus- und sinusförmiger Terme, deren

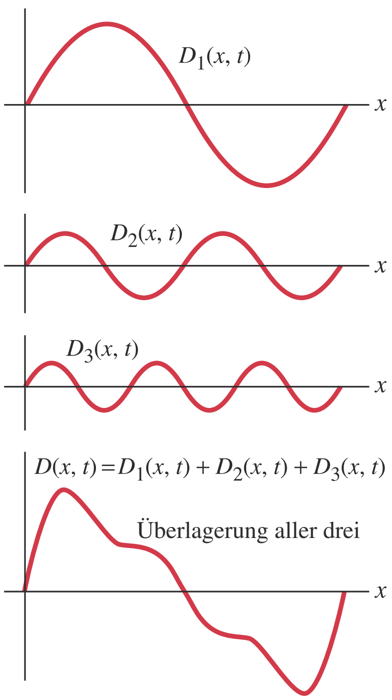


Abbildung 10.13 Das Superpositionsprinzip für eine eindimensionale Welle: eine aus drei sinusförmigen Wellen unterschiedlicher Amplitude und Frequenz zusammengesetzte Welle ($f_0, 2f_0, 3f_0$) zu einem bestimmten Zeitpunkt. Die zusammengesetzte Welle ist an jedem Ort und zu jedem Zeitpunkt die algebraische Summe der Amplituden seiner Teilwellen. Die Amplituden sind vergrößert dargestellt; damit das Superpositionsprinzip gültig ist, müssen sie klein im Vergleich mit den Wellenlängen sein.

3 Für elektromagnetische Wellen im Vakuum (Kapitel 23) gilt das Superpositionsprinzip immer.

4 Verzerrung ist im High-Fidelity-Bereich ein Beispiel, wo das Superpositionsprinzip nicht gilt: Zwei Frequenzen lassen sich in der Elektronik nicht linear kombinieren.

Frequenzen ganzzahlige Vielfache von $f = 1/T$ sind. Ist die Welle nicht periodisch, wird aus der Summe ein Integral (*Fourier-Integral*). Obgleich wir hier nicht ins Detail gehen wollen, sehen wir doch die Wichtigkeit sinusförmiger Wellen und der einfachen harmonischen Bewegung: Jede Wellenform lässt sich als Summe von kosinus- und sinusförmigen Wellen auffassen.

Beispiel 10.2 **Synthese einer Rechteck-Welle**

Drei Wellen mit $D_1 = D_M \cos kx$, $D_2 = 1/3 D_M \cos 3kx$ und $D_3 = 1/5 D_M \cdot \cos 5kx$ sind zum Zeitpunkt $t = 0$ gegeben. Dabei sind $D_M = 1{,}0\,\text{m}$ und $k = 10\,\text{m}^{-1}$. Zeichnen Sie die Summe der drei Wellen von $x = -0{,}4\,\text{m}$ bis $+0{,}4\,\text{m}$. (Diese drei Wellen sind die ersten drei Fourier-Komponenten einer Rechteck-Welle.)

Lösung

Die erste Welle, D_1, hat eine Amplitude von 1,0 m und eine Wellenlänge $\lambda = 2\pi/k = 2\pi/10\,\text{m} = 0{,}628\,\text{m}$. Die zweite Welle, D_2, hat eine Amplitude von 0,33 m und eine Wellenlänge $\lambda = 2\pi/3k = 2\pi/30\,\text{m} = 0{,}209\,\text{m}$. Die dritte Welle, D_3, hat eine Amplitude von 0,20 m und eine Wellenlänge von $\lambda = 2\pi/5k = 2\pi/50\,\text{m} = 0{,}126\,\text{m}$. Alle drei Wellen und ihre Summe sind in ► Abbildung 10.14 dargestellt. Die Summe beginnt einem Rechteckpuls zu ähneln (blaue Kurve).

ANGEWANDTE PHYSIK

Rechteck-Welle

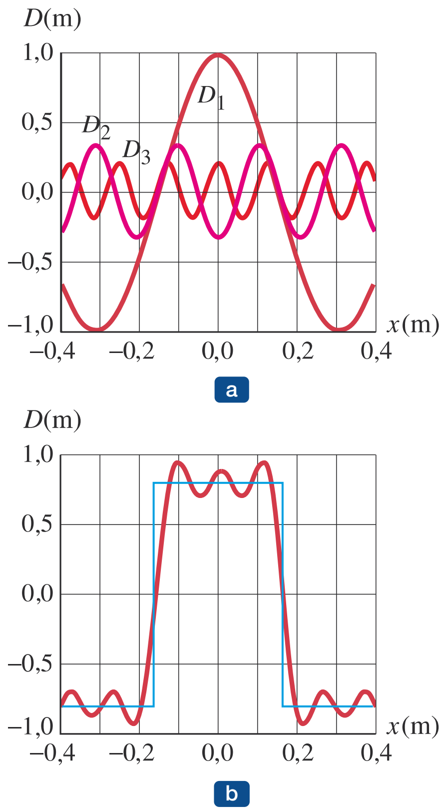


Abbildung 10.14 Beispiel 10.2. Synthese einer Rechteck-Welle.

Wenn die rücktreibende (elastische) Kraft in einigen kontinuierlichen Medien für mechanische Wellen nicht exakt proportional zur Auslenkung ist, hängt die Ausbreitungsgeschwindigkeit von der Frequenz ab.

Die Abhängigkeit der Ausbreitungsgeschwindigkeit von der Frequenz nennt man **Dispersion**. Die unterschiedlichen sinusförmigen Wellen, die eine zusammengesetzte Welle bilden, bewegen sich dann mit leicht unterschiedlicher Geschwindigkeit. Folglich wird die zusammengesetzte Welle ihre Form in dispersiven Medien ändern. Eine reine Sinuswelle behält zwar ihre Form auch in dispersiven Medien, Reibung und Streuung verändern jedoch auch die Wellenfunktion einer rein harmonischen Welle. Gibt es keine Dispersion und keine Reibung, so wird auch eine zusammengesetzte lineare Welle ihre Form nicht ändern.

10.6 Reflexion und Transmission

Wenn eine Welle auf ein Hindernis trifft oder das Ende ihres Ausbreitungsmediums erreicht, wird zumindest ein Teil der Welle reflektiert. Wahrscheinlich haben Sie schon einmal gesehen, wie Wasserwellen von einem Felsen oder vom Rand eines Schwimmbeckens reflektiert werden. Und ganz sicher haben Sie schon mal gehört, wie eine Schallwelle zurückgeworfen wird – das nennen wir dann „Echo“.

Ein Wellenpaket, das ein Seil entlang läuft, wird wie in ► Abbildung 10.15 gezeigt reflektiert. Sie können das selbst mit einem auf dem Tisch liegen-

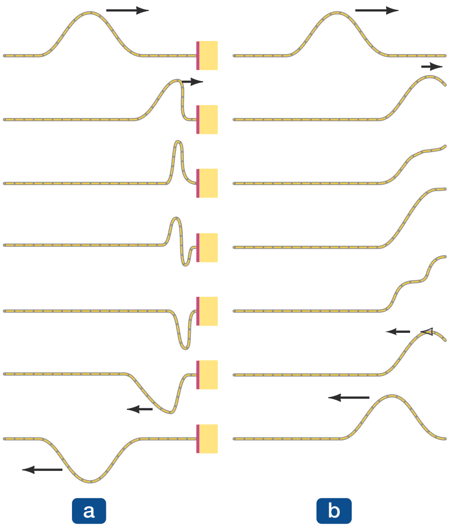


Abbildung 10.15 Reflexion eines Wellenpakets auf einem Seil, wenn das Seilende (a) fest und (b) lose ist.

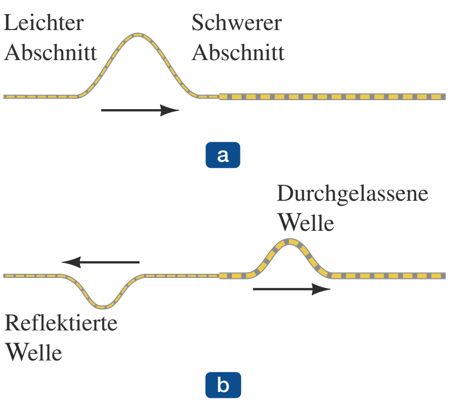


Abbildung 10.16 Läuft ein Wellenpaket in eine Diskontinuität (a), wird ein Teil reflektiert, und ein Teil wird durchgelassen (b).

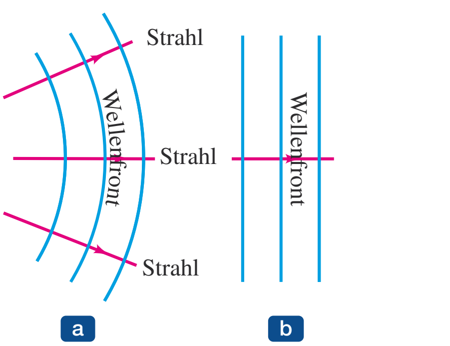


Abbildung 10.17 Strahlen, die die Ausbreitungsrichtung angeben, stehen stets senkrecht zu den Wellenfronten (Wellenberg). (a) Kreis- oder Kugelwellen nahe der Quelle. (b) Weit entfernt von der Quelle sind die Wellenfronten nahezu eben und heißen daher ebene Wellen.

den Seil ausprobieren und prüfen, ob das reflektierte Paket invertiert wird wie in Abbildung 10.15a, wenn das andere Seilende eingespannt ist, oder bei losem Ende aufrecht zurückläuft (Abbildung 10.15b). Im Fall des eingespannten Seils übt das Wellenpaket eine aufwärtsgerichtete Kraft auf die Befestigung aus. Diese übt eine gleich große, jedoch entgegengerichtete Kraft (drittes Newton'sches Axiom) abwärts auf das Seil aus. Diese abwärtsgerichtete Kraft erzeugt das invertierte reflektierte Paket. Das reflektierte Paket hat eine Phasenverschiebung von 180° erfahren, als ob die Phase um $\frac{1}{2}\lambda$ oder 180° verschoben wäre. Ein Wellenkamm wird zu einem Wellental und umgekehrt. In Abbildung 10.15b ist das freie Ende weder durch eine Befestigung noch durch zusätzliches Seil eingeschränkt. Es wird daher überschwingen – seine Auslenkung ist zeitweise größer als die des Wellenpakets. Das überschwingende Ende übt eine aufwärtsgerichtete Zugkraft auf das Seil aus, die das reflektierte Paket erzeugt. Folglich wird der Wellenkamm nicht invertiert (keine Phasenverschiebung).

Wenn das Wellenpaket aus Abbildung 10.15a die Wand erreicht, wird nicht die gesamte Energie reflektiert. Ein Teil wird von der Wand absorbiert. Ein Teil der absorbierten Energie wird in Wärme umgewandelt, ein weiterer Teil wandert weiter durch die Wand. Man kann Reflexion und Transmission besser anhand eines Wellenpakets illustrieren, das durch ein Seil läuft, das aus einem leichten und einem schweren Abschnitt besteht (► Abbildung 10.16). Wenn die Welle die Grenze zwischen den beiden Seilabschnitten erreicht, wird ein Teil des Pakets reflektiert, ein anderer läuft, wie dargestellt, weiter. Je schwerer der zweite Abschnitt ist, desto geringer ist die Amplitude des transmittierten (durchgehenden) Wellenpakets. Wenn der zweite Abschnitt eine Wand oder ein Haken ist, wird nur sehr wenig durchgelassen. Bei einer periodischen Welle verändert sich die Frequenz nicht durch die Grenze, da der Grenzpunkt mit eben dieser Frequenz schwingt. Hat folglich die transmittierte Welle eine niedrigere Geschwindigkeit, ist auch ihre Wellenlänge kleiner ($\lambda = v/f$).

Bei einer zwei- oder dreidimensionalen Welle, wie Wasserwellen, haben wir es mit einer **Wellenfront** zu tun, worunter wir sämtliche Punkte, die den Wellenkamm bilden, verstehen (also das, was wir als Welle bezeichnen). Die Ausbreitungsrichtung der Welle wird durch einen Strahl verdeutlicht (► Abbildungen 10.17 und 10.18), der senkrecht auf der Wellenfront steht. Beachten Sie, dass in Abbildung 10.17b die Wellenfronten in großer Entfernung von ihrer Quelle nahezu ihre gesamte Krümmung verloren haben und fast gerade sind, wie das bei Meereswellen oft der Fall ist. Man nennt sie **ebene Wellen**.

Bei der Reflexion einer zwei- oder dreidimensionalen Welle (Abbildung 10.18) ist der Winkel, den die *einfallende Welle* mit der reflektierenden Oberfläche bildet, gleich dem Winkel der reflektierten Welle mit der Oberfläche. Das ist das **Reflexionsgesetz: Der Einfallswinkel ist gleich dem Reflexionswinkel (Ausfallswinkel)**. Der Einfallswinkel ist definiert als der Winkel, den der einfallende Strahl mit dem Lot auf der reflektierenden Oberfläche bildet (oder den die Wellenfront mit einer Oberflächentangente bildet). Der Reflexionswinkel ist der entsprechende Winkel der reflektierten Welle.

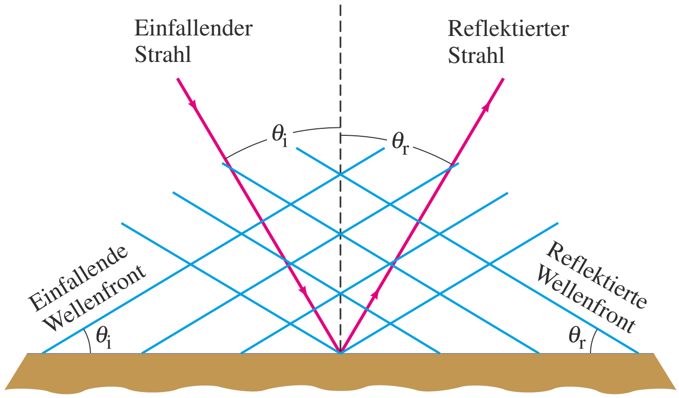


Abbildung 10.18 Das Reflexionsgesetz.

10.7 Interferenz

Interferenz tritt auf, wenn zwei Wellen zum selben Zeitpunkt denselben Raum passieren. Interferenz von Wellen kann mit dem Superpositionsprinzip verstanden werden. Betrachten Sie zum Beispiel die beiden Wellenpakete auf einem Seil, die aufeinander zulaufen (▶ Abbildung 10.19). In Teil (a) haben die beiden Pakete die gleiche Amplitude, doch das eine ist ein Kamm und das andere ein Tal. In Teil (b) sind beide Pakete Kämme. In beiden Fällen treffen sich die Wellen und laufen durcheinander hindurch. Wenn sie jedoch überlappen, ist die resultierende Auslenkung *die algebraische Summe der Einzelauslenkungen* (Superpositionsprinzip). In Abbildung 10.19a sind die Amplituden entgegengerichtet, und das Resultat ist **destruktive (auslöschende) Interferenz**. Dagegen ist in Abbildung 10.19b die resultierende Auslenkung größer als jede der beiden einzelnen Auslenkungen, man spricht dann von **konstruktiver Interferenz**.

Wenn zwei Steine gleichzeitig in einen See geworfen werden, interferieren die beiden Kreiswellen miteinander (▶ Abbildung 10.20). In einigen dadurch erzeugten Bereichen treffen Kämme der einen auf Kämme der anderen (und Täler treffen auf Täler); das ist konstruktive Interferenz, wobei das Wasser mit größerer Amplitude auf- und abschwingt als bei den Ein-

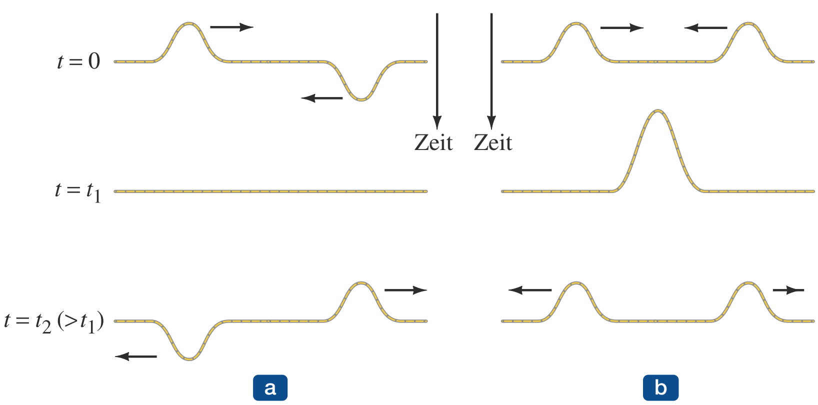


Abbildung 10.19 Zwei Wellenpakete laufen durcheinander hindurch. Wo sie sich treffen, tritt Interferenz auf: (a) destruktiv; (b) konstruktiv.

Abbildung 10.20 Interferenz von Wasserwellen. Konstruktive Interferenz tritt dort auf, wo das Wellenmaximum (Kamm) einer Welle auf das Maximum einer anderen trifft oder wo zwei Wellenminima (Täler) aufeinander treffen. Destruktive Interferenz („flache Wasseroberfläche") ergibt sich dort, wo ein Wellenkamm der einen auf ein Wellenminimum (Tal) der anderen Welle stößt.

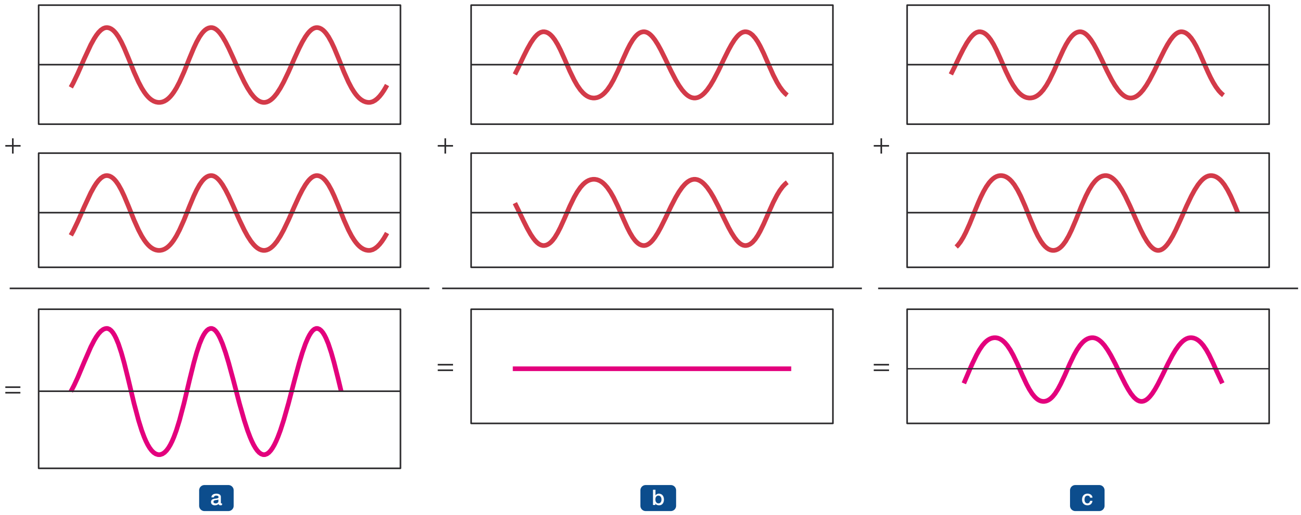


Abbildung 10.21 Zwei Wellen interferieren: (a) konstruktiv; (b) destruktiv; (c) teilweise destruktiv.

zelwellen. In anderen Bereichen tritt destruktive Interferenz auf, wo sich das Wasser dann tatsächlich gar nicht bewegt – dort treffen Wellenkämme und Wellentäler unterschiedlicher Quellen aufeinander. Im ersten Fall (konstruktive Interferenz) sind die beiden Wellen **in Phase**, wohingegen im Fall von destruktiver Interferenz die beiden Wellen **gegenphasig** und um eine halbe Wellenlänge oder 180° verschoben sind. Die relative Phase der beiden Wellen liegt in den meisten Bereichen zwischen diesen beiden Extremen, was teilweise Auslöschung zur Folge hat. Die drei Situationen sind in ► Abbildung 10.21 dargestellt. Dort sind die Amplituden an drei Orten gegen die Zeit aufgetragen.

Interferenz von Schall

Wir wollen nun die Interferenz bei Schallwellen genauer untersuchen. Als einfaches Beispiel betrachten wir zwei große Lautsprecher, A und B, die sich im Abstand *d* voneinander auf der Bühne eines Saales befinden (▶ Abbildung 10.22). Die beiden Lautsprecher senden Schallwellen derselben Frequenz aus, die in Phase miteinander sind: Wenn ein Lautsprecher ein Druckmaximum erzeugt, so auch der andere. (Reflexionen vom Boden und von den Wänden vernachlässigen wir.) Die Kreise in der Zeichnung stehen für die Wellenberge der Schallwellen von beiden Lautsprechern. Natürlich müssen wir uns daran erinnern, dass bei Schallwellen ein Kamm Kompression bedeutet, während in einem Wellental – zwischen zwei Kämmen – Expansion auftritt. Eine Person oder ein Detektor am Punkt C, der denselben Abstand von beiden Lautsprechern hat, wird einen lauten Klang hören, weil die Interferenz konstruktiv ist. An einem Punkt D hingegen wird wenig oder gar nichts zu hören sein wegen der dort auftretenden destruktiven Interferenz – Kompressionen der einen treffen auf Expansionen der anderen Welle und umgekehrt (siehe auch Abbildung 10.20 und die entsprechende Diskussion über Wasserwellen).

Die Analyse dieser Situation wird vielleicht klarer, wenn wir die Wellenformen grafisch wie in ▶ Abbildung 10.23 darstellen. In Abbildung 10.23a sieht man, dass am Punkt C konstruktive Interferenz auftritt, da beide Wellen gleichzeitig Kämme oder gleichzeitig Täler haben. Abbildung 10.23b zeigt uns die Situation für Punkt D. Die Welle aus Lautsprecher B muss einen längeren Weg zurücklegen als die Welle von Lautsprecher A. Somit eilt die Welle aus B derjenigen aus A nach. In der Zeichnung ist der Punkt E so gewählt, dass die Distanz ED gleich der Distanz AD ist. Wir sehen, dass wenn der Abstand BE exakt einer halben Schallwellenlänge entspricht, die Wellen im Punkt D exakt gegenphasig sind und destruktive Interferenz auftritt. Das ist auch das Kriterium für die Bestimmung eines Punktes mit destruktiver Interferenz: Sie ereignet sich an jedem Punkt, dessen Abstand von dem einen Lautsprecher sich um exakt eine halbe Wellenlänge von seinem Abstand zum anderen Lautsprecher unterscheidet. Man beachte, dass wenn der zusätzliche Abstand (BE in Abbildung 10.23b) eine ganze Wellenlänge (oder 2,3,4 … ganze Wellenlängen) beträgt, die beiden Wellen gleichphasig sind und *konstruktive Interferenz* auftritt. Beträgt der Abstand BE 1/2, 11/2, 21/2… Wellenlängen, ergibt sich *destruktive Interferenz*.

Es ist wichtig, sich klarzumachen, dass eine Person an Punkt *D* bei dieser bestimmten Frequenz rein gar nichts hört, obgleich der Schall aus beiden Lautsprechern kommt. Wird einer der beiden Lautsprecher ausgeschaltet, wäre der Schall des anderen klar hörbar.

Wenn ein Lautsprecher ein ganzes Frequenzspektrum abstrahlt, so werden an einem gegebenen Punkt nur ganz bestimmte Frequenzen komplett destruktiv interferieren.

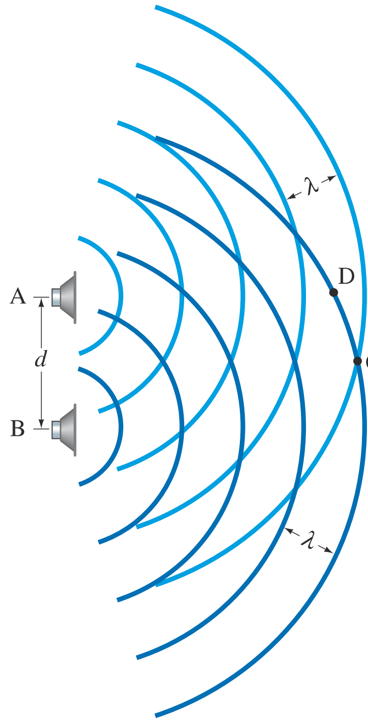


Abbildung 10.22 Schallwellen von zwei Lautsprechern interferieren.

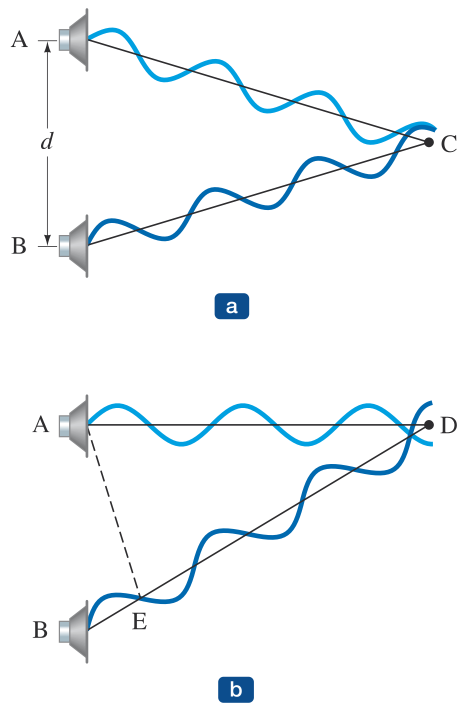


Abbildung 10.23 Die Wellen aus den zwei Lautsprechern A und B (siehe Abbildung 10.22) interferieren konstruktiv im Punkt C und destruktiv im Punkt D.

Beispiel 10.3 **Interferenz bei Lautsprechern**

Zwei Lautsprecher sind 1,0 m voneinander entfernt. Eine Person steht 4,00 m von einem der Lautsprecher entfernt. Wie groß muss ihr Abstand von dem anderen Lautsprecher sein, um destruktive Interferenz zu erhalten, wenn die Lautsprecher gleichphasige Schallwellen mit 1150 Hz abstrahlen?

Lösung

Die Wellenlänge der Schallwellen beträgt

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{343\,\mathrm{m/s}}{1150\,\mathrm{Hz}} = 0{,}30\,\mathrm{m}\,.$$

Damit destruktive Interferenz auftritt, muss sich die Person eine halbe Wellenlänge weiter vom anderen Lautsprecher befinden, also 0,15 m. Der Abstand vom zweiten Lautsprecher beträgt also 4,15 m (oder 3,85 m). Sind die Lautsprecher weniger als 0,15 m entfernt, so gibt es keinen Punkt, der 0,15 m weiter von einem als vom andren Lautsprecher entfernt ist. Es gibt dann keinen Punkt mit destruktiver Interferenz.

Schwebungen – Interferenz in der Zeit

Wir haben die Interferenz von Schallwellen, die sich im Raum ereignet, diskutiert. Ein interessantes und wichtiges Beispiel für zeitliche Interferenz sind **Schwebungen**: Die Frequenzen zweier Schallquellen – etwa zweier Stimmgabeln – liegen eng beieinander, sind jedoch nicht gleich. Die Schallwellen der beiden Quellen interferieren miteinander und der Schallpegel an einem gegebenen Ort steigt und fällt abwechselnd; die regelmäßig über den Raum verteilten Veränderungen der Intensität heißen Schwebungen.

Um zu sehen, wie Schwebungen entstehen, betrachten wir zwei Schallwellen gleicher Amplitude mit Frequenzen $f_1 = 50$ Hz bzw. $f_2 = 60$ Hz. In 1 s macht die erste 50, die zweite 60 Schwingungen. Wir untersuchen nun die Wellen an einem Punkt, der von beiden Schallquellen die gleiche Entfernung hat. Beide Wellenformen sind als Funktion der Zeit in ▸ Abbildung 10.24 dargestellt. Die rote Kurve stellt die 50-Hz-Welle dar, die blaue die 60-Hz-Welle. Die untere Kurve in Abbildung 10.24 steht für die Summe beider Wellenformen. Zum Zeitpunkt $t = 0$ sind beide Wellen in Phase und interferieren konstruktiv. Aufgrund der unterschiedlichen Schwingungszahl driften die beiden Phasen auseinander, und zum Zeitpunkt $t = 0{,}05$ s tritt destruktive Interferenz auf, wie abgebildet. Zum Zeitpunkt $t = 0{,}10$ s sind die Wellen wieder gleichphasig, und die resultierende Amplitude ist wieder groß. Alle 0,1 s wird die Amplitude groß, und zwischen diesen Abständen fällt sie dramatisch. Das Anschwellen und Fallen der Intensität ist das, was man Schwebungen[5] nennt. Im betrachteten Fall treten die Schwebungsmaxima alle 0,1 s

5 Schwebungen sind selbst dann hörbar, wenn die Amplitudendifferenz etwas größer als null ist.

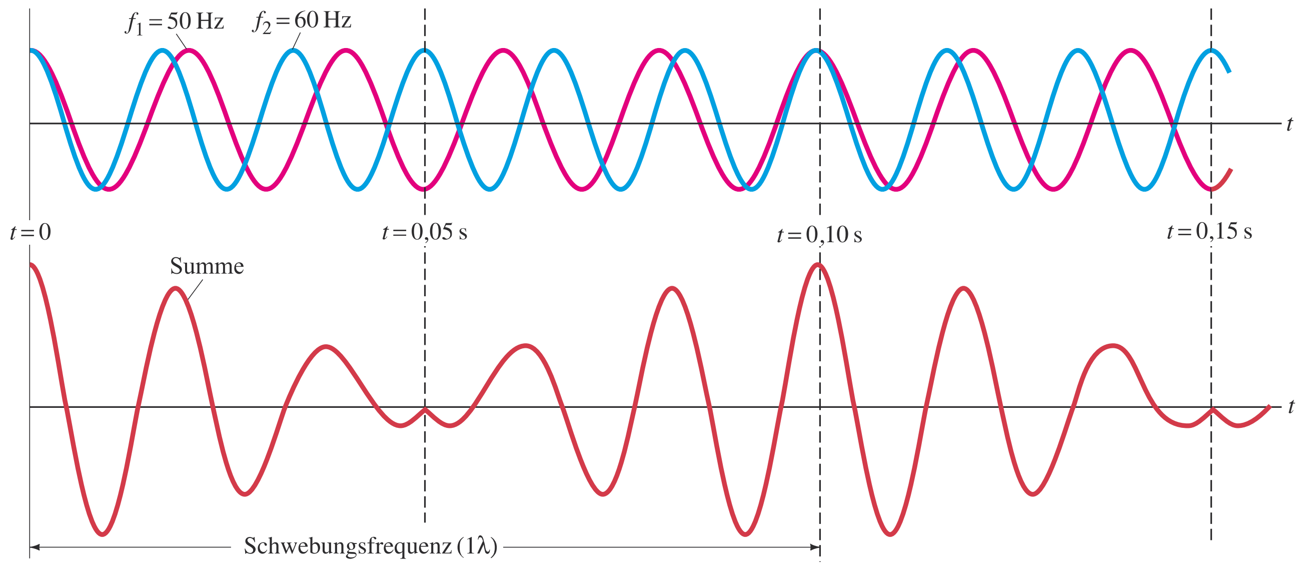


Abbildung 10.24 Schwebungen treten als Resultat der Überlagerung von zwei Schallwellen mit kleinem Frequenzunterschied auf.

auf. Die **Schwebungsfrequenz** beträgt mithin 10 Hz. Das Resultat, dass die Schwebungsfrequenz gleich der Differenz der beiden Einzelfrequenzen ist, kann wie folgt verallgemeinert werden.

Schwebungsfrequenz = Differenz der beiden Einzelfrequenzen

Die beiden Wellen der Frequenzen f_1 und f_2 werden an einem bestimmten Punkt im Raum dargestellt durch

$$D_1 = D_M \sin 2\pi f_1 t$$

und

$$D_2 = D_M \sin 2\pi f_2 t\ .$$

Nach dem Superpositionsprinzip ergibt sich für die resultierende Auslenkung

$$D = D_1 + D_2 = D_M(\sin 2\pi f_1 t + \sin 2\pi f_2 t)\ .$$

Mit der Identität $\sin A + \sin B = 2 \sin 1/2(A + B) \cos 1/2(A - B)$ erhalten wir

$$D = \left[2D_M \cos 2\pi \left(\frac{f_1 - f_2}{2}\right) t\right] \sin 2\pi \left(\frac{f_1 + f_2}{2}\right) t\ . \qquad (10.10)$$

Wir können Gleichung 10.10 wie folgt interpretieren. Die Superposition der beiden Wellen ergibt eine Welle, die mit der mittleren Frequenz $(f_1 + f_2)/2$ der beiden Komponentenwellen schwingt. Diese Schwingung hat eine Amplitude, die durch den Ausdruck in eckigen Klammern gegeben ist. Die Amplitude variiert in der Zeit von null bis zum Maximum $2D_M$ (die Summe der Einzelamplituden) mit einer Frequenz $(f_1 - f_2)/2$. Ein Schwebungsmaximum tritt auf, wann immer $\cos 2\pi[(f_1 - f_2)]t$ gleich $+1$ oder -1 wird (siehe Abbildung 10.24). Das heißt, pro Zyklus gibt es zwei Schwebungsmaxima und somit beträgt die Schwebungsfrequenz zweimal $(f_1 - f_2)/2$, was gerade $f_1 - f_2$ ergibt, die Differenz der Frequenzen der Einzelwellen.

ANGEWANDTE PHYSIK

Klavierstimmen

Beispiel 10.4 Schwebungen

Eine Stimmgabel erzeugt einen stetigen 400-Hz-Ton. Wird diese Stimmgabel angeschlagen und in die Nähe einer schwingenden Gitarrensaite gebracht, werden 20 Schwebungen in fünf Sekunden gezählt. Welche möglichen Frequenzen erzeugt die Gitarrensaite?

Lösung

Die Schwebungsfrequenz beträgt

$$\begin{aligned} f_{\text{Schwebung}} &= 20\,\text{Schwingungen}/5\,\text{s} \\ &= 4\,\text{Hz}\,. \end{aligned}$$

Das ist die Frequenzdifferenz der beiden Wellen, und da die eine Welle 400 Hz hat, muss die andere 404 Hz oder 396 Hz haben.

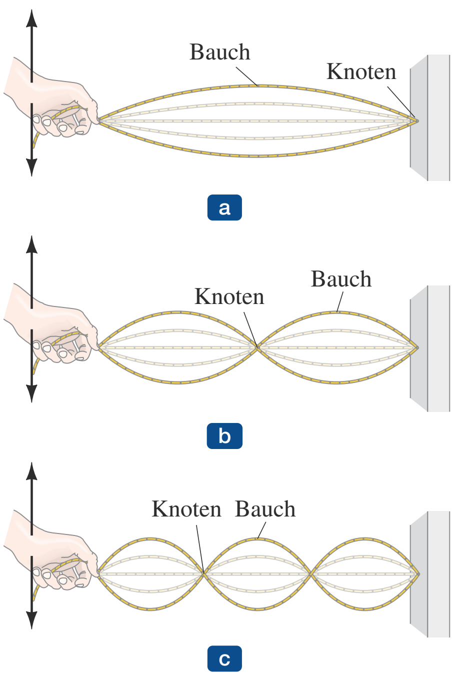


Abbildung 10.25 Stehende Wellen dreier Resonanzfrequenzen.

Das Schwebungsphänomen kann bei allen Wellenarten auftreten und ist eine sehr genaue Methode, um Frequenzen zu vergleichen. Ein Klavierstimmer beispielsweise achtet auf die Schwebungen, die sich zwischen seiner Standardstimmgabel und einer bestimmten Saite einstellen. Verschwinden sie, weiß er, dass das Klavier gestimmt ist. Die Mitglieder eines Orchesters stimmen ihre Instrumente, indem sie auf die Schwebungen zwischen ihren Instrumenten und dem Standardton (gewöhnlich das A über dem mittleren C bei 440 Hz) eines Klaviers oder einer Oboe achten.

10.8 Stehende Wellen; Resonanz

Wenn Sie ein Seilende bewegen, während das andere Ende fixiert ist, so läuft eine Welle das Seil entlang und wird am fixierten Ende invertiert reflektiert (Abbildung 10.15a). Fahren Sie fort, das Seil zu bewegen, wandern in beiden Richtungen Wellen, die miteinander interferieren. Gewöhnlich ist das ein ziemliches Durcheinander. Wenn Sie jedoch das Seilende mit einer bestimmten Frequenz bewegen, interferieren die beiden Wellen so miteinander, dass eine **stehende Welle** großer Amplitude entsteht (▸ Abbildung 10.25). Sie heißt deswegen stehende Welle, weil sie sich nicht zu bewegen scheint. Das Seil hat Abschnitte, die in festen Mustern auf- und abschwingen. Die Punkte destruktiver Interferenz, an denen das Seil stets still zu stehen scheint, heißen **Wellenknoten**. Punkte konstruktiver Interferenz, an denen das Seil mit maximaler Amplitude schwingt, heißen **Wellenbäuche**. Bei gegebener Frequenz verbleiben die Knoten und Bäuche fest in ihren Positionen.

Stehende Wellen können bei unterschiedlichen Frequenzen auftreten. Die niedrigste Frequenz, bei der eine stehende Welle auftritt, erzeugt ein Wellenmuster wie in Abbildung 10.25a dargestellt. Die stehenden Wellen in den Teilen (b) und (c) werden bei exakt der doppelten respektive dreifachen Frequenz der niedrigsten Frequenz erzeugt, vorausgesetzt die Seilspannung bleibt gleich. Das Seil kann auch ebenso gut vier Bäuche bei einer viermal so großen Frequenz haben usw. …

Die Frequenzen, die stehende Wellen erzeugen, heißen **Eigen-** oder **Resonanzfrequenzen** des Seils. Die unterschiedlichen Wellenmuster in Abbildung 10.25 sind verschiedene **Eigenzustände**. Obgleich eine stehende Welle auf einem Seil das Resultat der Interferenz zweier gegenläufiger Wellen ist, ist sie auch ein in Resonanz schwingendes System. Stehende Wellen stellen damit das gleiche Phänomen dar wie die Resonanz eines Federpendels oder eines Fadenpendels, was wir in Kapitel 9 diskutiert haben. Der wesentliche Unterschied jedoch ist, dass ein Federpendel oder ein Fadenpendel nur eine Resonanzfrequenz hat, wohingegen das Seil eine unbegrenzte Anzahl Resonanzfrequenzen besitzt, von denen jede ein ganzzahliges Vielfaches der Grundfrequenz ist.

Wir wollen nun ein Seil betrachten, das an beiden Enden eingespannt ist, wie eine Gitarren- oder Violinsaite (▸ Abbildung 10.26a). Unterschiedliche Wellen wandern in beiden Richtungen, werden an den Enden reflektiert, um dann in die andere Richtung zu laufen. Die meisten dieser Wellen interferieren nach einem Zufallsmuster mit den anderen und löschen sich gegenseitig aus. Doch die Wellen, die den Resonanzfrequenzen der Saite entsprechen, schwingen weiter. Die Saitenenden sind eingespannt, somit sind sie Knoten. Allerdings gibt es bei den höheren Resonanzen noch weitere Knoten. Einige der möglichen Resonanzzustände (stehende Wellen) sind in Abbildung 10.26b gezeigt. Allgemein ist das Wellenmuster eine Kombination dieser unterschiedlichen Resonanzfrequenzen. Nur solche Frequenzen, die einer Resonanzfrequenz entsprechen, sind vorhanden.

Um die Resonanzfrequenzen zu bestimmen, bemerken wir zunächst, dass die Wellenlänge einer stehenden Welle in einfacher Beziehung zur Saitenlänge L steht. Die niedrigste Frequenz, genannt die **Grundfrequenz**, korrespondiert mit einem Wellenbauch. Und wie man in Abbildung 10.26b sehen kann, entspricht die Gesamtlänge einer halben Wellenlänge. Somit ist $L = \frac{1}{2}\lambda_1$, wobei λ_1 die Wellenlänge der Grundfrequenz ist. Die anderen Resonanzfrequenzen heißen **Oberwellen**. Sind sie ganzzahlige Vielfache der Grundfrequenz (wie das bei einer einfachen Saite der Fall ist), nennt man sie auch **harmonisch**, wobei man sich auf die Grundfrequenz häufig als die Erste Harmonische bezieht. Der nächste Zustand nach der Grundschwingung hat zwei Bäuche und wird die **Zweite Harmonische** (oder die erste Oberwelle) genannt. Die Saitenlänge L entspricht bei der Zweiten Harmonischen der gesamten Wellenlänge: $L = \lambda_2$. Für die Dritte und Vierte Harmonische gilt $L = \frac{3}{2}\lambda_3$ respektive $L = 2\lambda_4$ und so weiter. Ganz allgemein können wir schreiben:

$$L = \frac{n\lambda_n}{2}\,, \quad n = 1, 2, 3\ldots\,.$$

Die ganze Zahl n nummeriert die Harmonischen durch: $n = 1$ für die Grundfrequenz, $n = 2$ für die Zweite Harmonische und so weiter. Wir lösen nach λ_n auf und finden:

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}, \; n = 1, 2, 3\ldots\,. \tag{10.11}$$

Um die Frequenz f jeder Schwingung zu finden, nutzen wir Gleichung 10.1, $f = v/\lambda$, und sehen, dass

$$f_n = \frac{v}{\lambda_n} = \frac{nv}{2L} = nf_1\,,$$

worin $f_1 = v/\lambda_1 = v/2L$ die Grundfrequenz ist. Wir sehen daher, dass jede Resonanzfrequenz ein ganzzahliges Vielfaches der Grundfrequenz ist.

Weil eine stehende Welle als Überlagerung zweier entgegengesetzt laufender Wellen aufgefasst werden kann, sprechen wir immer noch von der Ausbreitungsgeschwindigkeit.

Eine stehende Welle scheint an einem Ort stehen zu bleiben (und laufende Wellen scheinen sich zu bewegen). Der Ausdruck „stehende“ Welle ist auch energetisch betrachtet sinnvoll. Da die Saite an den Knoten im Ruhezustand ist, wird an diesen Punkten keine Energie transportiert. Folglich wird keine Energie entlang der Saite transportiert, sondern sie liegt in jedem Punkt der Saite zeitlich konstant vor.

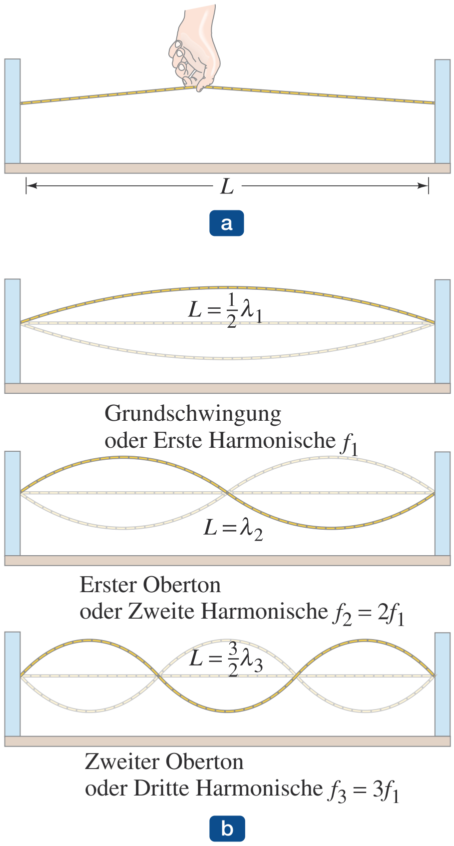


Abbildung 10.26 (a) Eine Saite wird gezupft. (b) Nur stehende Wellen, die mit den Resonanzfrequenzen korrespondieren, schwingen länger.

Tabelle 10.2

Tonleiter[a]

Ton	Frequenz (Hz)
C	262
Cis oder Des	277
D	294
Dis oder Es	311
E	330
F	349
Fis oder Ges	370
G	392
Gis oder As	415
A	440
Ais oder B	466
H	494
C′	524

[a] nur eine Oktave

Schwingende Saiten und Luftsäulen

Die Quelle jeglichen Schalls ist ein schwingender Körper. Nahezu jeder Körper kann schwingen und somit eine Schallquelle sein. Wir diskutieren nun einige einfache Schallquellen, insbesondere Musikinstrumente. In Musikinstrumenten wird die Quelle durch Schlagen, Zupfen, Streichen oder Blasen in Schwingung versetzt. Stehende Wellen werden erzeugt, und die Quelle schwingt bei ihren Resonanzfrequenzen (Grundschwingung, Harmonische). Die schwingende Quelle ist in Kontakt mit der Luft (oder einem anderen Medium) und übt einen Druck auf sie aus, woraufhin sich die Schallwellen ausbreiten. Ihre Frequenzen sind gleich derjenigen der Quelle, doch die Geschwindigkeit und die Wellenlängen können unterschiedlich sein. Eine Trommel ist mit einer Membran bespannt. Xylophone etwa haben Plättchen aus Holz, Vibraphone solche aus Metall, die in Schwingung versetzt werden können. Glockenspiele, Zimbeln und Gongs nutzen ebenfalls schwingendes Metall. Die am weitesten verbreiteten Instrumente nutzen schwingende Saiten, wie Violine, Gitarre und Klavier, oder schwingende Luftsäulen wie Flöte, Trompete und Orgelpfeifen. Wir haben bereits gesehen, dass die Tonhöhe eines reinen Klangs durch die Frequenz bestimmt wird. Typische Frequenzen für Töne der Tonleiter sind in Tabelle 10.2 für die mit dem mittleren C beginnende Oktave angegeben. Beachten Sie, dass eine Oktave mit einer Verdopplung der Frequenz korrespondiert. Beispielsweise hat das mittlere C eine Frequenz von 262 Hz, wohingegen C′ (C über dem mittleren C) mit 524 Hz die doppelte Frequenz hat.

Saiteninstrumente

Die Ausbildung von stehenden Wellen auf einer Saite (▶ Abbildung 10.27) ist die Grundlage aller Saiteninstrumente. Die Tonhöhe ist normalerweise bestimmt durch die niedrigste Resonanzfrequenz, die **Grundfrequenz**, die mit den ausschließlich an den Saitenenden auftretenden Knoten korrespondiert. Die Wellenlänge der Grundfrequenz ist gleich der zweifachen Saitenlänge. Damit gilt für die Grundfrequenz $F = v/\lambda = v/2L$, worin v die Geschwindigkeit der Welle auf der Saite ist. Wird ein Finger auf die Saite einer Violine oder Gitarre aufgesetzt, wird die effektive Länge gekürzt. Damit ist die Grundfrequenz und die Tonhöhe höher, da die Wellenlänge kürzer ist (▶ Abbildung 10.28). Die Saiten einer Gitarre oder Violine haben alle dieselbe Länge. Sie klingen mit unterschiedlicher Tonhöhe, weil die Saiten unterschiedliche Massen pro Längeneinheit haben, was sich auf die Geschwindigkeit auswirkt. Die Geschwindigkeit auf einer schweren Saite ist geringer, dadurch ist die Frequenz bei gleicher Wellenlänge niedriger. Außerdem kann sich die Zugspannung unterscheiden; durch Einstellen der Zugspannung wird ein Instrument gestimmt (▶ Abbildung 10.29). In einem Flügel oder einem Klavier und bei Harfen haben sämtliche Saiten eine unterschiedliche Länge. Bei den niedrigen Tönen sind die Saiten nicht nur länger, sondern auch schwerer.

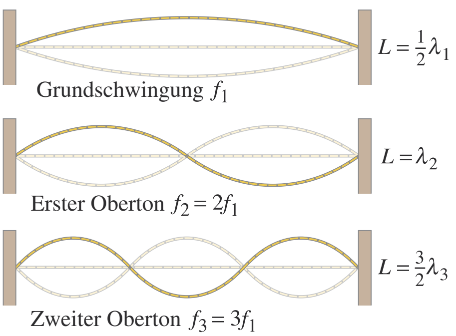


Abbildung 10.27 Stehende Welle auf einer Saite – nur die niedrigsten Frequenzen sind angezeigt.

Beispiel 10.5 **Frequenzen und Wellenlängen einer Violine**

Eine 0,32 m lange Violinsaite wird auf den Ton A über dem mittleren C mit 440 Hz gestimmt. (a) Wie groß ist die Wellenlänge der Grundfrequenz? (b) Wie groß sind Frequenz und Wellenlänge der erzeugten Töne? (c) Warum gibt es da einen Unterschied?

Lösung

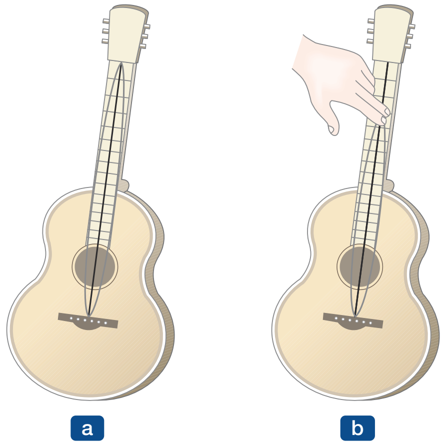
a Abbildung 10.26 entnehmen wir, dass die Wellenlänge der Grundfrequenz $\lambda = 2L = 0{,}64\,\text{m} = 64\,\text{cm}$ ist. Das ist die Wellenlänge der auf der Saite stehenden Welle.

b Die Schallwelle, die sich durch die Luft ausbreitet und in unser Ohr gelangt, hat dieselbe Frequenz, nämlich 440 Hz (warum?). Ihre Wellenlänge ist

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{343\,\text{m/s}}{440\,\text{Hz}} = 0{,}78\,\text{m} = 78\,\text{cm}\,,$$

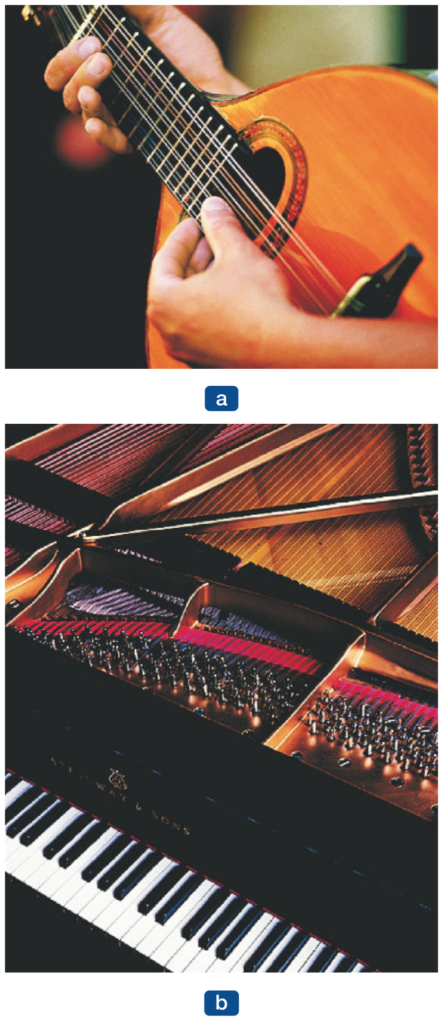
worin v die Geschwindigkeit des Schalls in der Luft (bei 20 °C) ist, siehe Tabelle 10.1.

c Die Wellenlänge der Schallwelle unterscheidet sich von derjenigen der auf der Saite stehenden Welle, weil die Schallgeschwindigkeit in der Luft (343 m/s bei 20 °C) anders ist als die Geschwindigkeit der Welle auf der Saite ($= f\lambda = 440\,\text{Hz} \cdot 0{,}64\,\text{m} = 282\,\text{m/s}$), was natürlich von der Zugspannung der Saite und ihrer Masse pro Längeneinheit abhängt.



a b

Abbildung 10.28 Die Wellenlänge einer mit dem Finger abgegriffenen Saite (b) ist kürzer als die Leersaite (a). Somit ist die Frequenz der abgegriffenen Saite höher.



a b

Abbildung 10.29 (a) Klangkörper einer Laute; (b) Resonanzkörper (in dem die Saiten gespannt werden) eines Flügels.

Saiteninstrumente würden nicht sehr laut erklingen, wenn sie sich nur auf die schwingenden Saiten für die Lauterzeugung verließen, da die Saiten schlicht zu dünn sind, um ausreichend viel Luft zu komprimieren und zu expandieren. Saiteninstrumente machen daher Gebrauch von einer Art mechanischem Verstärker, bekannt als Klang- oder Resonanzkörper. Dieser verstärkt den Schall, indem er eine größere Oberfläche in Kontakt mit der Luft bringt (Abbildung 10.28). Wenn die Saiten in Schwingung versetzt werden, wird auch der Klangkörper in Schwingung versetzt. Da er eine viel größere Kontaktfläche mit der Luft hat, kann er eine intensivere Schallwelle erzeugen. Bei einer elektrischen Gitarre ist der Klangkörper nicht so wichtig, da die Saitenschwingungen elektrisch verstärkt werden.

Blasinstrumente

Holz- und Blechblasinstrumente sowie die Pfeifen einer Orgel erklingen durch die Schwingungen stehender Wellen einer Luftsäule im Klangrohr oder der Pfeife. Stehende Wellen in der Luft können in jedem Hohlraum entstehen, doch sind die Frequenzen außer bei sehr einfachen Formen (wie etwa ein langer, schmaler Hohlraum) kompliziert. In einigen Instrumenten hilft ein Rohrblatt oder die vibrierende Lippe des Musikers beim Aufbau der Schwingung in der Luftsäule. In anderen wird ein Luftstrom direkt über die Öffnung

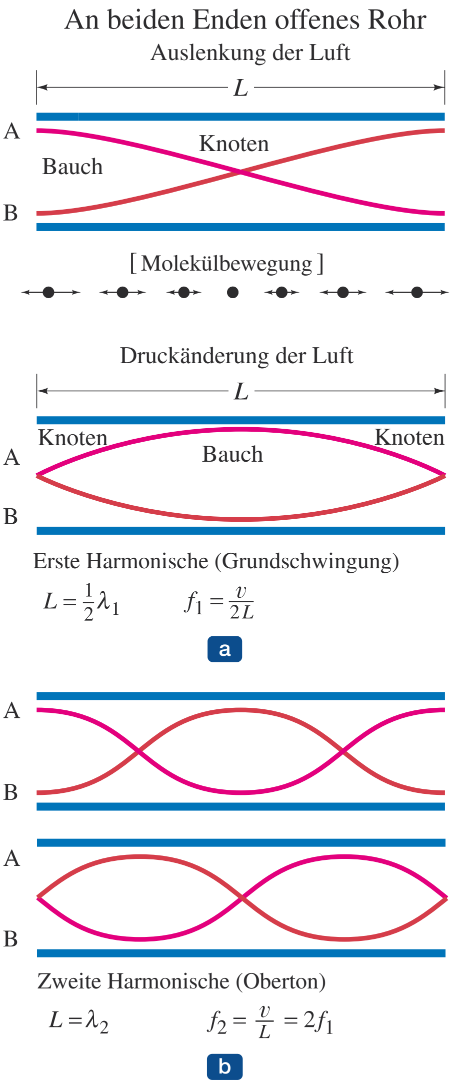


Abbildung 10.30 Schwingungszustände (stehende Wellen) in einem Rohr, das an beiden Enden offen ist. Teilbild (a) zeigt die Grundschwingung. Oben ist die Auslenkung der Luftmoleküle dargestellt; wie schematisch angedeutet ist, stehen im Schwingungsknoten die Luftmoleküle still, im Schwingungsbauch ist ihre Bewegung entlang der Rohrrichtung maximal. Darunter ist die Grundschwingung als Druckschwankung dargestellt. Man erkennt, dass ein Druckbauch einem Bewegungsknoten und ein Druckknoten einem Bewegungsbauch entspricht. Teilbild (b) zeigt die Zweite Harmonische, im oberen Teil wieder als Auslenkung der Luft, darunter als Druckschwankung. Die Kurven innerhalb des Rohres sind mit A und B bezeichnet, wobei B die Wellenform jeweils eine halbe Periode nach der durch A markierten Wellenform darstellt.

oder das Mundstück geleitet, was zu Turbulenzen führt, die schließlich die Luftsäulen-Schwingungen hervorrufen. Wegen der Störung, von welcher Quelle auch immer, schwingt die Luftsäule im Hohlraum mit einer Vielzahl von Frequenzen; doch nur solche Frequenzen, die mit stehenden Wellen korrespondieren, bleiben erhalten.

Bei einer Saite, die an beiden Enden befestigt ist (Abbildung 10.27), haben die stehenden Wellen Knoten (keine Bewegung) an beiden Enden, und einen oder mehrere Bäuche (große Schwingungsamplitude) dazwischen. Ein Knoten separiert folgende Bäuche. Die stehende Welle mit der niedrigsten Frequenz, die Grundfrequenz, korrespondiert mit einem einzelnen Bauch. Die höherfrequenten stehenden Wellen heißen **Obertöne** oder **Harmonische**. Insbesondere heißt die Erste Harmonische Grundschwingung. Die Zweite Harmonische hat die doppelte Frequenz der Grundschwingung[6] und so weiter.

Die Situation ist für eine Luftsäule ähnlich, doch müssen wir daran denken, dass in diesem Fall die Luft selbst schwingt. Wir können die Wellen entweder mit der Luftbewegung – das heißt mittels der Auslenkung – oder mit den Druckschwankungen der Luft (siehe ▸ Abbildung 10.30) beschreiben. Im ersten Fall, bei der Auslenkung, ist die Luft am geschlossenen Ende des Hohlraums ein Knoten, da sich die Luft dort nicht bewegen kann, während am offenen Ende des Hohlraums ein Bauch ist, weil sich die Luft dort frei bewegen kann. Die Luft innerhalb des Rohres schwingt in der Form einer stehenden Longitudinalwelle. Die möglichen Schwingungszustände eines an beiden Enden offenen Rohrs sind in Abbildung 10.30 grafisch dargestellt (offener Hohlraum). Dagegen zeigt ▸ Abbildung 10.31 die Schwingungszustände eines Rohrs, das an einer Seite offen, an der anderen geschlossen ist (geschlossener Hohlraum). (Ein an beiden Enden geschlossenes Rohr, das keine Verbindung mit der äußeren Luft hat, wäre als Musikinstrument sinnlos.) Die jeweils oberen Teilabbildungen in Abbildung 10.30 stellen die Amplitude der Auslenkung der im Hohlraum schwingenden Luft dar. Verdeutlichen Sie sich, dass es Graphen sind, und dass die Luftmoleküle selber horizontal schwingen, parallel zur Rohrlänge, wie das durch die kleinen Pfeile unter dem oberen Teildiagramm in Abbildung 10.30 angedeutet wird. Die genaue Position des Bauchs in der Nähe des offenen Endes des Rohrs hängt von dessen Durchmesser ab. Ist dieser klein verglichen mit der Länge des Rohrs, was gewöhnlich der Fall ist, so liegt der Bauch, wie gezeigt, sehr nah am Ende. Wir setzen das in den folgenden Betrachtungen voraus. (Die Position des Bauchs kann auch leicht von der Wellenlänge und anderen Faktoren abhängig sein).

Wir wollen uns nun detailliert das offene Rohr aus Abbildung 10.30a, das eine Flöte sein könnte, ansehen. Ein offenes Rohr hat an beiden Enden Bäuche der Auslenkung, da sich die Luft dort frei bewegen kann. Man beachte, dass es mindestens einen Knoten in einem offenen Rohr geben muss, wenn es eine stehende Welle geben soll. Ein einzelner Knoten korrespondiert mit

6 Resonanzfrequenzen oberhalb der Grundschwingung (das sind die Obertöne) sind ganzzahlige Vielfache der Grundschwingung, man nennt sie Harmonische. Sind jedoch die Obertöne keine ganzzahligen Vielfache der Grundschwingung, wie das beispielsweise bei einer vibrierenden Trommelbespannung der Fall ist, so handelt es sich nicht um Harmonische.

der Grundschwingung des Rohrs. Da der Abstand zwischen zwei aufeinanderfolgenden Knoten, oder zwischen zwei aufeinanderfolgenden Bäuchen, $\lambda/2$ ist, gibt es im einfachsten Fall der Grundschwingung eine halbe Wellenlänge in der Rohrlänge (oberes Diagramm in Abbildung 10.30a): $L = 1/2\lambda$ oder $\lambda = 2L$. Somit ist die Grundschwingung $f_1 = v/\lambda = v/2L$, worin v die Schallgeschwindigkeit in der Luft ist. Die stehende Welle mit zwei Knoten ist der *erste Oberton* oder die *Zweite Harmonische*. Sie hat die halbe Wellenlänge ($L = \lambda$) und die doppelte Frequenz. In der Tat ist die Frequenz jedes Obertons ein ganzzahliges Vielfaches der Grundschwingung, wie in Abbildung 10.30a gezeigt – dasselbe Ergebnis also wie bei einer Saite.

Bei einem geschlossenen Rohr wie in Abbildung 10.31 gezeigt, das eine Klarinette sein könnte, gibt es stets einen Knoten der Auslenkung am geschlossenen Ende (wo sich die Luft nicht frei bewegen kann). Da der Abstand zwischen einem Knoten und dem nächsten Bauch $\lambda/4$ ist, folgt, dass die Grundschwingung in einem geschlossenem Rohr mit nur einem Viertel einer Wellenlänge in der Rohrlänge korrespondiert: $L = \lambda/4$ und $\lambda = 4L$. Die Grundschwingung ist somit $f_1 = v/4L$, oder die Hälfte derjenigen aus einem offenen Rohr wie einer Orgelpfeife. Es gibt noch einen weiteren Unterschied, denn wie wir aus Abbildung 10.31a ersehen, sind nur die ungeradzahligen Harmonischen in einer geschlossenen Hohlraumanordnung vorhanden: Die Obertöne haben Frequenzen mit dem Drei-, Fünf-, Siebenfachen … der Grundschwingung. Es gibt keine Möglichkeit für die Existenz von Frequenzen mit dem Zwei-, Vier-, Sechsfachen … der Grundschwingung mit einem Knoten an einem und einem Bauch am anderen Ende. Diese können wegen der Asymmetrie des Rohres – ein Ende geschlossen, das andere offen – nicht auftreten.

Wenn Ihnen diese Beschreibung, die von der Auslenkung ausgeht, zu schwer verständlich ist und Sie das Problem von einem anderen Standpunkt betrachten wollen, dann schauen Sie sich die Beschreibung an, die vom *Druck* in der Luft ausgeht, wie in Abbildung 10.30b und Abbildung 10.31b (jeweils unten) dargestellt. Dort, wo die Luft in der Welle komprimiert ist, ist der Druck höher, während in der expandierten (oder verdünnten) Welle der Druck unter dem Umgebungsdruck liegt. Das offene Ende eines Klangrohrs ist der Atmosphäre gegenüber geöffnet. Folglich muss die Druckänderung hier ein Knoten sein: Der Druck verändert sich hier nicht, sondern bleibt gleich dem Umgebungsdruck. Hat ein Klangrohr ein geschlossenes Ende, kann der Druck am geschlossenen Ende leicht alternieren zwischen Werten oberhalb und unterhalb des Umgebungsdrucks. Folglich gibt es einen Druck-Bauch am geschlossenen Ende. Natürlich kann es Knoten und Bäuche des Drucks auch innerhalb des Klangrohrs geben. Einige mögliche Schwingungszustände des Drucks sind in Abbildung 10.30b (offenes Klangrohr) und Abbildung 10.31b (geschlossenes Klangrohr) dargestellt.

Kirchenorgeln (► Abbildung 10.32) machen sowohl von offenen als auch von geschlossenen Pfeifen Gebrauch. Unterschiedliche Tonhöhen werden von unterschiedlichen Pfeifen mit Längen von wenigen Zentimetern bis hin zu 5 m und länger erzeugt. Andere Musikinstrumente erzeugen Töne entweder als offenes oder als geschlossenes Klangrohr. Beispielsweise ist eine Flöte ein offenes Rohr, da sie nicht nur am Mundstück, sondern auch am andern Ende offen ist. Die unterschiedlichen Töne einer Flöte und vieler anderer

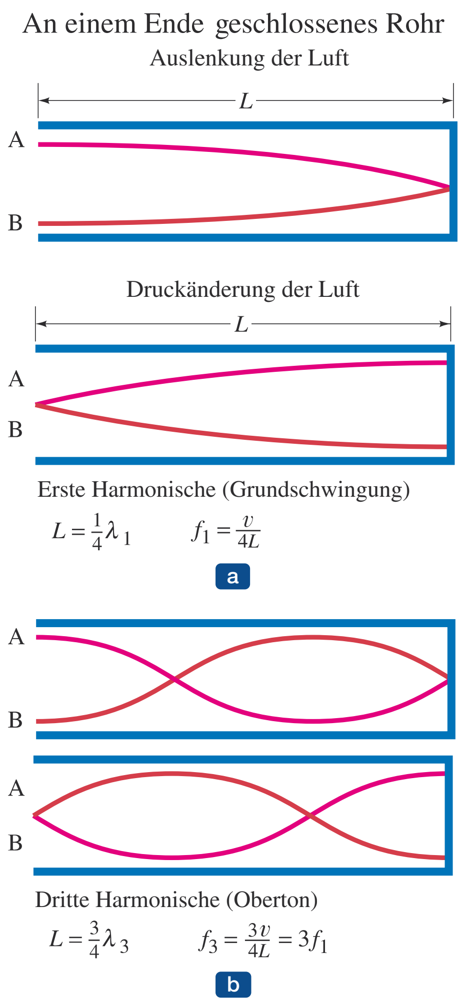


Abbildung 10.31 Schwingungszustände (stehende Wellen) eines einseitig geschlossenen Rohrs. Siehe Erklärung zu Abbildung 10.30.

Abbildung 10.32 Die Pfeifen der historischen Sauer-Orgel in der Thomaskirche zu Leipzig, der Wirkungsstätte von Johann Sebastian Bach.

Instrumente werden durch Verkürzung und Verlängerung des Klangrohrs erzeugt – das heißt, durch Abdecken oder Freimachen von Löchern entlang der Rohrlänge. Bei einer Trompete werden Ventile herabgedrückt, um zusätzliche Längen des Klangrohrs verfügbar zu machen. In all diesen Instrumenten ist die Frequenz des Tons umso niedriger, je länger die Luftsäule ist.

Beispiel 10.6 **Offene und geschlossene Orgelpfeifen**

Wie groß sind die Grundschwingung und die ersten drei Obertöne einer 26 cm langen Orgelpfeife bei 20 °C, wenn sie (a) offen und (b) geschlossen ist?

Lösung

Bei 20 °C beträgt die Schallgeschwindigkeit in der Luft 343 m/s (Tabelle 10.1, S. 264).

a Für die offene Pfeife (Abbildung 10.30) ist die Grundschwingung gegeben durch

$$f_1 = \frac{v}{2L} = \frac{343\ \mathrm{m/s}}{2 \cdot 0{,}26\ \mathrm{m}} = 660\ \mathrm{Hz}\,.$$

Die Obertöne, die alle Harmonische einschließen, sind 1320 Hz, 1980 Hz, 2640 Hz usw.

b Bei einer geschlossenen Orgelpfeife (Abbildung 10.31) erhalten wir

$$f_1 = \frac{v}{4L} = \frac{343\ \mathrm{m/s}}{4 \cdot 0{,}26\ \mathrm{m}} = 330\ \mathrm{Hz}\,.$$

Doch nur die ungeradzahligen Harmonischen werden auftreten, somit sind die ersten drei Obertöne 990 Hz, 1650 Hz und 2310 Hz. Die geschlossene Pfeife erzeugt 330 Hz, dies ist der Ton E über dem mittleren C, während die offene Pfeife derselben Länge 660 Hz erzeugt, also eine Oktave höher liegt.

Stehende Wellen werden nicht nur von Saiten erzeugt, sondern von jedem Körper, der in Schwingung versetzt wird. Selbst wenn ein Felsen oder ein Holzstock einen Schlag mit einem Hammer bekommt, werden stehende Wellen, die mit der Resonanzfrequenz des Körpers korrespondieren, erzeugt. Allgemein hängen Resonanzfrequenzen von den Ausmaßen des Körpers ab, so wie bei einer Saite von ihrer Länge. Beispielsweise hat ein kleiner Körper keine so niedrige Resonanzfrequenz wie ein großer Körper. Der Klang jedes Musikinstruments hängt von den stehenden Wellen ab, die das Instrument erzeugt, ob das nun Saiten- oder Blasinstrumente sind (in denen eine Luftsäule als stehende Welle schwingt), Trommeln oder andere Perkussionsinstrumente.

Beispiel 10.7 · Begriffsbildung **Frequenzen von Windgeräuschen**

Wind kann viele Geräusche machen – er kann heulen in Bäumen und stöhnen in Schornsteinen. Warum ist das so? Was verursacht eigentlich diese Geräusche, und welche Frequenzen erwarten Sie dabei?

Lösung

In jedem Fall verursachen Luftströmungen im Wind Schwingungen, die die Geräusche erzeugen. Das Ende eines Baumastes, der mit dem Stamm fest verbunden ist, ist ein Knoten, während das andere Ende sich frei bewegen kann und daher ein Bauch ist. Der Ast hat somit eine Länge von $\lambda/4$ (▶ Abbildung 10.33). Wir schätzen aus Tabelle 10.1 für die Schallgeschwindigkeit in Holz $v \approx 4000\,\mathrm{m/s}$. Nehmen Sie an, dass ein Baumast eine Länge von $L \approx 2\,\mathrm{m}$ hat. Dann wird $\lambda = 4L = 8\,\mathrm{m}$ und $f = v/\lambda = (4000\,\mathrm{m/s})/(8\,\mathrm{m}) \approx 500\,\mathrm{Hz}$.

Wind kann Luftschwingungen in einem Schornstein oder Kamin erzeugen, genau wie in einer Flöte oder Orgelpfeife. Ein Schornstein ist ein langes Rohr von vielleicht 3 m Länge, das sich wie ein offenes oder geschlossenes Klangrohr verhält. Ist es an beiden Enden offen ($\lambda = 2L$), so erhalten wir (mit $v = 340\,\mathrm{m/s}$) $f_1 \approx v/2L \approx 56\,\mathrm{Hz}$. Dies ist ein ziemlich tiefer Ton, kein Wunder also, dass Kamine „stöhnen".

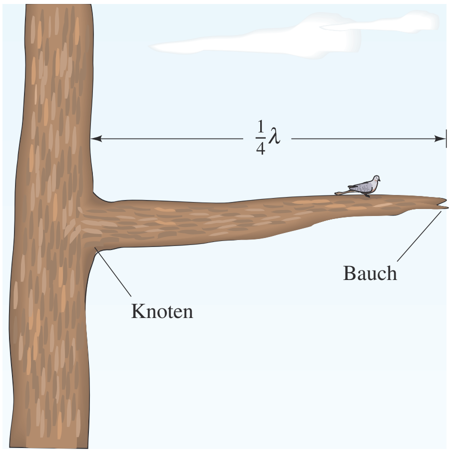


Abbildung 10.33 Beispiel 10.7.

Mathematische Darstellung einer stehenden Welle

In Abschnitt 10.4 haben wir gesehen, wie man eine Gleichung für die Auslenkung D einer eindimensionalen Welle als Funktion des Ortes x und des Zeitpunkts t schreibt. Dasselbe können wir für die stehende Welle einer Saite tun. Wir haben bereits diskutiert, dass eine stehende Welle als Überlagerung zweier entgegengesetzt laufender Wellen betrachtet werden kann. Das lässt sich aufschreiben als (siehe Gleichung 10.7c)

$$D_1(x,t) = D_\mathrm{M} \sin(kx - \omega t)$$
$$D_2(x,t) = D_\mathrm{M} \sin(kx + \omega t)\,,$$

da die Amplituden, Frequenzen und Wellenlängen bei Vernachlässigung von Dämpfung gleich groß sind. Die Überlagerung dieser beiden laufenden Wellen erzeugt eine stehende Welle, die mathematisch ausgedrückt werden kann als

$$D = D_1 + D_2 = D_\mathrm{M}[\sin(kx - \omega t) + \sin(kx + \omega t)]\,.$$

Mit der Beziehung $\sin\theta_1 + \sin\theta_2 = 2\sin\frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2)\cos\frac{1}{2}(\theta_1 - \theta_2)$ können wir das neu aufschreiben als

$$D = 2D_\mathrm{M}\sin kx \cos \omega t\,. \qquad (10.12)$$

Wenn wir $x = 0$ am linken Saitenende setzen, so ist das rechte Saitenende bei $x = L$, wobei L die Saitenlänge ist. Da die Saite an ihren Enden eingespannt ist (Abbildung 10.26), muss $D(x,t)$ bei $x = 0$ und $x = L$ null sein.

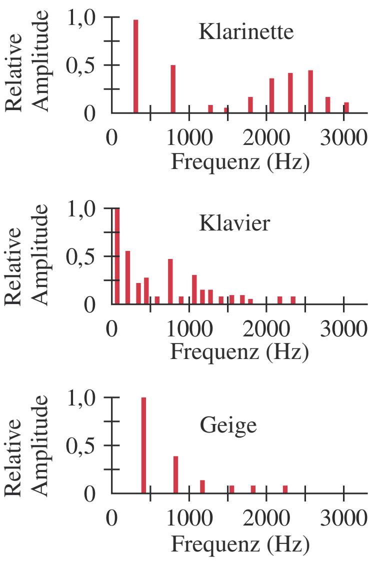


Abbildung 10.34 Frequenzspektren. Die Formen der Spektren ändern sich je nach gespieltem Ton der Instrumente.

Gleichung 10.12 erfüllt bereits die erste Bedingung ($D = 0$ bei $x = 0$). Die zweite Bedingung erfüllt sie, wenn $\sin kL = 0$ wird, das heißt

$$kL = \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots, n\pi, \ldots$$

Darin ist $n =$ ganzzahlig, oder, da $k = 2\pi/\lambda$,

$$\lambda = \frac{2L}{n}. \quad (n = \text{ganzzahlig})$$

Das ist Gleichung 10.11.

Gleichung 10.12 mit der Bedingung $\lambda = 2L/n$ ist die mathematische Darstellung einer stehenden Welle. Wir sehen, dass ein Seilsegment an einer beliebigen Position x in einfacher harmonischer Bewegung ist (wegen des Faktors $\cos \omega t$). Alle Segmente der Saite schwingen mit derselben Frequenz $f = \omega/2\pi$, aber die Amplitude hängt von x ab und gleicht $2D_M \sin kx$. (Vergleichen Sie das mit einer laufenden Welle, bei der alle Teilchen mit derselben Amplitude schwingen.) Die Amplitude hat ein Maximum gleich $2D_M$ für $kx = 2\pi, 3\pi/2, 5\pi/2$ und so fort, also an den Stellen

$$x = \frac{\lambda}{4}, \frac{3\lambda}{4}, \frac{5\lambda}{4}, \ldots$$

Das sind gerade die Positionen der Bäuche (Abbildung 10.26).

10.9 Klangqualität und Geräusche

Wann immer wir Klänge hören, insbesondere Musik, sind wir uns ihrer Lautstärke, ihrer Tonhöhe und noch eines dritten Aspekts bewusst, der „Qualität". Wenn beispielsweise ein Klavier oder eine Flöte einen Ton derselben Lautstärke und Tonhöhe spielt, etwa das mittlere C, so gibt es einen klaren Unterschied im Gesamtklang. Wir würden niemals das C eines Klaviers mit dem C einer Flöte verwechseln. Den Unterschied macht etwas, was als **Klangfarbe** bezeichnet wird.

Wie man Lautstärke und Tonhöhe auf physikalisch messbare Größen beziehen kann, ist auch die Klangfarbe physikalisch zugänglich. Sie hängt von den Obertönen ab – ihrer Anzahl und ihren relativen Amplituden. Wird auf einem Instrument ein Ton gespielt, so besteht der Klang aus der Grundschwingung und den Obertönen. Wir haben in Abbildung 10.13 gesehen, wie die Überlagerung von drei Wellen, in dem Fall die Grundschwingung und die ersten beiden Obertöne (mit ihren jeweiligen Amplituden), zu einer zusammengesetzten Wellenform führte. Natürlich sind normalerweise mehr als zwei Obertöne beteiligt.

Die relativen Amplituden der verschiedenen Obertöne sind spezifisch für jedes Instrument. Genau das verleiht den Instrumenten ihre individuelle Klangfarbe. Eine Grafik, die die relativen Amplituden der von einem Instrument erzeugten Harmonischen darstellt, heißt „Frequenzspektrum". ▶ Abbildung 10.34 zeigt mehrere typische Beispiele für unterschiedliche Instrumente. Normalerweise hat die Grundschwingung die größte Amplitude, und ihre Frequenz bestimmt, was wir als Tonhöhe empfinden, obgleich es auch Musiker gibt, die beispielsweise den ersten Oberton hervorheben können.

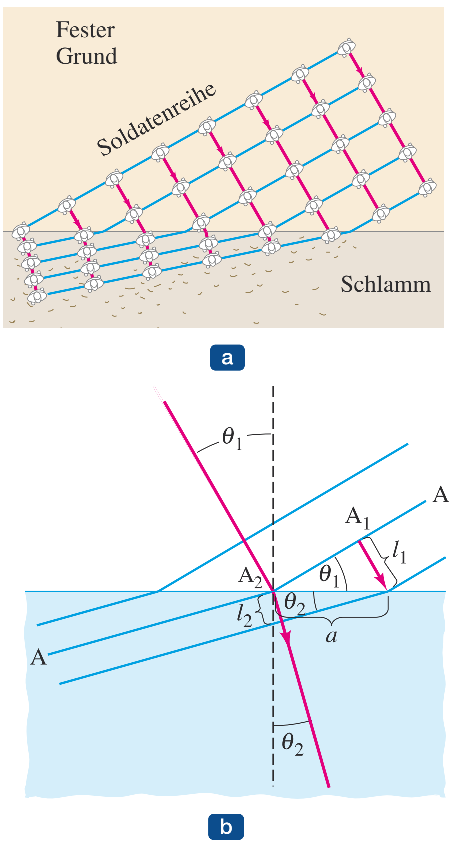


Abbildung 10.35 (a) Soldaten-Analogie, um das Brechungsgesetz (b) für Wellen abzuleiten.

Die Art und Weise, wie ein Instrument gespielt wird, beeinflusst stark die Klangfarbe. Das Zupfen einer Violinsaite erzeugt beispielsweise einen ganz anderen Klang, als wenn man einen Bogen über die Saite streicht. Das Klangspektrum am Beginn (oder Ende) eines Klangs, wie der Hammeranschlag auf eine Klaviersaite, kann sich sehr von dem folgenden, „verebbenden“ Klangbild unterscheiden. Auch das beeinflusst die subjektive Klangwahrnehmung eines Instruments.

Ein gewöhnlicher Klang, wie der, wenn man zwei Steine gegeneinander schlägt, ist ein Geräusch mit einer bestimmten Klangfarbe, doch eine Tonhöhe kann nicht klar erkannt werden. Ein Geräusch wie dieses ist eine Mischung vieler Frequenzen, die wenig miteinander in Beziehung stehen. Das Klangspektrum eines solchen Geräusches würde keine diskreten Linien wie jene aus Abbildung 10.34 aufweisen. Stattdessen hätte es ein kontinuierliches oder nahezu kontinuierliches Frequenzspektrum. Ein solcher Klang heißt daher „Geräusch“ im Vergleich zu harmonischeren Klängen mit Frequenzen, die einfache Vielfache einer Grundschwingung darstellen.

10.10 Brechung[7]

Wenn eine beliebige Wellenform auf eine Grenzfläche trifft, wird ein Teil der Welle reflektiert, und ein weiterer wird durchgelassen oder absorbiert. Durchläuft eine in einem Medium sich ausbreitende zwei- oder dreidimensionale Welle die Grenze zu einem anderen Medium, wo ihre Geschwindigkeit eine andere ist, bewegt sich der durchgelassene Teil in eine andere Richtung als die ursprüngliche Welle (▸ Abbildung 10.35). Man nennt dieses Phänomen **Brechung**. Ein Beispiel ist eine Wasserwelle: Ihre Geschwindigkeit nimmt in flachem Wasser ab, und die Welle bricht (▸ Abbildung 10.36). (Wenn sich die Ausbreitungsgeschwindigkeit wie in Abbildung 10.36 stetig ändert, also ohne eine scharfe Grenze, ändern die Wellen ihre Richtung stetig.) In Abbildung 10.35 ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit in Medium 2 kleiner als in Medium 1. In diesem Fall ändert sich die Ausbreitungsrichtung zum Lot auf der Grenzfläche hin. Das bedeutet, dass der Brechungswinkel θ_2 kleiner ist als der Einfallswinkel θ_1. Um das zu verstehen und um eine quantitative Beziehung zwischen θ_1 und θ_2 zu erhalten, wollen wir uns jede Wellenfront als eine Reihe von Soldaten vorstellen.

Die Soldaten marschieren von festem Grund (Medium 1) auf Schlamm (Medium 2) und verlangsamen daher ihr Tempo. Die Soldaten, die den Schlammboden als erste erreichen, werden als erste langsamer, und die Frontreihe knickt ab wie in Abbildung 10.35a gezeigt. Wir wollen die mit a bezeichnete Wellenfront (oder Soldatenreihe) in Abbildung 10.35b anschauen. In der selben Zeit t, in der A_1 eine Wegstrecke $l_1 = v_1 t$ zurücklegt, schafft A_2 die Distanz $l_2 = v_2 t$. Die abgebildeten Dreiecke (eines umschließt θ_1 und l_1, das andere θ_2 und l_2) haben die Seite a gemeinsam. Somit gilt

$$\sin\theta_1 = \frac{l_1}{a} = \frac{v_1 t}{a} \quad \text{und} \quad \sin\theta_2 = \frac{l_2}{a} = \frac{v_2 t}{a} \,.$$

7 Dieser und der nächste Abschnitt werden noch detaillierter in den Kapiteln 24 und 25 über Optik behandelt.

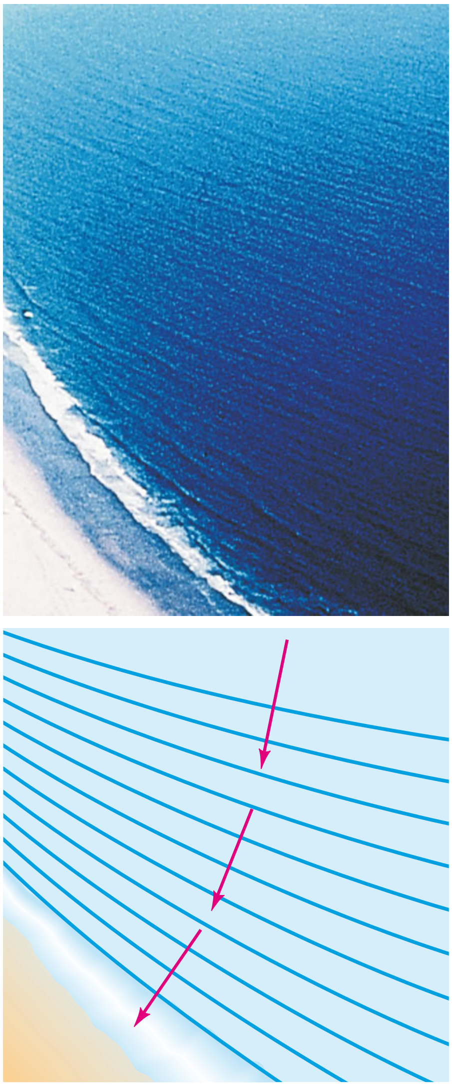


Abbildung 10.36 Wasserwellen brechen, wenn sie sich dem Strand nähern, wo ihre Geschwindigkeit geringer ist. Es gibt keine scharfe Grenzlinie wie in Abbildung 10.35, folglich ändert sich die Ausbreitungsgeschwindigkeit stetig.

Wir teilen die beiden Gleichungen durcheinander und erhalten

Brechungsgesetz

$$\frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1} = \frac{v_2}{v_1} \qquad (10.13)$$

Da θ_1 der Einfallswinkel und θ_2 der Brechungswinkel ist, gibt Gleichung 10.13 die Beziehung zwischen den beiden Winkeln an. Wenn die Wellen sich in entgegengesetzte Richtung bewegen, gilt natürlich dasselbe Argument. θ_1 und θ_2 würden lediglich ihre Rollen tauschen: θ_1 ist dann der Brechungswinkel und θ_2 ist der Einfallswinkel. Wenn die Wellen in ein Medium treten, wo sie sich schneller ausbreiten können, werden sie in die andere Richtung abgelenkt, also $\theta_2 > \theta_1$. Gleichung 10.13 sagt uns, dass wenn die Geschwindigkeit zunimmt, auch der Winkel zunimmt, und umgekehrt.

Erdbebenwellen werden in der Erde gebrochen, wenn sie durch Fels unterschiedlicher Dichte wandern und daher ihre Geschwindigkeit verschieden ist, genau wie das bei Wasser der Fall ist. Auch Lichtwellen werden gebrochen. Wenn wir uns in späteren Kapiteln mit Licht auseinandersetzen, wird sich Gleichung 10.13 noch als sehr nützlich erweisen.

Beispiel 10.8 **Brechung von Erdbebenwellen**

Eine Erdbebenwelle *p* durchläuft eine felsige Grenzregion, wo ihre Geschwindigkeit von 6,5 km/s auf 8,0 km/s zunimmt. Wenn sie die Grenzfläche mit einem Winkel von 30° (zum Lot) trifft, wie groß ist dann der Brechungswinkel?

Lösung

Mit $\sin 30^\circ = 0{,}50$ ergibt Gleichung 10.13

$$\sin\theta_2 = \frac{8{,}0\,\mathrm{m/s}}{6{,}5\,\mathrm{m/s}} \cdot 0{,}50 = 0{,}62\,.$$

Damit wird $\theta_2 = 38^\circ$.

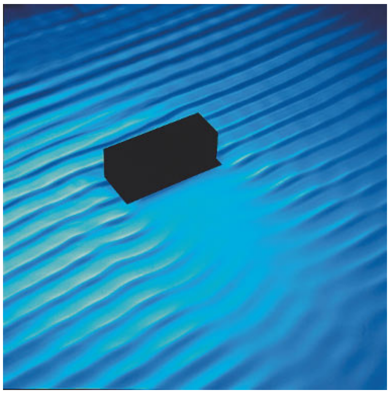


Abbildung 10.37 Wellenbeugung. Die Welle kommt aus Richtung der linken oberen Ecke. Beachten Sie, wie sich die Wellen hinter dem Hindernis in die „Schattenregion“ hinein krümmen.

10.11 Beugung

Wellen werden gestreut. Treffen sie auf ein Hindernis, so krümmen sie sich hinter demselben zum Hindernis hin, wie in ▸ Abbildung 10.37 am Beispiel von Wasserwellen demonstriert. Dieses Phänomen heißt **Beugung**.

Der Effekt der Beugung hängt von der Wellenlänge und der Größe des Hindernisses ab (▸ Abbildung 10.38). Ist die Wellenlänge viel größer als das Objekt, wie die Schilfblätter in Abbildung 10.38a, schließt sich die Welle darum herum, als wäre das Objekt gar nicht da. Bei größeren Objekten, Teilzeichnungen (b) und (c), gibt es schon eine größere durchwellte „Schattenregion“ hinter dem Hindernis, wo wir die Wellen eigentlich gar nicht erwarten sollten. Doch sie dringen dort ein, wenn auch nur geringfügig. Beachten Sie, dass in (d) – wo das Hindernis das gleiche ist wie in (c), die

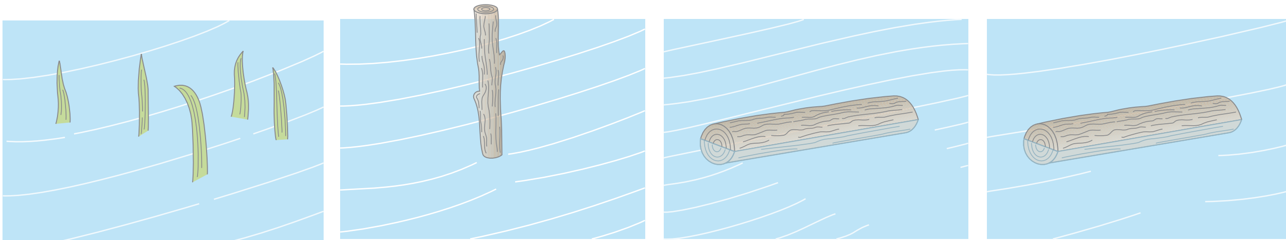


Abbildung 10.38 Wasserwellen treffen auf Objekte unterschiedlicher Größe. Je größer die Wellenlänge verglichen mit dem Objekt ist, desto größer ist der Beugungseffekt in die „Schattenregion" hinein. (a) Wasserwellen treffen auf Schilfgras; (b) ein Stock im Wasser; (c) Wellen kurzer Wellenlänge treffen auf einen Baumstamm; (d) Wellen mit langer Wellenlänge treffen auf einen Baumstamm.

Wellenlänge aber größer ist – eine stärkere Beugung in die „Schattenregion" hinein stattfindet. Eine Faustregel besagt: *Nur wenn die Wellenlänge kleiner als das Objekt ist, gibt es überhaupt eine nennenswerte Schattenregion*. Natürlich lässt sich diese Regel genauso gut auf die Reflexion an einem Objekt anwenden. Nur sehr wenig von der Welle wird reflektiert, außer wenn die Wellenlänge kleiner ist als das Objekt.

Ein grober Anhaltswert für den Effekt der Beugung ist

$$\theta \approx \frac{\lambda}{L}\,, \qquad (\theta \text{ im Bogenmaß})$$

worin θ ungefähr der Winkel der Wellen ist, nachdem sie eine Öffnung der Größe L oder ein Hindernis der Größe L passiert haben.

Dass sich Wellen um Hindernisse biegen können und somit Energie in Bereiche hinter dem Objekt transportieren können, unterscheidet sich deutlich vom Energietransport durch Masseteilchen. Um eine klare Veranschaulichung des Sachverhalts zu geben: Wenn Sie hinter einem Gebäude stehen, können Sie von einem Baseball, der von der anderen Seite geworfen wird, nicht getroffen werden. Doch einen Ruf oder ein anderes Geräusch können Sie hören, weil die Schallwellen um die Gebäudeecken herum in die „Schattenregion" gebeugt werden.

10.12 Doppler-Effekt

Sicher werden Sie schon einmal bemerkt haben, dass die Tonhöhe der Sirene eines vorbeisausenden Feuerwehrautos abrupt fällt. Der gleiche Effekt stellt sich ein, wenn ein hupendes Auto an Ihnen vorbeifährt. Und auch die Tonhöhe des Motors eines Rennwagens verändert sich, wenn er an einem Beobachter vorbeibraust. Bewegt sich eine Schallquelle auf einen Beobachter zu, so ist die Tonhöhe höher, als wenn sie ruht. Und wenn sie sich von ihm entfernt, fällt die Tonhöhe. Dieses Phänomen heißt **Doppler-Effekt**[8] und tritt bei allen Wellenarten auf. Wir wollen nun sehen, warum er auftritt und die Frequenzänderung bei Schallwellen berechnen.

8 Nach Christian Doppler (1803–1853), österreichischer Physiker.

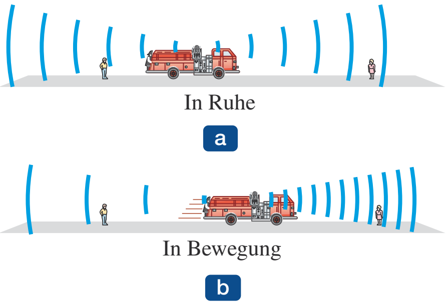


Abbildung 10.39 (a) Beide Beobachter auf dem Gehweg hören dieselbe Frequenz des ruhenden Feuerwehrautos. (b) Doppler-Effekt: Der Beobachter, in dessen Richtung sich das Feuerwehrauto bewegt, hört einen Ton mit höherer Frequenz, und ein Beobachter hinter dem sich entfernenden Fahrzeug hört eine niedrigere Frequenz.

Betrachten wir die Sirene eines Feuerwehrautos im Ruhezustand, die Schall mit einer bestimmten Frequenz in alle Richtungen emittiert (▶ Abbildung 10.39a). Die Wellengeschwindigkeit hängt nur von dem Medium ab, in dem sie sich ausbreitet. Sie hängt nicht von der Geschwindigkeit der Schallquelle oder des Beobachters ab. Bewegt sich die Schallquelle, unser Feuerwehrauto, so sendet die Sirene Schall mit derselben Frequenz aus wie im Ruhezustand. Doch die Schallwellen, die sie nach vorn ausstrahlt, liegen enger zusammen, als wenn das Feuerwehrauto in Ruhe ist (▶ Abbildung 10.39b). Das liegt daran, dass das Fahrzeug den Wellen, die seine Sirene zuvor ausgestrahlt hat, „hinterherjagt". Somit registriert ein Beobachter, der sich auf dem Gehweg befindet, mehr Wellenberge pro Sekunde, und die wahrgenommene Frequenz ist höher. Andererseits sind die Wellenfronten, die nach hinten ausgestrahlt werden, im Vergleich zum Ruhezustand weiter auseinander, da sich das Auto von ihnen entfernt. Folglich passieren weniger Wellenberge einen Beobachter, der sich hinter dem Fahrzeug befindet, und die Frequenz ist niedriger.

Frequenzänderung, bewegte Quelle

Um die Frequenzänderung zu berechnen, nutzen wir ▶ Abbildung 10.40 und nehmen die Luft (oder ein anderes Medium) als ruhend in unserem Bezugssystem an. In Abbildung 10.40a ist die Schallquelle, dargestellt durch einen Punkt, in Ruhe; zwei aufeinanderfolgende Wellenberge sind abgebildet, wobei der zweite gerade emittiert wird. Der Abstand zwischen den beiden Wellen ist λ. Wenn die Frequenz der Welle f ist, so beträgt die Zeit zwischen der Aussendung zweier Wellenberge

$$T = \frac{1}{f}\ .$$

In Abbildung 10.40b bewegt sich die Schallquelle mit der Geschwindigkeit v_S. In einem Zeitintervall T legt der erste Wellenberg eine Distanz $s = vT$ zurück, wobei v die Geschwindigkeit der Welle in der Luft ist (die natürlich dieselbe ist, ob sich die Quelle nun bewegt oder nicht). In derselben Zeit hat sich die Quelle um die Distanz $s_S = v_S T$ weiterbewegt. Der Abstand zwischen folgenden Wellenbergen (die neue Wellenlänge λ') wird (mit $s = \lambda$)

$$\lambda' = s - s_S = \lambda - v_S T = \lambda - v_S \frac{\lambda}{v} = \lambda \left(1 - \frac{v_S}{v}\right)\ .$$

Die Änderung der Wellenlänge, $\Delta\lambda$, ist gleich

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = -v_S \frac{\lambda}{v}\ .$$

Somit ist die Veränderung der Wellenlänge direkt proportional der Geschwindigkeit v_S der Schallquelle. Die neue Frequenz ist andererseits gegeben durch

$$f' = \frac{v}{\lambda'} = \frac{v}{\lambda\left(1 - \frac{v_S}{v}\right)} \qquad \text{oder, mit} \quad v/\lambda = f\ ,$$

$$f' = \frac{f}{\left(1 - \frac{v_S}{v}\right)}\ . \qquad \text{(Quelle bewegt sich auf ruhenden Beobachter zu)} \qquad (10.14a)$$

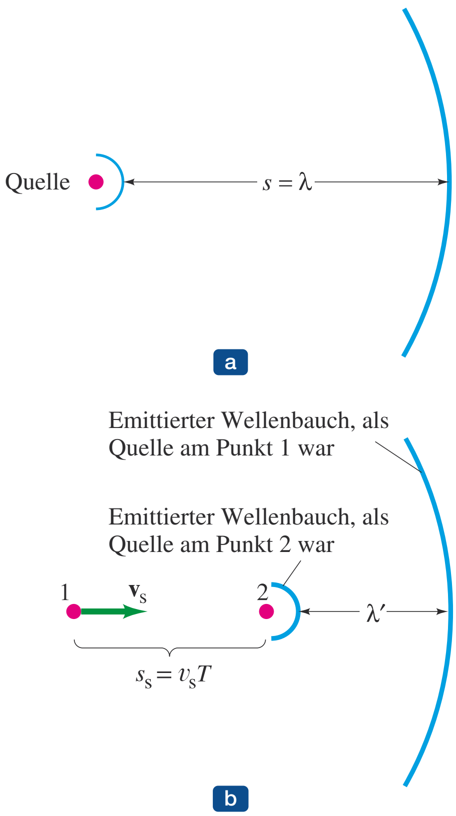


Abbildung 10.40 Bestimmung der Frequenzänderung im Doppler-Effekt (siehe Text). Der rote Punkt ist die Schallquelle.

Weil der Nenner kleiner als 1 ist, ist $f' > f$. Emittiert beispielsweise eine ruhende Quelle einen Schall mit einer Frequenz von 400 Hz, so wird ein

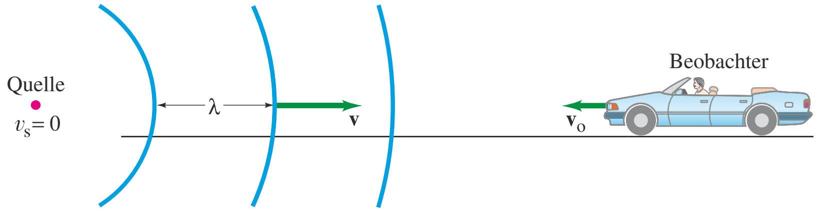


Abbildung 10.41 Ein Beobachter bewegt sich mit der Geschwindigkeit v_0 auf eine ruhende Schallquelle zu. Die Wellenberge passieren ihn dann mit einer Geschwindigkeit von $v' = v + v_0$, wobei v die Geschwindigkeit der Schallwellen in der Luft ist.

ruhender Beobachter dann, wenn sich die Quelle mit einer Geschwindigkeit von 30 m/s auf ihn zu bewegt, eine Frequenz von

$$f' = \frac{400\,\text{Hz}}{1 - \frac{30\,\text{m/s}}{343\,\text{m/s}}} = 438\,\text{Hz}$$

wahrnehmen. Für eine Quelle, die sich mit der Geschwindigkeit v_S vom Beobachter entfernt, ergibt sich durch eine ähnliche Überlegung die Frequenz

$$f' = \frac{f}{\left(1 + \frac{v_S}{v}\right)} . \qquad \text{(Quelle bewegt sich von ruhendem Beobachter fort)} \qquad (10.14b)$$

Wenn sich in diesem Fall eine mit 400 Hz schwingende Quelle mit 30 m/s vom ruhenden Beobachter fortbewegt, so hört der Beobachter eine Frequenz von rund 368 Hz.

Der Doppler-Effekt tritt auch dann auf, wenn die Schallquelle ruht und der Beobachter sich bewegt. Bewegt sich der Beobachter auf die Quelle zu, ist die Frequenz erhöht; bewegt er sich von der Quelle fort, fällt die Tonhöhe. Quantitativ unterscheidet sich die Frequenzänderung leicht von dem Fall, in dem sich die Quelle bewegt. Bei ruhender Quelle und bewegtem Beobachter wird der Abstand zwischen zwei Wellenbergen, die Wellenlänge λ, nicht geändert. Bewegt sich der Beobachter auf die Quelle zu (▸ Abbildung 10.41), so ist die Geschwindigkeit der Wellen relativ zum Beobachter $v' = v + v_O$, wobei v die Schallgeschwindigkeit in der Luft (die wir als unbewegt annehmen) und v_O die Beobachtergeschwindigkeit ist. Die neue Frequenz ist dann

$$f' = \frac{v'}{\lambda} = \frac{v + v_O}{\lambda} \qquad \text{oder, mit} \quad \lambda = v/f ,$$

$$f' = \left(1 + \frac{v_O}{v}\right) f . \qquad \text{(Beobachter bewegt sich auf ruhende Quelle zu)} \qquad (10.15a)$$

Bewegt sich der Beobachter von der Quelle fort, so ist die Relativgeschwindigkeit $v' = v - v_O$. Damit wird

$$f' = \left(1 - \frac{v_O}{v}\right) f . \qquad \text{(Beobachter bewegt sich von ruhender Quelle fort)} \qquad (10.15b)$$

Wird eine Schallquelle von einem sich bewegenden Hindernis reflektiert, so unterscheidet sich die Frequenz der reflektierten Welle wegen des Doppler-Effekts von der Frequenz der einfallenden Welle. Das zeigt das folgende Beispiel.

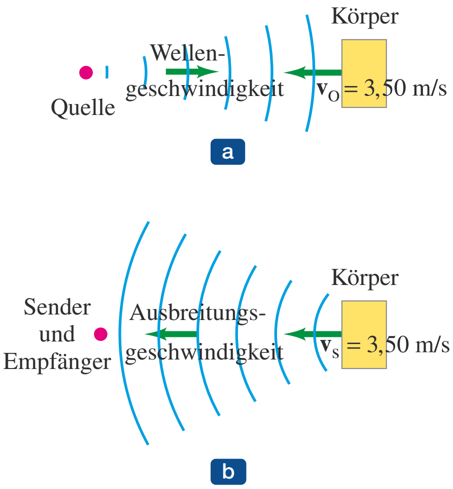


Abbildung 10.42 Beispiel 10.9.

Beispiel 10.9 Zwei Doppler-Verschiebungen

Ein Schall wird mit 5000 Hz von einer ruhenden Quelle in Richtung auf einen Körper emittiert, der sich mit 3,50 m/s auf die Quelle zu bewegt. (▸ Abbildung 10.42). Welche Frequenz hat die von dem Objekt reflektierte Welle, die von einem ruhenden Detektor neben der Quelle registriert wird?

Lösung

In dieser Situation gibt es eigentlich zwei Doppler-Effekte. Einerseits trifft die emittierte Welle auf ein bewegtes Objekt, das effektiv ein bewegter Beobachter ist (Abbildung 10.42a), der eine Schallwelle der folgenden Frequenz (Gleichung 10.15a) wahrnimmt:

$$f' = \left(1 + \frac{v_O}{v}\right) f = \left(1 + \frac{3{,}50\,\text{m/s}}{343\,\text{m/s}}\right) \cdot 5000\,\text{Hz} = 5051\,\text{Hz}\,.$$

Zweitens nimmt der bewegte Körper diese Welle mit der Frequenz f' und wirft (oder reflektiert) sie zurück, was effektiv der Schallaussendung einer bewegten Quelle gleichkommt. Damit ist die registrierte Frequenz f'' durch Gleichung 10.14a gegeben:

$$f'' = \frac{f'}{1 - \frac{v_S}{v}} = \frac{5051\,\text{Hz}}{1 - \frac{3{,}50\,\text{m/s}}{343\,\text{m/s}}} = 5103\,\text{Hz}\,.$$

Die Frequenz verändert sich mithin um 103 Hz.

Die einfallende und die reflektierte Welle aus Beispiel 10.9 interferieren, wenn sie gemischt werden (etwa elektronisch) und erzeugen Schwebungen. Die Schwebungsfrequenz gleicht der Frequenzdifferenz von 103 Hz. Diese Doppler-Technik wird in einer Vielzahl von medizinischen Anwendungen eingesetzt, gewöhnlich mit Ultraschallwellen im Megahertz-Bereich. Beispielsweise können Ultraschallwellen, die von roten Blutkörperchen reflektiert werden, dazu benutzt werden, die Fließgeschwindigkeit des Blutes zu bestimmen. In ähnlicher Weise lässt sich diese Technik dazu verwenden, durch die Registrierung der rhythmischen Brustbewegungen eines Fötus die Herzschläge aufzuzeichnen.

ANGEWANDTE PHYSIK
Medizinische Anwendung

Aus Gründen der Vereinfachung können wir die Gleichungen 10.14 und 10.15 in einer Gleichung zusammenfassen, die alle Fälle von Quellen- und/oder Beobachterbewegungen abdeckt:

PROBLEMLÖSUNG
Die Vorzeichen richtig setzen

Quelle und Beobachter in Bewegung

$$f' = f \cdot \frac{v \pm v_O}{v \mp v_S}\,. \qquad (10.16)$$

Doppler-Effekt bei Licht

ANGEWANDTE PHYSIK
Doppler-Effekt bei elektromagnetischen Wellen und Wettervorhersage

Der Doppler-Effekt tritt auch bei anderen Wellenarten auf. Licht und andere Arten elektromagnetischer Wellen (wie Radarwellen) weisen den Doppler-Effekt auf: Obgleich die Formeln für die Frequenzverschiebungen nicht mit denen der Gleichungen 10.14 und Gleichung 10.15 identisch sind, so ist der Effekt doch sehr ähnlich. Eine wichtige Anwendung ist der Einsatz von

Radar bei der Wettervorhersage. Die Zeitverzögerung zwischen der Emission des Radarsignals und seiner Registrierung nach Reflexion durch Regentropfen hilft bei der Lokalisierung von Niederschlägen. Durch Messungen der Doppler-Verschiebungen (wie in Beispiel 10.9) lässt sich angeben, wie schnell und in welche Richtung sich ein Niederschlagsgebiet bewegt.

Eine weitere wichtige Anwendung kennt die Astronomie, wo die Geschwindigkeiten von weit entfernten Galaxien aus dem Doppler-Effekt bestimmt werden können. Das Licht solcher Galaxien ist gegen niedrigere Frequenzen verschoben, was anzeigt, dass sich die Galaxien von uns fortbewegen. Man nennt das **Rotverschiebung**, da Rot die niedrigste Frequenz im sichtbaren Bereich hat. Je größer die Frequenzverschiebung, desto größer die Fluchtgeschwindigkeit. Je weiter die Galaxien von uns entfernt sind, desto schneller bewegen sie sich von uns fort. Diese Beobachtung ist die Grundlage der Vorstellung, dass das Universum expandiert, und sie ist zudem eine Grundlage für die Annahme, dass das Universum mit einer großen Explosion begann, die man Urknall nennt.

ANGEWANDTE PHYSIK

Rotverschiebung in der Kosmologie

10.13 Anwendungen: Sonar, Ultraschall und Ultraschall-Abbildung

Die Reflexion von Schall wird in vielen Anwendungen zur Abstandsbestimmung eingesetzt. Ein **Sonar**[9] (Echolot) dient der Lokalisierung von Objekten unter Wasser. Ein Sender sendet einen Schallpuls durch das Wasser, und ein Empfänger empfängt seine Reflexion (das Echo) kurze Zeit später. Dieses Zeitintervall wird sorgfältig gemessen, denn daraus lässt sich die Distanz des Objekts bestimmen, da die Schallgeschwindigkeit in Wasser bekannt ist. Mit dieser Methode kann man die Meerestiefe bestimmen sowie Riffs, gesunkene Schiffe, U-Boote oder Fischschwärme orten. Der innere Erdaufbau kann auf ähnliche Weise studiert werden, indem man Reflexionen von Wellen nachweist, die durch eine vorsätzliche „Schallexplosion" erzeugt werden. Eine Analyse von an verschiedenen Erdstrukturen und Grenzschichten reflektierten Wellen liefert charakteristische Muster, die bei der Ausbeutung von Öl und Mineralien nützlich sind.

ANGEWANDTE PHYSIK

Sonar und Ultraschall-Abbildungen

Ein Sonar nutzt generell **Ultraschall**-Frequenzen: Das sind Wellen, deren Frequenzen oberhalb 20 kHz liegen, jenseits des menschlichen Hörvermögens. Sonare arbeiten üblicherweise im Frequenzbereich 20 kHz bis 100 kHz. Ein weiterer Grund für die Verwendung von Ultraschall außer dem, dass er nicht hörbar ist, liegt darin, dass es für kürzere Wellenlängen weniger Streuung gibt, somit werden die Wellen weniger gebeugt und kleinere Objekte können nachgewiesen werden.

Der diagnostische Einsatz von Ultraschall als Abbildungsinstrument in der Medizin (manchmal „Sonogramme" genannt) ist eine wichtige und interessante Anwendung physikalischer Prinzipien. Hier wird eine **Echo-Puls-Technik** genutzt, die einem Sonar ähnlich ist. Ein hochfrequenter Schallpuls wird in den Körper geschickt und seine Reflexion von den Grenzen oder Zwischenbereichen der Organe und weiterer Strukturen oder Verletzungen

9 Sonar steht für „*so*und *na*vigation and *r*anging".

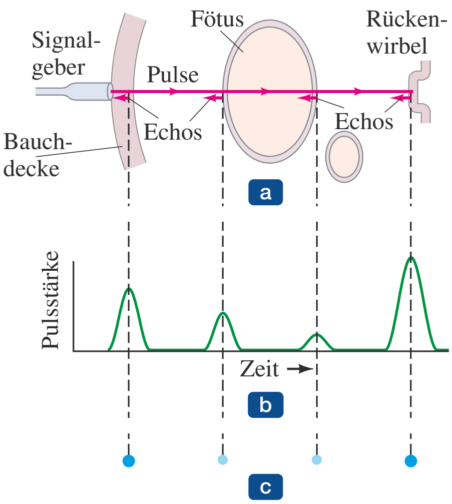


Abbildung 10.43 (a) Ein Ultraschallpuls passiert den Unterleib und wird von den Oberflächen, die auf seinem Weg liegen, reflektiert. (b) Reflektierte Schallpulse werden als Funktion der Zeit eingetragen, wenn sie von einem Signalumwandler empfangen werden. Die vertikalen, gestrichelten Linien zeigen an, von welcher Oberfläche der reflektierte Puls stammt. (c) Punkte-Diagramm der Echos: Die Helligkeit jedes Punkts hängt direkt mit der Signalstärke zusammen.

im Körper aufgezeichnet. Es ist sogar möglich, in „Echtzeit" Ultraschallbilder zu erzeugen, als sähe man einen Film über einen Ausschnitt oder das Innere des Körpers.

Die Echo-Puls-Technik für die medizinische Abbildung funktioniert wie folgt. Ein Ultraschallpuls wird von einem Signalwandler ausgesandt, der einen elektrischen in einen Schallwellenpuls umwandeln kann. Ein Teil des Pulses wird an jeder Oberfläche im Körperinnern reflektiert, der Großteil bewegt sich weiter. Der Empfang des reflektierten Pulses durch denselben Signalwandler kann auf einem Computerbildschirm dargestellt werden (▸ Abbildung 10.43). Das Zeitintervall zwischen Emittierung des Pulses und Empfang der Reflexion ist proportional zur Entfernung der reflektierenden Oberfläche. Wenn beispielsweise der Abstand zwischen Signalwandler und einem Rückenwirbel 25 cm beträgt, so legt der Puls einen Weg von $2 \cdot 25\,\text{cm} = 50\,\text{cm}$ zurück. Die Schallgeschwindigkeit im menschlichen Körper ist etwa 1540 m/s (etwa wie in Wasser), somit wird das Zeitintervall $t = s/v = 0{,}50\,\text{m}/1540\,\text{m/s} = 324\,\mu\text{s}$.

Die *Intensität* des reflektierten Pulses hängt hauptsächlich von der unterschiedlichen Dichte der beiden Gewebearten an beiden Seiten der Grenzschicht ab und kann als Puls oder als Rasterpunkt (Abbildung 10.43b und c) dargestellt werden. Jeder Echo-Rasterpunkt (Abbildung 10.43c) ergibt einen Display-Punkt, dessen Position durch die Zeitverzögerung gegeben ist und dessen Helligkeit von der Intensität des Echos abhängt. Ein zweidimensionales Bild aus diesen Punkten erhält man durch eine Rasterung des ausgesandten Ultraschall-Pulses. Der Signalwandler wird bewegt und an jeder neuen Position sendet er einen Puls aus und empfängt die Echos. Eine eindimensionale Rasterung entlang einer vertikalen Linie zeigt ▸ Abbildung 10.44. Jede Bewegungsspur wird aufgezeichnet und räumlich passend untereinander zugeordnet, um ein Bild auf einem Bildschirm zu erzeugen (Abbildung 10.44b). In Abbildung 10.44 sind nur 10 Linien abgebildet, und somit wird das Bild nur sehr grob. Mehr Linien ergeben ein genaueres Bild. ▸ Abbildung 10.45 zeigt zwei Fotos von Ultraschallaufnahmen.

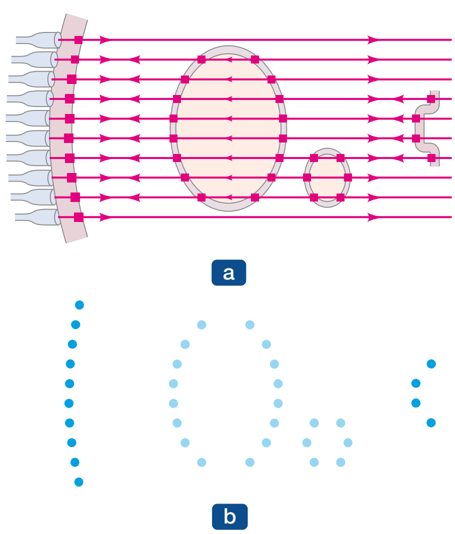


Abbildung 10.44 (a) Der Unterleib wird durch Bewegung der Signalwandlers oder durch ein Array von Signalwandlern abgetastet. Zehn „Schallspuren" werden aufgezeichnet. (b) Die Echos werden geplottet, um das Bild zu erhalten. Enger beieinander liegende „Schallspuren" würden ein detaillierteres Bild ergeben.

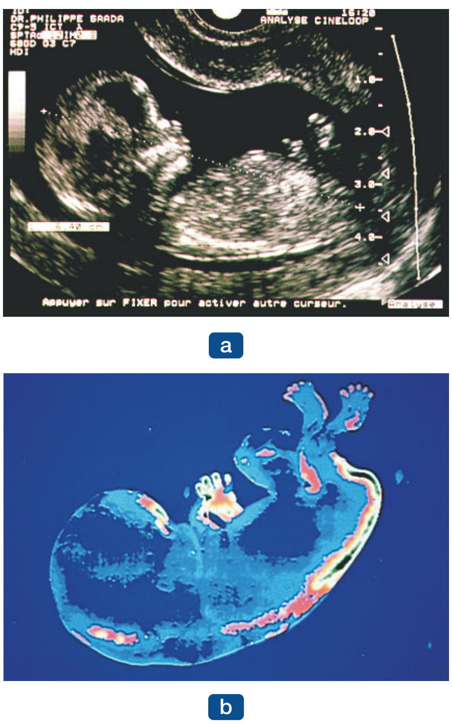


Abbildung 10.45 (a) Ultraschallbild eines menschlichen Fötus (Kopf auf der linken Seite) im Uterus. (b) Hochauflösende Ultraschall-Falschfarbendarstellung eines Fötus (unterschiedliche Farben stehen für unterschiedliche Intensitäten reflektierter Pulse).

ZUSAMMENFASSUNG

Schwingende Objekte sind Quellen von **Wellen**, die sich von der Quelle fortbewegen. Wasserwellen und Wellen auf einem Seil sind Beispiele. Die Welle kann ein **Paket** (ein einzelner Wellenkamm) oder kontinuierlich sein (viele Wellenkämme und -täler).

Die **Wellenlänge** einer laufenden Welle ist der Abstand zwischen zwei aufeinanderfolgenden Wellenkämmen (oder zweier beliebiger identischer Punkte auf der Wellenform).

Die **Frequenz** ist die Anzahl der Wellenlängen (oder Kämme), die einen gegebenen Ort per Zeiteinheit passieren.

Die **Ausbreitungsgeschwindigkeit** (wie schnell sich ein Kamm bewegt) ist gleich dem Produkt aus Wellenlänge und Frequenz, $v = \lambda f$.

Die **Amplitude** einer Welle ist die maximale Höhe eines Kamms oder Tiefe eines Tals relativ zur Nulllage.

Eine **Transversalwelle** schwingt senkrecht zu ihrer Ausbreitungsrichtung. Ein Beispiel ist eine Welle auf einer Saite.

Eine **Longitudinalwelle** schwingt parallel zu ihrer Ausbreitungsrichtung.

Schall breitet sich als Longitudinalwelle in der Luft und anderen Materialien aus. Die Schallgeschwindigkeit in der Luft nimmt mit der Temperatur zu. Bei 20 °C beträgt sie etwa 343 m/s.

Die **Tonhöhe** von Schall ist durch seine Frequenz bestimmt. Je höher die Frequenz, desto höher die Tonhöhe.

Der **hörbare Bereich** von Frequenzen liegt beim Menschen etwa zwischen 20 Hz und 20 000 Hz (1 Hz = 1 Schwingung pro Sekunde).

Wellen übertragen Energie von einem Ort zum anderen, ohne dass Materie transportiert wird. Die von einer Welle transportierte Energie, die Leistung (Energietransport pro Zeiteinheit) und die **Intensität** einer Welle (Energietransport durch eine Einheitsfläche pro Zeiteinheit) sind allesamt proportional zum Quadrat der Wellenamplitude.

Die Amplitude einer auf der x-Achse nach rechts laufenden, eindimensionalen Transversalwelle (x nimmt zu) lässt sich als Funktion von Ort und Zeit darstellen:

$$D(x,t) = D_M \sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}\cdot(x - vt)\right] = D_M \sin(kx - \omega t)$$

Darin ist k die Wellenzahl und ω die Kreisfrequenz:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \text{und} \quad \omega = 2\pi f\ .$$

Wenn zwei oder mehrere Wellen gleichzeitig durch denselben Raumbereich laufen, ist die Auslenkung eines gegebenen Punktes die Vektorsumme der einzelnen Auslenkungen. Das ist das **Superpositionsprinzip**. Es gilt für mechanische Wellen, wenn die Amplituden ausreichend klein sind, so dass die rücktreibende Kraft des Mediums proportional zur Auslenkung ist.

Wellen werden durch Objekte, auf die sie treffen, reflektiert. Bewegt sich eine Welle durch eine Grenzregion zwischen zwei Medien, so wird ein Teil der Welle reflektiert, ein anderer wird durchgelassen.

Fällt die **Wellenfront** einer zwei- oder dreidimensionalen Welle auf ein Objekt, so ist der Reflexionswinkel gleich dem Einfallswinkel.

Laufen zwei Wellen gleichzeitig durch denselben Raumbereich, **interferieren** sie. Gemäß dem Superpositionsprinzip ist dann die resultierende Auslenkung an jedem Ort und zu jedem Zeitpunkt die Summe der einzelnen Auslenkungen. Das kann sich als **konstruktive Interferenz, destruktive Interferenz** oder etwas dazwischen Liegendes, abhängig von den Amplituden und den relativen Phasen, auswirken.

Wellen auf einem Seil (oder einem anderen Medium) fester Länge interferieren mit den reflektierten, gegenläufigen Wellen. Bei bestimmten Frequenzen werden **stehende Wellen** erzeugt. Die Wellen scheinen dann still zu stehen, wir sprechen von stehenden Wellen. Das Seil (oder Medium) schwingt als Ganzes. Das ist ein Resonanzphänomen, und die Frequenzen, bei der stehende Wellen auftreten, heißen **Resonanzfrequenzen**. Die Punkte destruktiver Interferenz (keine Auslenkung) heißen Knoten. Punkte konstruktiver Interferenz (maximale Auslenkung) heißen **Wellenbäuche**.

Die Wellenlänge stehender Wellen ist gegeben durch $\lambda_n = 2L/n$, worin n ganzzahlig ist.

Viele Musikinstrumente sind einfache Schallquellen, in denen *stehende Wellen* erzeugt werden.

Die Saiten eines Saiteninstruments können als Ganzes schwingen, mit Knoten nur an den Enden. Die Frequenz, bei der das auftritt, heißt **Grundfrequenz**. Die Saite kann auch bei höheren Frequenzen schwingen, sie heißen **Obertöne** oder **Harmonische**. Sie haben einen oder mehrere weitere Knoten. Die Frequenz jeder Harmonischen ist ein ganzzahliges Vielfaches der Grundfrequenz.

In Blasinstrumenten werden stehende Wellen in der Luftsäule im Instrument erzeugt.

Die schwingende Luftsäule in einem **offenen Schallrohr** (an beiden Enden offen) hat Auslenkungsbäuche an beiden Enden. Die Grundschwingung der stehenden Welle hat eine Wellenlänge, die zweimal so groß wie die Rohrlänge ist: $\lambda_1 = 2L$. Die Frequenzen der Harmonischen sind zwei-, drei-, vier-… mal so groß wie die Grundfrequenz.

Bei einem **geschlossenem Schallrohr** (an einem Ende geschlossen) entspricht der Grundschwingung eine Wellenlänge, die dem Vierfachen des Rohrs entspricht: $\lambda_1 = 4L$. Nur die ungeradzahligen Harmonischen sind präsent, sie sind ein-, drei-, fünf-… mal so groß wie die Grundfrequenz.

Schallwellen aus unterschiedlichen Quellen können miteinander interferieren. Wenn zwei Schallwellen sich nur leicht in der Frequenz unterscheiden, kann man **Schwebungen** hören. Ihre Frequenz ist gleich der Frequenzdifferenz der beiden Schallquellen.

Der **Doppler-Effekt** hat mit der Tonhöhenänderung des Schalls zu tun, die man beobachtet, wenn sich die Quelle oder der Beobachter bewegt. Wenn sie sich aufeinander zu bewegen, steigt die Tonhöhe, entfernen sie sich voneinander, sinkt sie.

Verständnisfragen

1 Ist die Frequenz einer einfachen periodischen Welle gleich der Frequenz ihrer Quelle? Begründen Sie Ihre Antwort!

2 Erklären Sie den Unterschied zwischen der Geschwindigkeit einer transversalen Welle, die über ein Seil läuft, und der Geschwindigkeit eines kleinen Seilsegments.

3 Welche Art Wellen werden Ihrer Meinung nach durch einen horizontalen Metallstab laufen, wenn Sie dem Stabende (a) vertikal von oben und (b) horizontal parallel zu seiner Länge einen Schlag versetzen?

4 Geben Sie weitere Beispiele für ein-, zwei- und dreidimensionale Wellen an.

5 Was spricht dafür, dass sich Schall als Welle ausbreitet?

Abbildung 10.46 Frage 6.

6 Kinder spielen manchmal mit einem selbstgemachten „Telefon", das aus einer Schnur besteht, deren Enden am Boden zweier Pappbecher befestigt sind. Wenn das Seil gespannt ist und ein Kind spricht in einen Pappbecher, so kann der Schall im Pappbecher am anderen Ende gehört werden. Erklären Sie ausführlich, wie der Schall vom einen Becher zum andern wandert. (► Abbildung 10.46)

7 Wenn eine Schallwelle von der Luft in Wasser übertritt, erwarten Sie dann eine Veränderung der Wellenlänge oder der Frequenz?

8 Was spricht dafür, dass die Schallgeschwindigkeit in Luft nicht signifikant von der Frequenz abhängt?

9 Die Stimme einer Person, die Helium inhaliert hat, klingt sehr hoch. Warum?

10 Die Schallgeschwindigkeit ist in den meisten Festkörpern meist etwas größer als in der Luft, obgleich die Dichte von Festkörpern viel größer (10^3- bis 10^4-mal) ist als die von Luft. Erklären Sie, warum.

11 Gasmoleküle wie die der Luft bewegen sich zufallsbestimmt mit ziemlich großer Geschwindigkeit (Kapitel 12). Der mittlere Abstand von Molekülen voneinander ist wesentlich größer als ihr Durchmesser. Bewegt sich eine Welle durch ein Gas, so wird der einem Molekül übertragene Impuls nur dann auf ein anderes übertragen, wenn dieser Abstand zurückgelegt wird und zwei Moleküle kollidieren. Erwarten Sie deshalb, dass die Schallgeschwindigkeit in einem Gas durch die mittlere Molekülgeschwindigkeit begrenzt wird?

12 Begründen Sie, warum die Amplituden zirkularer Wasserwellen mit wachsendem Abstand von der Quelle abnehmen.

13 Zwei eindimensionale Wellen haben dieselbe Amplitude, die Wellenlänge der einen ist halb so groß wie die der anderen. Welche überträgt mehr Energie? Um welchen Faktor?

14 Wenn eine sinusförmige Welle auf die Grenzregion zweier Seilsegmente trifft (siehe Abbildung 10.16), ändert sich die Frequenz im Gegensatz zur Wellenlänge und Geschwindigkeit nicht. Erklären Sie, warum!

15 Wird eine sinusförmige Welle auf einem Seil mit zwei unterschiedlichen Segmenten (siehe Abbildung 10.16) am Übergang bei der partiellen Reflexion invertiert, hat dann die durchgelassene Welle eine längere oder kürzere Wellenlänge?

16 Bleibt die Energie bei zwei interferierenden Wellen immer erhalten? Begründen Sie Ihre Antwort.

17 Wenn eine Saite in drei Abschnitten schwingt, gibt es dann Stellen auf der Saite, die man mit einem Messer berühren kann, ohne die Bewegung zu stören?

18 Warum werden die Bünde einer Gitarre enger, je näher sie am Steg liegen?

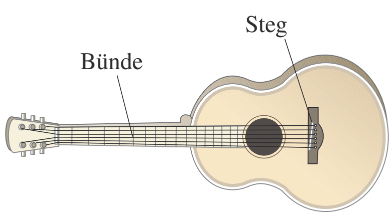


Abbildung 10.47 Frage 18.

19 Bei einer stehenden Welle auf einer Saite löschen sich die einfallenden und reflektierten Wellen an den Knotenpunkten aus. Heißt das, dass Energie vernichtet wurde? Erklären Sie das.

20 Warum kann man Wasser in einer Pfanne nur mit einer bestimmten Frequenz hin und her schwappen lassen?

21 Kann die Amplitude der stehenden Welle aus Abbildung 10.25 größer sein als die Amplitude der verursachenden Schwingung (das Auf und Ab der Hand)?

22 Wenn ein Seil wie in Abbildung 10.25 durch eine Hand oder eine mechanische Schwingvorrichtung schwingt, sind die „Knoten“ keine wahren Knoten (im Ruhezustand). Woran liegt das? (*Hinweis*: Berücksichtigen Sie Dämpfung und den Energiefluss von der Hand oder der Schwingvorrichtung.)

23 Langwellenradiosignale (AM) kann man gewöhnlich auch hinter einem Berg hören, kurzwellige (FM) hingegen häufig nicht. Das bedeutet, dass die AM-Signale sich stärker krümmen als die FM-Signale. Erklären Sie warum. (Radiosignale werden, wie wir noch sehen werden, von elektromagnetischen Wellen getragen. Typische AM-Wellenlängen sind 200 bis 600 m, FM-Wellenlängen betragen dagegen nur rund 3 m.)

24 Von stehenden Wellen kann man sagen, dass sie das Ergebnis „räumlicher Interferenz“ sind, wohingegen Schwebungen als „zeitliche Interferenz“ aufgefasst werden können. Erklären Sie, warum.

25 Wenn in Abbildung 10.22 die Frequenz der Lautsprecher verringert würde, würden sich dann die Punkte D und C (wo sich destruktive und konstruktive Interferenz ereignet) voneinander entfernen oder einander annähern?

26 ► Abbildung 10.48 zeigt verschiedene Positionen eines Kindes auf einer Schaukel. Jemand bläst vor dem schaukelnden Kind stehend in eine Trillerpfeife. In welcher Position hört das Kind die höchste Frequenz des Tons aus der Trillerpfeife? Begründen Sie Ihre Auffassung.

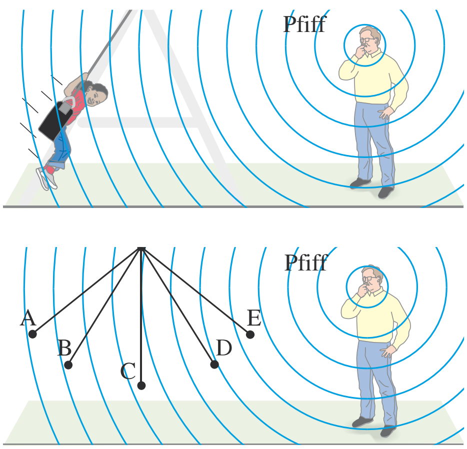


Abbildung 10.48 Frage 26.

Übungsaufgaben zu 10.1 bis 10.3

kompletter Lösungsweg

1 Ein Fischer bemerkt, dass sein Boot alle 4,0 s von einem Wellenkamm getroffen wird. Er bestimmt den Abstand zwischen zwei Kämmen zu 9 m. Wie schnell sind die Wellen?

2 Langwellige Radiosignale (AM) haben Frequenzen zwischen 550 kHz und 1600 kHz (Kilohertz) und eine Geschwindigkeit von $3{,}0 \cdot 10^8$ m/s. Wie groß ist die Wellenlänge dieser Signale? Kurzwellige Frequenzen (FM) liegen zwischen 88 und 108 MHz (Megahertz) und haben dieselbe Geschwindigkeit. Wie groß ist ihre Wellenlänge?

3 (a) Berechnen Sie die Wellenlängen von Schall in der Luft für die Grenzwerte des Hörbereichs, 20 Hz und 20 000 Hz. (b) Wie groß ist die Wellenlänge einer Ultraschallwelle mit 10 MHz?

4 Ein Matrose schlägt auf die Schiffswand direkt über der Wasseroberfläche. 3,5 s später hört er das vom Meeresgrund reflektierte Echo. Wie tief ist das Meer an dieser Stelle?

5 *S*-Wellen (Scherungswellen) und *p*-Wellen (Druckwellen) eines Erdbebens breiten sich mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten aus. Dieser Umstand hilft bei der Bestimmung des Epizentrums (der Ort auf der Erdoberfläche direkt über dem Erdbebenherd). (a) Typische Ausbreitungsgeschwindigkeiten liegen bei 9,0 km/s (*p*-Wellen) und 5,5 km/s (*S*-Wellen). Wie weit ist das Epizentrum von einer seismischen Station entfernt, die einen Laufzeitunterschied von 94 s zwischen den beiden Wellen misst? (b) Reicht eine seismische Station aus, um die Position des Epizentrums zu bestimmen?

6 Zwei Wellen breiten sich entlang eines gespannten Seils aus und haben die gleiche Frequenz. Eine transportiert jedoch dreimal so viel Leistung wie die andere. Wie groß ist das Amplitudenverhältnis der beiden Wellen?

7 Eine Wanze bewegt sich auf der Oberfläche eines Teichs um insgesamt 10 cm (vertikaler Abstand Kamm–Tal) auf und ab. (a) Wie groß ist die Amplitude der Welle? (b) Um welchen Faktor ändert sich die kinetische Energie der Wanze, wenn sie durch eine zweite Wasserwelle um 0,15 cm auf und ab schwingt?

8 Die Oberflächenwelle eines Erdbebens kann näherungsweise als sinusförmige Transversalwelle beschrieben werden. Welche minimale Amplitude wird bei einer Frequenz von 0,50 Hz (typischer Wert für Erdbeben, die in Wirklichkeit eine Frequenzmischung aufweisen) dazu führen, dass Objekte ihren Bodenkontakt verlieren?

9 ► Abbildung 10.49 zeigt die Form einer rechtsläufigen Sinuswelle zu zwei Zeitpunkten. Wie lautet die Gleichung für die Welle?

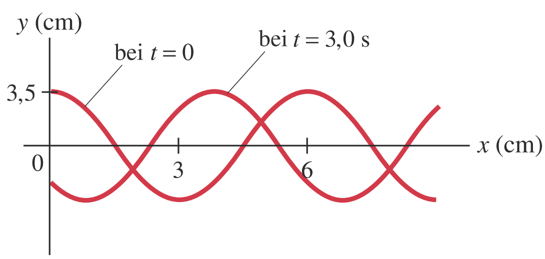


Abbildung 10.49 Aufgabe 9.

Übungsaufgaben zu 10.5 bis 10.7

kompletter Lösungsweg

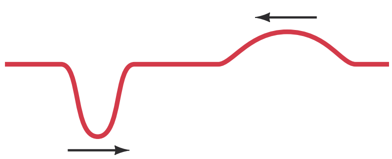


Abbildung 10.50 Aufgabe 10.

10 Die beiden in ► Abbildung 10.50 abgebildeten Pakete bewegen sich aufeinander zu. (a) Skizzieren Sie die Form des Seils in dem Moment, da sie sich überlappen. (b) Skizzieren Sie das Seil einige Augenblicke später. (c) Das Seil aus Abbildung 10.19a ist in dem Moment, in dem sich die Pakete überlappen, gerade. Was ist in diesem Moment mit der Energie passiert?

11 Zwei Lautsprecher werden 3,00 m voneinander entfernt aufgestellt (► Abbildung 10.51). Sie emittieren

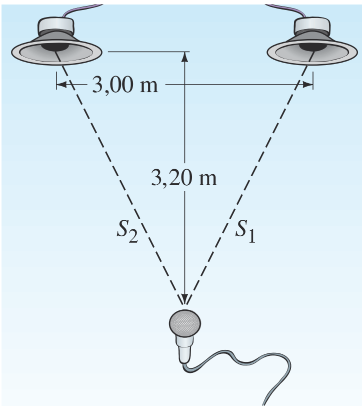


Abbildung 10.51 Aufgabe 11.

gleichphasig Schallwellen mit 440 Hz. Ein Mikrofon wird in 3,20 m Abstand von der Verbindungslinie der beiden Lautsprecher in der Mitte positioniert und zeichnet dort ein Maximum der Intensität auf. (a) Wie weit muss das Mikrofon nach rechts bewegt werden, um auf das erste Intensitätsminimum zu stoßen? (b) Angenommen, die beiden Lautsprecher werden neu verbunden, so dass sie die 440-Hz-Schallwellen exakt gegenphasig aussenden. Wo liegen nun Maximum und Minimum der Intensität?

12 Eine bestimmte Hundepfeife hat 23,5 kHz, während eine andere (Marke X) eine unbekannte Frequenz hat. Keine der beiden Pfeifen kann für sich von Menschen gehört werden kann, doch ein schrilles Tönen mit 5000 Hz wird hörbar, wenn beide gleichzeitig ertönen. Schätzen Sie die Frequenz der Hundepfeife der Marke X.

Übungsaufgaben zu 10.8

kompletter Lösungsweg

13 Eine Violinsaite vibriert als Leerseite mit 294 Hz. Mit welcher Frequenz schwingt sie, wenn ein Finger ein Viertel der Länge vom Ende aus gesehen abgreift?

14 Wenn die Grundfrequenz einer Violinsaite 440 Hertz beträgt, wie groß sind dann die Frequenzen der ersten vier Harmonischen?

15 Eine Saite schwingt in Resonanz mit vier Bäuchen bei einer Frequenz von 264 Hertz. Geben Sie mindestens drei weitere Resonanzfrequenzen an.

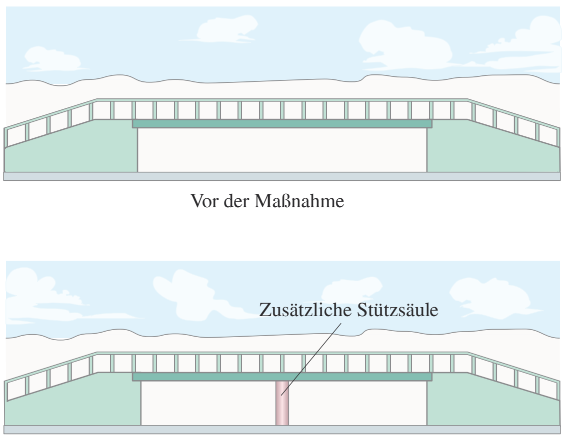


Abbildung 10.52 Aufgabe 16.

16 Eine Autobahnüberführung vibrierte bei einem vertikalen Erdbebenstoß mit 4 Hz in ihrer Resonanzfrequenz ($1/2\lambda$). Das Straßenbaureferat ordnet daraufhin die Errichtung einer im Grund verankerten Stützsäule in der Mitte der Überführung an (► Abbildung 10.52). Welche Resonanzfrequenz erwarten Sie nun für die Überführung? Erdbebenwellen versetzen Objekte nur selten mit Frequenzen deutlich über 5 bis 6 Hertz in Schwingung. Macht die Stützsäule Sinn?

17 Eine Stimmgabel wird über einem vertikalen, mit Wasser gefüllten Rohr in Schwingung versetzt (► Abbildung 10.53). Der Wasserstand kann variiert werden. Man hört die Luftsäule über dem Wasser mit der Stimmgabelfrequenz schwingen, wenn der Abstand zwischen der Rohröffnung und dem Wasserstand 0,125 m bzw. 0,395 m beträgt. Wie groß ist die Frequenz der Stimmgabel?

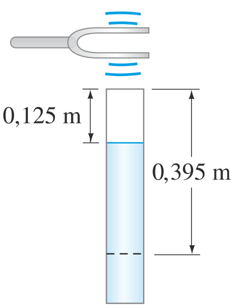


Abbildung 10.53 Aufgabe 17.

18 Zwei Lautsprecher stehen sich in einem langen Korridor an dessen beiden Enden frontal gegenüber. Sie sind mit derselben Quelle verbunden, die einen reinen Ton mit 280 Hz erzeugt. Jemand geht mit einer Geschwindigkeit von 1,4 m/s von einem Lautsprecher zum anderen. Welche „Schwebungs"-Frequenz hört die Person?

19 Eine Orgelpfeife ist 78,0 cm lang. Wie groß sind die Grundschwingung und die ersten drei hörbaren Obertöne, wenn die Pfeife (a) an einem Ende geschlossen und (b) an beiden Ende offen ist?

20 Wenn zwei aufeinanderfolgende Harmonische einer Saite 280 und 350 Hz betragen, wie groß ist dann die Grundfrequenz?

21 Wenn Sie das Wasser in einer Wanne mit der richtigen Frequenz hin und her schwappen lassen, steigt und fällt das Wasser an jedem Ende und ist in der Mitte relativ ruhig. Wie groß ist die Geschwindigkeit der stehenden Wasserwelle, wenn die Wannenlänge 60 cm und die Frequenz 0,85 Hz beträgt?

22 Zwei Wellen werden durch die Funktionen

$$D_1 = D_M \sin(kx - \omega t)$$
$$D_2 = D_M \sin(kx + \omega t)$$

beschrieben, worin $D_M = 0{,}15$ m, $k = 3{,}5\ \text{m}^{-1}$ und $\omega = 1{,}2\ \text{s}^{-1}$ ist. (a) Zeichnen Sie die Wellen von $x = 0$ bis zu einem Punkt ($x > 0$), der die volle Wellenlänge einschließt. Setzen Sie $t = 1{,}0$ s. (b) Zeichnen Sie die Summe der beiden Wellen und bestimmen Sie die Knoten und Bäuche in der Zeichnung. Vergleichen Sie die Zeichnung mit der analytischen (mathematischen) Darstellung.

23 Zeichnen Sie die beiden Wellen und ihre Summe aus Aufgabe 22 als Funktion der Zeit von $t = 0$ bis zu $t = T$ (eine Periode). Setzen Sie (a) $x = 0$ und (b) $x = \lambda/4$. Interpretieren Sie die Ergebnisse.

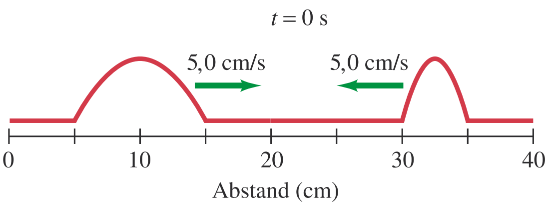


Abbildung 10.54 Aufgabe 24.

24 Zwei gegenläufige Wellenpakete haben die gleiche Geschwindigkeit von 5,0 cm/s (► Abbildung 10.54). Bei $t = 0$ sind die beiden Wellentäler 15 cm voneinander entfernt. Zeichnen Sie die Wellenpakete bei $t = 1{,}0$ s, 2,0 s und 3,0 s.

Übungsaufgaben zu 10.10

kompletter Lösungsweg

25 Wasserwellen treffen auf eine unter Wasser liegende Sandbank, wodurch ihre Geschwindigkeit sich von 2,8 m/s auf 2,5 m/s verringert. Wenn der Kamm der einfallenden Wellen einen Winkel von 40° mit der Sandbank bildet, wie groß ist dann der Brechungswinkel?

26 Für jeden Wellentyp (also auch für Erdbebenwellen), der auf eine Grenzregion zuläuft, gibt es einen maximalen Einfallswinkel, jenseits dessen es keinen durchgelassenen Brechungs-Wellenanteil mehr gibt, vorausgesetzt, dass die Geschwindigkeit im zweiten Medium größer als im ersten Medium ist. Dieser maximale Einfallswinkel θ_{1M} korrespondiert mit einem Brechungswinkel von 90°. Bei $\theta_1 > \theta_{1M}$ wird die gesamte Welle an der Grenze reflektiert und kein Anteil gebrochen. (denn das würde mit $\sin\theta_2 > 1$ korrespondieren, worin θ_2 der Brechungswinkel ist). Man nennt dieses Phänomen *Totalreflexion*. (a) Bestimmen Sie mit Hilfe von Gleichung 10.13 eine Formel für θ_{1M}. (b) Bei welchen Einfallswinkeln gibt es Totalreflexion und keine Transmission für eine Erdbebenwelle *p*, die mit einer Geschwindigkeit von 7,5 km/s auf eine Grenze zweier Felsarten trifft und im zweiten Medium 9,3 km/s schnell ist?

27 Eine Fledermaus fliegt mit einer Geschwindigkeit von 5,0 m/s auf eine Wand zu. Im Flug sendet sie einen Ultraschall mit 30 000 Hz aus. Welche Frequenz hat die reflektierte Welle für die Fledermaus?

28 Auf einer geraden Rennstreckelässt sich die Geschwindigkeit von Autos schätzen, indem man auf den Tonhöhenunterschied des Motors achtet, der zwischen dem Herannahen und wieder Entfernen des Autos besteht. Nehmen Sie an, der Tonhöhenunterschied umfasst eine volle Oktave. Wie schnell fährt dann das Auto?

29 Ein Doppler-Messgerät wird benutzt, um die Fließgeschwindigkeit des Blutes zu bestimmen. Das emittierende und das empfangende Element werden auf der Haut angebracht, wie in ▸ Abbildung 10.55 dargestellt. Typische Schallfrequenzen sind hierbei etwa 5,0 MHz, da sie eine gute Chance haben, von den roten Blutkörperchen reflektiert zu werden. Durch Messung der reflektierten Wellen, die aufgrund der bewegten roten Blutzellen Doppler-verschoben sind, kann die Blutfließgeschwindigkeit abgeleitet werden. Eine „normale" Fließgeschwindigkeit ist etwa 0,1 m/s. Nehmen Sie an, dass eine Arterie teilweise eingeengt ist, so dass die Fließgeschwindigkeit erhöht ist und das Doppler-Gerät eine Verschiebung von 900 Hz nachweist. Wie groß ist die Fließgeschwindigkeit des Bluts in der eingeengten Region? Der effektive Winkel zwischen den Ultraschallwellen (sowohl emittierte als auch reflektierte) und der Richtung des Blutflusses beträgt 45°. Rechnen Sie mit einer Schallgeschwindigkeit in Gewebe von 1540 m/s.

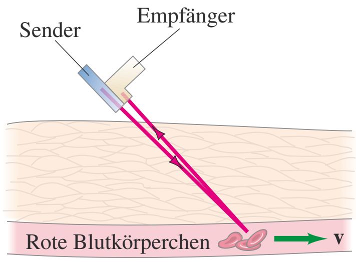


Abbildung 10.55 Aufgabe 29.