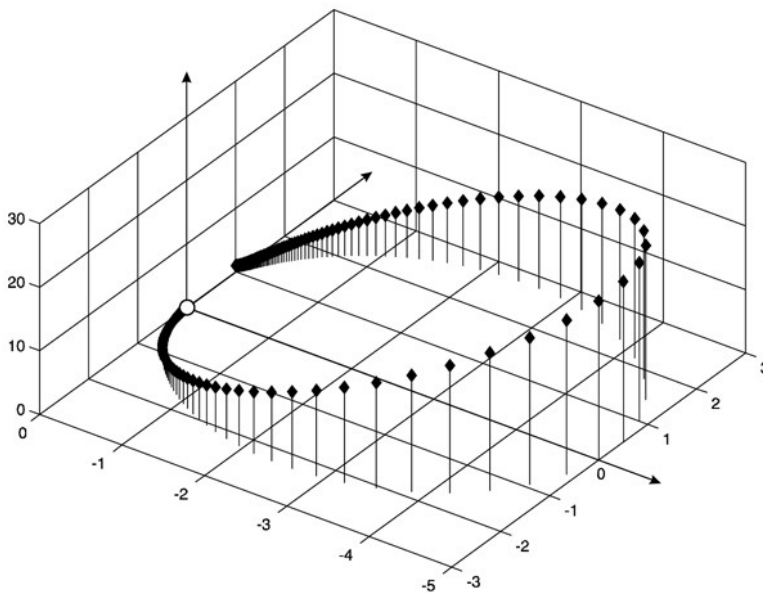




Friedrich U. Mathiak

Strukturdynamik diskreter Systeme





Strukturdynamik diskreter Systeme

von
Prof. Dr.-Ing. Friedrich U. Mathiak

Oldenbourg Verlag München

Prof. Dr.-Ing. Friedrich U. Mathiak war nach seinem Studium des Bauingenieurwesens an der Technischen Universität Berlin Wissenschaftlicher Assistent am 2. Institut für Mechanik. Dort promovierte er über Einflussflächen isotroper schubelastischer Rechteckplatten. Es folgten Forschungstätigkeiten in der Bundesanstalt für Materialforschung und -prüfung (BAM) in Berlin auf dem Gebiet des Strahlungsaustausches schwarzer isothermer Flächen und der dynamischen Untersuchung von Kernkraftwerken. In der sich anschließenden Tätigkeit in der Automobilindustrie war er schwerpunktmäßig auf dem Gebiet der Simulation der Blechumformung tätig. Im Jahre 1994 folgte der Ruf an die Hochschule Neubrandenburg, an der er eine Professur für Technische Mechanik und Bauinformatik inne hat.

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

© 2010 Oldenbourg Wissenschaftsverlag GmbH
Rosenheimer Straße 145, D-81671 München
Telefon: (089) 45051-0
oldenbourg.de

Das Werk einschließlich aller Abbildungen ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung des Verlages unzulässig und strafbar. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Bearbeitung in elektronischen Systemen.

Lektorat: Anton Schmid
Herstellung: Anna Grosser
Coverentwurf: Kochan & Partner, München
Gedruckt auf säure- und chlorfreiem Papier
Gesamtherstellung: Grafik + Druck GmbH, München

ISBN 978-3-486-59738-7

Vorwort

Dieses Buch ist vorgesehen zum Gebrauch in Lehrveranstaltungen der Ingenieurwissenschaften, etwa der Technischen Mechanik, des Bauwesens, des Maschinenbaus, der Elektrotechnik und der Luft- und Raumfahrt. Der Inhalt orientiert sich dabei an den klassischen Schwerpunkten dieser Veranstaltungen. Es gibt zunächst eine gründliche Darstellung der Kinematik des Massenpunktes und der allgemeinen Bewegung des starren Körpers. Im Kapitel Grundlagen der Kinetik erfolgt die Behandlung von Schwerpunktsatz, Drallsatz und Impuls. Anschließend werden die Begriffe Arbeit und Energie eingeführt sowie der Arbeitssatz für starre Körper und die wichtigen Lagrangeschen Bewegungsgleichungen vorgestellt. Beispiele zum mathematischen und physikalischen Einfach- und Doppelpendel zeigen die Herleitung der Schwingungsdifferenzialgleichungen und deren Linearisierung durch Anwendung der abgeleiteten Sätze.

Ein wesentlicher Teil der Ingenieurtätigkeit besteht in der Modellbildung technischer Systeme, die dann mittels mathematischer Methoden einer Lösung zugeführt werden. Um hier unterstützend zu wirken, werden die linearen Grundmodelle Feder, viskoser Dämpfer und deren Reihen- und Parallelschaltungen ausführlich behandelt. Mit diesen Konzepten erfolgt die Herleitung der Grundgleichungen der freien Schwingungen für ungedämpfte und gedämpfte Systeme mit einem und mehreren Freiheitsgraden, die durch eine Fülle von Beispielen abgerundet werden.

Die erzwungenen Schwingungen, die wieder ungedämpft oder gedämpft ablaufen können, nehmen einen breiten Rahmen ein. Spezielle Systemerregungen, dazu gehören der Stoß und die Erregung durch nichtharmonische periodische Kräfte, sind ausführlich abgehandelt. In diesem Zusammenhang ist die Darstellung der äußeren Erregung durch Fourierreihen und die numerische Berechnung der Fourierkoeffizienten von großer Bedeutung. Die Algebraisierung der Bewegungsgleichungen erfordert Integraltransformationen, von denen in der Schwingungslehre die Fouriertransformation und die Laplacetransformation von großer Bedeutung sind. Sie werden deshalb eingehend behandelt und deren Handhabung an Beispielen erklärt.

Das Kapitel Schwingungsisolierung von Gebäuden und Maschinen enthält die beiden Aufgabenstellungen der Quellen- und Empfängerisolierung. Bei sehr kurzen Einwirkungszeiten nichtperiodischer Belastungen, die durch das Versagen von Bauteilen oder den Aufprall eines Festkörpers auf ein Bauwerk entstehen, wird von Stoß- oder Schockbelastungen gesprochen. Diese plötzlich einsetzenden Einwirkungen können zu hohen Beanspruchungen der Konstruktion führen und werden deshalb gesondert betrachtet.

Eine spezielle Systemstruktur bilden die Schwingerketten, die im gesamten Ingenieurwesen von großer praktischer Bedeutung sind. In diesem Zusammenhang wird ein Blockschaltbild zur numerischen Abarbeitung der Bewegungsgleichungen in einem blockorientierten grafischen Simulationssystem für dynamische Systeme entwickelt.

Bei den gedämpften Bewegungen ist aus rechentechnischen Gründen die Entkopplung der Bewegungsgleichungen von Nutzen, da in diesem Fall die Eigenschwingungsformen des ungedämpften Systems erhalten bleiben. Es wird gezeigt, unter welchen Bedingungen eine solche Entkopplung überhaupt möglich ist und sodann an Beispielen zur Modalanalyse dokumentiert. Für den Praktiker sind die Ausführungen zur näherungsweise Berücksichtigung der Dämpfung von Bedeutung.

Neben der Schwingungsisolierung besteht durch Anbringung eines Absorbers eine weitere Möglichkeit, Systeme vor unerwünschten Schwingungen zu schützen. In diesem Zusammenhang erfolgt die Bemessung eines Tilgers sowie eines Schwingungsdämpfers. Für die Bemessung von Torsionswellen und deren Schwingungsreduzierung ist die Wirkung des viskosen Dämpfers von Interesse. Für die Aufgabengebiete der Restaurierung und Modernisierung von Maschinenfundamenten, der elastischen Aufstellung von Gas- und Dieselaggregaten, der Aufstellung von Pressen und Druckmaschinen und der Gründung von Pfahlrostplatten des Bauwesens, stellt das Kapitel Fundamentalschwingungen die allgemeinen Grundgleichungen bereit, die unmittelbar in einem Computerprogramm Verwendung finden können. Neben den räumlichen Systemen wird auch das ebene Problem behandelt.

Die Schwingungsuntersuchungen kontinuierlicher Systeme wie Stäbe, Balken und Platten sind nicht Bestandteil des vorliegenden Buches. Allerdings gestatten die für die diskreten Strukturen entwickelten Grundgleichungen eine näherungsweise Untersuchung von Kontinuumsproblemen. Am Beispiel des Balkens wird ein vielseitig einsetzbares Diskretisierungsverfahren hergeleitet und dessen Güte an Beispielen getestet.

Das Buch schließt mit einem Kapitel zur numerischen Behandlung der Bewegungsgleichungen. Neben der Herleitung einiger erforderlicher Differenzenquotienten werden die für die Strukturtechnik wichtigen Integrationsalgorithmen bereitgestellt und beispielhaft getestet. Die Auflistung der in ihrer Grundstruktur relativ einfach zu programmierenden Integrationsalgorithmen, kann den Studierenden als Anregung zur Erstellung von Parameterstudien dienen.

Da die Aufgaben der Strukturtechnik i. Allg. sehr rechenintensiv und damit überaus fehleranfällig sind, wird den Studierenden empfohlen, sich in ein Computeralgebraprogramm (CAP) einzuarbeiten, was übrigens der Autor auch getan hat. Diese Systeme haben mittlerweile einen hohen Reifegrad erreicht und gestatten dem Anwender, neben der Erzeugung analytischer Lösungen, auch die grafische Ausgabe der Ergebnisse, womit grundsätzliche Einsichten in die Problemstellung vermittelt werden können. Außerdem gestatten sie die für die praktische Anwendung wichtige numerische Bearbeitung von Schwingungsproblemen mittleren Schwierigkeitsgrades. Viele der hier vorgestellten Beispiele, einschließlich der zugehörigen Abbildungen, sind mit einem CAP bearbeitet worden.

Inhalt

Vorwort	V
1 Die Bewegung des Massenpunktes	1
1.1 Die Bogenlänge	2
1.2 Geschwindigkeit und Beschleunigung	3
1.2.1 Kartesische Koordinaten	4
1.2.2 Natürliche Koordinaten (Begleitendes Dreibein)	4
1.2.3 Zylinderkoordinaten	6
1.2.4 Die Kreisbewegung	7
1.2.5 Die geradlinige Bewegung	8
1.2.6 Freiheitsgrade	12
2 Die Bewegung des starren Körpers	13
2.1 Ebene Bewegungen	15
2.1.1 Der Satz vom Momentanzentrum	16
2.2 Die Kinematik der Relativbewegung eines Punktes	19
2.3 Drehtransformationen	23
3 Grundlagen der Kinetik	27
3.1 Newtons Gesetze	27
3.2 Der Schwerpunktsatz	28
3.3 Der Drallsatz	29
3.3.1 Der Drallsatz für starre Körper bei reiner Drehung um einen raumfesten Punkt	31
3.3.2 Der Drallsatz bei einer allgemeinen Bewegung des starren Körpers	35
3.3.3 Der Drallsatz für die ebene Bewegung eines starren Körpers	35
3.3.4 Unwuchtwirkungen	38
3.3.5 Transformationsformeln für Massenmomente	40
3.3.6 Hauptachsentransformation	43
3.3.7 Beispiele zur Berechnung von Massenträgheitsmomenten	45
3.4 Der Impuls	48

4	Der Arbeits- und Energiebegriff	51
4.1	Die Arbeit einer Kraft	51
4.1.1	Die Arbeit eines Kräftepaars	52
4.1.2	Das Potenzial einer Kraft	52
4.1.3	Das Potenzial einer Gewichtskraft	53
4.1.4	Das Potenzial einer Federkraft	54
4.2	Die Kinetische Energie	55
4.2.1	Die Leistung einer Kraft.....	58
4.3	Der Arbeitssatz für starre Körper	59
4.4	Die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen.....	61
4.5	Das Prinzip der virtuellen Verrückung.....	64
4.6	Das d'Alembertsche Prinzip	68
5	Das Pendel	71
5.1	Das mathematische Pendel.....	71
5.2	Das mathematische Doppelpendel	77
5.3	Das physische Pendel.....	78
5.3.1	Die Schnittlasten in einem schwingenden Stab.....	82
5.4	Das physische Doppelpendel	84
6	Modellbildung	89
6.1	Grundmodelle.....	91
6.1.1	Die lineare Feder (Hooke-Modell).....	92
6.1.2	Der lineare Dämpfer (Newton-Modell).....	93
6.1.3	Das Trockenreibungselement (St.-Venant-Modell)	93
6.1.4	Reihen- und Parallelschaltung von Federn.....	94
6.1.5	Reihenschaltung von Feder und Dämpfer (Maxwell-Modell)	95
6.1.6	Parallelschaltung von Feder und Dämpfer (Kelvin-Modell).....	100
6.1.7	Parallelschaltung von Feder und Maxwell-Modell (Standard-Modell).....	103
6.1.8	Reihenschaltung von Feder und Trockenreibungselement (Prandtl-Modell).....	107
7	Schwingungen	109
7.1	Darstellung von Schwingungsvorgängen.....	111
7.2	Einteilung der Schwingungen	112
7.3	Harmonische Schwingungen.....	113
7.3.1	Überlagerung harmonischer Schwingungen	114
7.4	Die komplexe Zeigerdarstellung bei harmonischen Schwingungen	121

8	Freie Schwingungen mit einem Freiheitsgrad	125
8.1	Der ungedämpfte Einmassenschwinger.....	125
8.1.1	Berücksichtigung des Eigengewichts der Masse m	127
8.1.2	Kontinuierliche Systeme und ihre äquivalenten Einmassenschwinger	131
8.1.3	Angenäherte Berücksichtigung der Federmasse.....	134
8.1.4	Angenäherte Berücksichtigung der Masse eines Biegeträgers	135
8.1.5	Angenäherte Berücksichtigung der Masse eines Torsionsstabes.....	138
8.2	Der viskos gedämpfte Einmassenschwinger	139
9	Erzwungene Schwingungen für Systeme mit einem Freiheitsgrad	153
9.1	Erzwungene ungedämpfte Schwingungen.....	153
9.2	Die Vergrößerungsfunktion.....	156
9.3	Erzwungene gedämpfte Bewegungen	159
9.4	Die komplexe Zeigerdarstellung bei erzwungenen gedämpften Schwingungen	166
9.5	Näherungsweise Ermittlung des Dämpfungsgrades	172
10	Spezielle Systemerregungen	175
10.1	Randerregung einer Masse über Feder und Dämpfer	175
10.2	Fußpunkterregung	179
10.3	Bewegungsmessungen.....	183
10.4	Felderregung von Feder und Dämpfer durch eine Unwucht	188
10.5	Erregung durch eine Sprungfunktion	192
10.6	Erregung durch einen Rechteckstoß.....	196
10.7	Der ideale Rechteckstoß.....	199
10.8	Die Diracsche Delta-Funktion.....	200
10.9	Allgemeine Erregerfunktionen	202
10.10	Der Stoß	209
10.10.1	Der gerade zentrale Stoß	211
10.10.2	Der schiefe zentrale Stoß.....	213
10.10.3	Der exzentrische Stoß.....	214
10.10.4	Stoßbelastungen an Trägern	216
11	Erregung durch nichtharmonische periodische Kräfte	221
11.1	Fourierreihen	221
11.2	Numerische Berechnung der Fourierkoeffizienten.....	234
11.3	Die Fouriertransformation	239
11.4	Die Laplacetransformation	252

12	Schwingungsisolierung von Gebäuden und Maschinen	257
12.1	Quellenisolierung	258
12.2	Empfängerisolierung	261
12.3	Isolierung von Stößen	263
13	Ungedämpfte Schwingungen für Systeme mit endlich vielen Freiheitsgraden	273
13.1	Freie ungedämpfte Schwingungen mit speziell zwei Freiheitsgraden	273
13.2	Freie ungedämpfte Schwingungen mit allgemein n Freiheitsgraden	286
13.2.1	Das allgemeine und das spezielle Matrizen-Eigenwertproblem	293
13.2.2	Entkopplung der Bewegungsgleichungen	297
13.3	Erzwungene ungedämpfte Bewegungen	311
13.3.1	Entwicklung der Lösung nach Eigenvektoren	311
13.3.2	Harmonische Belastungen	318
13.3.3	Periodische Belastungen	323
13.3.4	Anwendung der Modalanalyse	324
14	Gedämpfte Bewegungen	329
14.1	Freie gedämpfte Bewegungen	329
14.1.1	Transformation in ein System 1. Ordnung	335
14.1.2	Entkopplung der Bewegungsgleichungen	339
14.1.3	Näherungsweise Berücksichtigung der Dämpfung	350
14.2	Erzwungene gedämpfte Bewegungen	358
14.2.1	Transformation in ein System 1. Ordnung	362
14.2.2	Entkopplung der Bewegungsgleichungen	363
14.2.3	Periodische Erregerbelastungen	366
14.3	Schwingerketten	371
15	Schwingungsabsorption	377
15.1	Der Tilger	377
15.2	Der Schwingungsdämpfer	387
15.3	Der viskose Dämpfer	395
16	Fundamentalschwingungen	399
16.1	Die Bewegungsgleichungen	399
17	Näherungsverfahren für den Balken	417
17.1	Ein einfaches Diskretisierungsverfahren	417
17.2	Näherungsweise Berechnung der Eigenfrequenzen nach Rayleigh-Ritz	424
17.3	Näherungslösung mit dem d'Alembertschen Prinzip	427

18	Numerische Behandlung der Bewegungsgleichungen	433
18.1	Differenzenquotienten	436
18.2	Das Eulersche Polygonzugverfahren.....	438
18.3	Die Sehnen-Trapezregel (Verfahren von Heun).....	442
18.4	Das klassische Runge-Kutta-Verfahren.....	443
18.5	Das Verfahren der finiten Differenzen für Differenzialgleichungen 2. Ordnung...	446
18.6	Das Newmark-Verfahren	448
18.7	Das Verfahren von Adams-Bashforth	453
	Literaturverzeichnis	457
	Sachverzeichnis	467

1 Die Bewegung des Massenpunktes

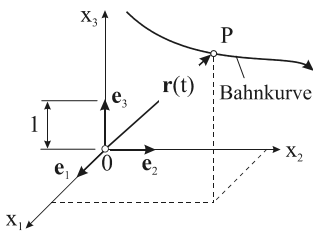


Abb. 1.1 Punktbeziehung im Raum

Die Kinematik oder Bewegungslehre beschäftigt sich, im Unterschied zur Dynamik und Kinetik, mit der Untersuchung und Beschreibung von Bewegungen, ohne Bezug auf ihre Ursachen zu nehmen, nämlich die sie bewirkenden Kräfte. Die einfachste Körperstruktur im Bereich der Kinematik ist der Massenpunkt, eine abstrahierte Form eines Volumens ohne räumliche Ausdehnung. Die Beschreibung der Lage eines Punktes P im Raum erfolgt durch einen Vektor, der relativ zu einem festen Punkt 0 gemessen wird (Abb. 1.1). Beim Durchlaufen des Parameters t beschreibt die Spitze des Ortsvektors $\mathbf{r}(t)$ eine Raumkurve, die Bahnkurve genannt wird.

Zur Festlegung von Betrag und Richtung wird eine Basis benötigt, die rechtwinklig (orthogonal) oder auch schiefwinklig sein kann. Im Fall orthogonaler Einheitsvektoren \mathbf{e}_j ($j = 1, 2, 3$) sprechen wir von einer kartesischen Basis. Die Lage des Punktes P, und damit auch seine Bewegung, ist für alle Zeiten t bekannt, wenn beispielsweise seine kartesischen Koordinaten $x_j(t)$ bekannt sind. Der Ortsvektor erscheint dann in der Darstellung

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = \sum_{j=1}^3 x_j(t) \mathbf{e}_j = x_1(t) \mathbf{e}_1 + x_2(t) \mathbf{e}_2 + x_3(t) \mathbf{e}_3 = [x_1(t), x_2(t), x_3(t)]^T$$

Den Betrag des Vektors \mathbf{r} , also seine Länge, ermitteln wir bei einer orthonormalen Basis zu $r(t) = |\mathbf{r}(t)| = \sqrt{\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}(t)} = \sqrt{x_1^2(t) + x_2^2(t) + x_3^2(t)}$. Seine Richtung können wir festlegen, indem wir die Winkel α_j angeben, die \mathbf{r} mit den Basisvektoren \mathbf{e}_j einschließt. Wir erhalten mit

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_j = x_j = r \cos \alpha_j \quad \text{und unter Beachtung von} \quad r^2 = \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = \sum_{j=1}^3 x_j^2 = r^2 \sum_{j=1}^3 \cos^2 \alpha_j$$

die Bedingung $\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2 + \cos^2 \alpha_3 = 1$, womit die drei Winkel α_j nicht unabhängig voneinander sind.

1.1 Die Bogenlänge

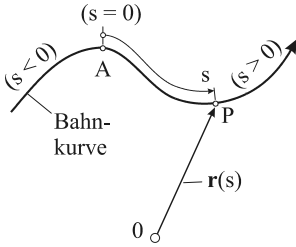


Abb. 1.2 Die Bogenlänge

Eine weitere Möglichkeit zur Beschreibung der Bewegung eines Punktes besteht darin, den Parameter t (die Zeit) in der Beschreibung der Bahnkurve durch die Bogenlänge s zu ersetzen (Abb. 1.2), die von einem beliebigen Anfangspunkt (A) gemessen werden kann. Die Bewegung ist dann durch die Vorgabe der Weg-Zeit-Funktion $s = s(t)$ eindeutig festgelegt. Die Herstellung des Zusammenhangs zwischen den Parametern t und s erfolgt mathematisch durch die Parametertransformation $t = t(s)$, wobei immer $dt/ds \neq 0$ unterstellt wird. Die neue Darstellung der Kurve lautet dann $\mathbf{r}(t(s)) = \hat{\mathbf{r}}(s)$. Die Verbindung des abgeleiteten Vektors $d\hat{\mathbf{r}}(s)/ds = \hat{\mathbf{r}}'(s)$ mit dem Vektor der Geschwindigkeit $d\mathbf{r}(t)/dt = \dot{\mathbf{r}}(t)$ gelingt mithilfe der Kettenregel $\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{ds} = \frac{d}{ds} \mathbf{r}(t(s)) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \frac{dt}{ds} = \dot{\mathbf{r}} \frac{dt}{ds}$, also $d\hat{\mathbf{r}}(s) = \dot{\mathbf{r}} dt = d\mathbf{r}(t)$, womit das 1. Ortsvektordifferenzial parameterinvariant ist. Beachten wir $d\mathbf{r}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t) dt$ und $d\hat{\mathbf{r}}(s) = \hat{\mathbf{r}}'(s) ds$, dann folgt $\dot{\mathbf{r}}^2(t) dt^2 = \hat{\mathbf{r}}'^2(s) ds^2$. Der ausgezeichnete Parameter s , für den $\hat{\mathbf{r}}'^2(s) = 1$ gilt, heißt Bogenlänge der Bahnkurve. Der Tangentenvektor $\hat{\mathbf{r}}'$ hat die feste Länge 1, und für das Quadrat des Bogendifferenzials folgt $ds^2 = \dot{\mathbf{r}}^2(t) dt^2$ und damit $ds = |\dot{\mathbf{r}}| dt$. Durch Summation aller Linienelemente ds zwischen den Zeitpunkten t_0 und t erhalten wir die Länge der Bahnkurve

$$s = \int_{t_0}^t |\dot{\mathbf{r}}(\tau)| d\tau = s(t) \quad (1.1)$$

Der Punkt t_0 bezeichnet den willkürlich festgelegten Anfangspunkt (Punkt A in Abb. 1.2) der Kurve, womit die Bogenlänge s nur bis auf eine Konstante festgelegt ist.

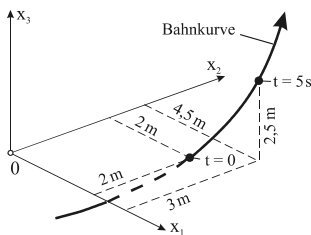


Abb. 1.3 Beispiel zur Bogenlänge

Die Bewegung eines Punktes P wird durch den Ortsvektor $\mathbf{r}(t) = [a + bt^2 \quad a + ct \quad bt^2]^T$ mit $a = 2,0 \text{ m}$, $b = 0,1 \text{ ms}^{-2}$, $c = 0,2 \text{ ms}^{-1}$ beschrieben. Gesucht wird die Bogenlänge s zur Zeit $t = 5 \text{ s}$, wenn wir diese bei $t = 0$ zu zählen beginnen. Mit $\dot{\mathbf{r}}(t) = [2bt \quad c \quad 2bt]^T$ ist

Die abgeleiteten Vektoren $\dot{\mathbf{r}}$ und $\hat{\mathbf{r}}'$ haben die geometrische Bedeutung des Tangentenvektors an die Bahnkurve. Wird also die Bogenlänge s als Parameter gewählt, so hat $\hat{\mathbf{r}}'$ bereits den Betrag 1. Ist $\mathbf{r}(t)$ oder auch $\hat{\mathbf{r}}(s)$ für alle Zeiten t bekannt, so kann die (relative) Lage des Punktes P zu jeder Zeit ermittelt werden.

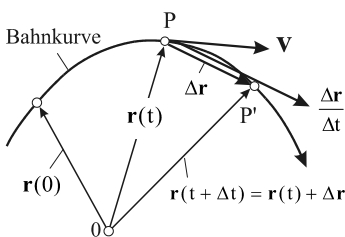
Beispiel 1-1:

$$s(t) = \int_{t_0}^t |\dot{\mathbf{r}}(\tau)| d\tau = \int_0^t \sqrt{8b^2\tau^2 + c^2} d\tau = c \int_0^t \sqrt{\left(\frac{\sqrt{8}b\tau}{c}\right)^2 + 1} d\tau = \frac{c}{\kappa} \int_0^{\kappa t} \sqrt{\tilde{\tau}^2 + 1} d\tilde{\tau};$$

$$\tilde{\tau} = \kappa\tau, \kappa = \frac{\sqrt{8}b}{c} = 1,4 \text{ ls}^{-1}; s(t) = \frac{c}{2\kappa} [\kappa t \sqrt{(\kappa t)^2 + 1} + \text{arcsinh}(\kappa t)]$$

und mit den Werten des Beispiels folgt $s(t = 5 \text{ s}) = 3,76 \text{ m}$.

1.2 Geschwindigkeit und Beschleunigung



Im Zeitintervall Δt gelangt der Punkt P (Abb. 1.4) von der durch $\mathbf{r}(t)$ gekennzeichneten Stelle zum durch den Ortsvektor $\mathbf{r}(t + \Delta t) = \mathbf{r}(t) + \Delta \mathbf{r}$ beschriebenen Punkt P'.

Der Ortsvektor \mathbf{r} ändert dabei nicht nur seinen Betrag, sondern auch seine Richtung. Der Differenzenquotient $\bar{\mathbf{v}} = \Delta \mathbf{r} / \Delta t$ wird Vektor der mittleren Geschwindigkeit genannt, und der dem Zeitpunkt t zugeordnete Geschwindigkeitsvektor \mathbf{v} ist durch den Grenzwert

$$\mathbf{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \bar{\mathbf{v}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}}$$

Abb. 1.4 Die Geschwindigkeit

definiert, wobei wir die Zeitableitung im Folgenden durch einen aufgesetzten Punkt kennzeichnen. Der Geschwindigkeitsvektor \mathbf{v} ist also ein Maß für die zeitliche Lageänderung von P. Er tangiert die Bahnkurve im Punkte P. Geometrisch ist dann sofort einleuchtend, dass

$$\mathbf{e}_t = \dot{\mathbf{r}} / |\dot{\mathbf{r}}| \quad (1.2)$$

den Tangenteneinheitsvektor an die Bahnkurve darstellt. Für $v = |\mathbf{v}| = \text{konst.}$ liegt eine gleichförmige Bewegung vor. Hat der Geschwindigkeitsvektor \mathbf{v} während des Bewegungsvorganges eine konstante Richtung, so handelt es sich um eine geradlinige Bewegung.

$[\mathbf{r}] = \text{Länge}$, Einheit: m; $[\mathbf{v}] = \text{Länge/Zeit}$, Einheit: ms^{-1}

Bei Zunahme der Zeit t um Δt ändert mit $\mathbf{v}(t + \Delta t) = \mathbf{v}(t) + \Delta \mathbf{v}$ der Geschwindigkeitsvektor \mathbf{v} i. Allg. sowohl seinen Betrag als auch seine Richtung. Wir definieren zunächst den Vektor der mittleren Beschleunigung $\bar{\mathbf{b}} = \Delta \mathbf{v} / \Delta t$, aus dem durch Grenzübergang $\Delta t \rightarrow 0$ der dem Zeitpunkt t zugeordnete Beschleunigungsvektor

$$\mathbf{b}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \bar{\mathbf{b}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}} = \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2}$$

hervorgeht. Der Beschleunigungsvektor $\mathbf{b}(t)$ ist definiert als die zeitliche Änderung des Geschwindigkeitsvektors $\mathbf{v}(t)$. Er tangiert die Bahnkurve i. Allg. nicht. Ist $\mathbf{r}(t)$ gegeben, so ist auch $\mathbf{b}(t)$ bekannt. Geschwindigkeit und Beschleunigung eines Punktes können nun in verschiedenen Koordinatensystemen dargestellt werden.

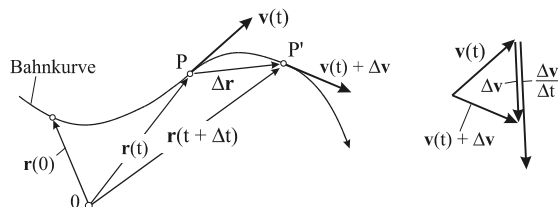


Abb. 1.5 Die Beschleunigung

1.2.1 Kartesische Koordinaten

Wir beziehen uns auf eine Orthonormalbasis \mathbf{e}_j ($j=1, 2, 3$), deren Einheitsvektoren zeitlich konstant sind, dann gilt für den Ortsvektor

$$\mathbf{r} = x_1(t)\mathbf{e}_1 + x_2(t)\mathbf{e}_2 + x_3(t)\mathbf{e}_3 = [x_1(t) \quad x_2(t) \quad x_3(t)]^T$$

Geschwindigkeit und Beschleunigung folgen daraus durch Ableitung nach der Zeit t

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{x}_1\mathbf{e}_1 + \dot{x}_2\mathbf{e}_2 + \dot{x}_3\mathbf{e}_3 = [\dot{x}_1 \quad \dot{x}_2 \quad \dot{x}_3]^T$$

$$\mathbf{b} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \ddot{x}_1\mathbf{e}_1 + \ddot{x}_2\mathbf{e}_2 + \ddot{x}_3\mathbf{e}_3 = [\ddot{x}_1 \quad \ddot{x}_2 \quad \ddot{x}_3]^T$$

1.2.2 Natürliche Koordinaten (Begleitendes Dreibein)

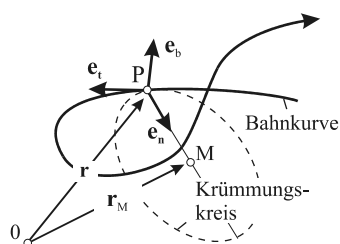


Abb. 1.6 Natürliche Koordinaten

Um bei einer allgemeinen räumlichen Bewegung eine Vorstellung von der Lage des Beschleunigungsvektors zur Bahnkurve zu bekommen, beziehen wir uns auf die spezielle Orthonormalbasis $\mathbf{e}_t, \mathbf{e}_n, \mathbf{e}_b$ (Abb. 1.6). Diese Einheitsvektoren sind mit dem sich auf der Bahnkurve bewegendem Punkt P fest verbunden. Wie wir sehen werden, erscheinen dann Geschwindigkeit und Beschleunigung in einer sehr einfachen Form. Der Geschwindigkeitsvektor $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ tangiert bekanntlich im Punkt P die Bahnkurve. Durch Normierung auf den Betrag 1 folgt daraus der Tangenteneinheitsvektor

$\mathbf{e}_t = \dot{\mathbf{r}}/|\dot{\mathbf{r}}|$. Beachten wir $d\mathbf{e}_t^2/dt = \dot{\mathbf{e}}_t \cdot \dot{\mathbf{e}}_t = 0 = 2\mathbf{e}_t \cdot \dot{\mathbf{e}}_t$, dann folgt mit $\dot{\mathbf{e}}_t \perp \mathbf{e}_t$ unmittelbar $d\mathbf{e}_t \perp \mathbf{e}_t dt$, und damit ergibt sich wegen $d\mathbf{e}_t = \dot{\mathbf{e}}_t dt$ der Hauptnormaleneinheitsvektor $\mathbf{e}_n = \dot{\mathbf{e}}_t/|\dot{\mathbf{e}}_t|$.

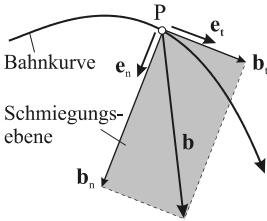


Abb. 1.7 Der Beschleunigungsvektor

Die Vektoren \mathbf{e}_t und \mathbf{e}_n liegen in der Schmiegungeebene. Der Binormaleneinheitsvektor \mathbf{e}_b soll nun senkrecht auf \mathbf{e}_t und \mathbf{e}_n stehen, was durch $\mathbf{e}_b = \mathbf{e}_t \times \mathbf{e}_n$ erreicht wird, und die Basisvektoren $\mathbf{e}_t, \mathbf{e}_n, \mathbf{e}_b$ bilden dann in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem. Aus dem Betrag des Geschwindigkeitsvektors

$$v = |\mathbf{v}| = |\dot{\mathbf{r}}| = \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| = \frac{ds}{dt} = \dot{s}$$

folgt mit der Kenntnis, dass \mathbf{v} die Bahnkurve tangiert der Geschwindigkeitsvektor $\mathbf{v} = \dot{s} \mathbf{e}_t$. Durch Ableitung nach der Zeit erhalten wir daraus zunächst $\mathbf{b} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{s} \mathbf{e}_t + \dot{s} \dot{\mathbf{e}}_t$. Die Darstellung von $\dot{\mathbf{e}}_t$ durch die Einheitsvektoren selbst, gelingt mittels der Frénetschen Formeln

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}}{ds} &= \mathbf{e}_t; & \frac{d\mathbf{e}_t}{ds} &= \kappa \mathbf{e}_n; & \frac{d\mathbf{e}_b}{ds} &= -\tau \mathbf{e}_n; & \frac{d\mathbf{e}_n}{ds} &= \tau \mathbf{e}_b - \kappa \mathbf{e}_t \\ \kappa &= \frac{|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}|}{|\dot{\mathbf{r}}|^3}; & \tau &= \frac{(\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}) \cdot \ddot{\mathbf{r}}}{|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}|^2} \end{aligned} \quad (1.3)$$

Sie beschreiben die Änderungen der Basisvektoren $\mathbf{e}_t, \mathbf{e}_n, \mathbf{e}_b$ mit der Bogenlänge s .

κ : Krümmung, ein Maß für die Änderung des Tangentenvektor \mathbf{e}_t

τ : Torsion, ein Maß für die Änderung des Binormaleneinheitsvektor \mathbf{e}_b

Beachten wir $\frac{d\mathbf{e}_t}{dt} = \frac{d\mathbf{e}_t}{ds} \frac{ds}{dt} = \dot{s} \kappa \mathbf{e}_n$, dann folgen für Geschwindigkeit und Beschleunigung

$$\mathbf{v} = \dot{s} \mathbf{e}_t, \quad \mathbf{b} = \ddot{s} \mathbf{e}_t + \kappa \dot{s}^2 \mathbf{e}_n \quad (1.4)$$

Während der Geschwindigkeitsvektor \mathbf{v} die Bahnkurve tangiert, liegt der Beschleunigungsvektor \mathbf{b} zwar in der durch die Einheitsvektoren \mathbf{e}_t und \mathbf{e}_n aufgespannten Schmiegungeebene (Abb. 1.7), er tangiert jedoch die Bahnkurve i. Allg. nicht. Man nennt die Komponenten

$$\mathbf{b}_t = \ddot{s} \mathbf{e}_t = \dot{v} \mathbf{e}_t \quad \text{Tangentialbeschleunigung}$$

$$\mathbf{b}_n = \kappa \dot{s}^2 \mathbf{e}_n = \kappa v^2 \mathbf{e}_n \quad \text{Normal- oder Zentripetalbeschleunigung}$$

Da κv^2 stets positiv ist, zeigt der Vektor der Normalbeschleunigung \mathbf{b}_n immer zur konkaven Seite der Bahnkurve, er ist also stets im Sinne von \mathbf{e}_n zum momentanen Krümmungsmittelpunkt M (Abb. 1.6) hin gerichtet. Dagegen zeigt \mathbf{b}_t in Richtung von \mathbf{t} oder entgegengesetzt, je nachdem ob $b_t > 0$ oder < 0 ist.

1.2.3 Zylinderkoordinaten

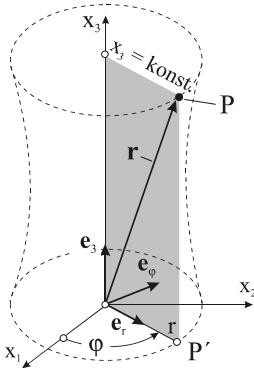


Abb. 1.8 Zylinderkoordinaten

Das Basissystem der Koordinaten r, φ, z des Punktes P besteht aus den drei orthogonalen Einheitsvektoren $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z)$. Die Koordinaten r und φ entsprechen den ebenen Polarkoordinaten des Punktes P' , die wir aus der Projektion von P in die (x_1, x_2) -Ebene erhalten. Die Flächen $r = \text{konst.}$ sind Kreiszyylinder mit einer gemeinsamen Zentralachse x_3 . Damit ist $\mathbf{r}(P, t) = r(t)\mathbf{e}_r(t) + x_3(t)\mathbf{e}_3$ wobei noch $\varphi = \varphi(t)$ zu beachten ist. Formales differenzieren liefert unter Beachtung von $\dot{\mathbf{e}}_3 = 0$ und $\ddot{\mathbf{e}}_3 = 0$

$$\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\mathbf{e}}_r + \dot{x}_3\mathbf{e}_3; \quad \mathbf{b} = \ddot{r}\mathbf{e}_r + 2\dot{r}\dot{\mathbf{e}}_r + r\ddot{\mathbf{e}}_r + \ddot{x}_3\mathbf{e}_3$$

Wegen $\mathbf{e}_r = \cos\varphi\mathbf{e}_1 + \sin\varphi\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_\varphi = -\sin\varphi\mathbf{e}_1 + \cos\varphi\mathbf{e}_2$ und $\varphi = \varphi(t)$ sind diese Einheitsvektoren ebenfalls Funktionen

der Zeit, und es gelten die folgenden Differenzierungsregeln

$$\dot{\mathbf{e}}_r = \frac{d\mathbf{e}_r}{dt} = \frac{d\mathbf{e}_r}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}(-\sin\varphi\mathbf{e}_1 + \cos\varphi\mathbf{e}_2) = \dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi$$

$$\dot{\mathbf{e}}_\varphi = \frac{d\mathbf{e}_\varphi}{dt} = \frac{d\mathbf{e}_\varphi}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}(-\cos\varphi\mathbf{e}_1 - \sin\varphi\mathbf{e}_2) = -\dot{\varphi}\mathbf{e}_r$$

$$\ddot{\mathbf{e}}_r = \ddot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi + \dot{\varphi}\dot{\mathbf{e}}_\varphi = \ddot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi - \dot{\varphi}^2\mathbf{e}_r, \quad \ddot{\mathbf{e}}_\varphi = -\ddot{\varphi}\mathbf{e}_r - \dot{\varphi}^2\mathbf{e}_\varphi$$

Damit erhalten wir $\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi + \dot{x}_3\mathbf{e}_3$, $\mathbf{b} = \ddot{r}\mathbf{e}_r + 2\dot{r}\dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi + r(\ddot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi - \dot{\varphi}^2\mathbf{e}_r) + \ddot{x}_3\mathbf{e}_3$ und in Komponenten

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= [v_r \quad v_\varphi \quad v_3]^T = [\dot{r} \quad r\dot{\varphi} \quad \dot{x}_3]^T \\ \mathbf{b} &= [b_r \quad b_\varphi \quad b_3]^T = [\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 \quad r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} \quad \ddot{x}_3]^T \end{aligned} \tag{1.5}$$

1.2.4 Die Kreisbewegung

Bewegt sich ein Punkt P auf einer ebenen Bahn (Normalenvektor \mathbf{e}_3) mit konstanten Werten für x_3 und $r = a$ (Abb. 1.9), dann handelt es sich um eine Kreisbewegung, für die $\dot{x}_3 = \ddot{x}_3 = 0$ und $\dot{r} = \ddot{r} = 0$ gelten. Von (1.5) verbleiben

$$\mathbf{v} = [v_r \quad v_\varphi \quad v_3]^T = [0 \quad a\dot{\varphi} \quad 0]^T, \quad \mathbf{b} = [b_r \quad b_\varphi \quad b_3]^T = [-a\dot{\varphi}^2 \quad a\ddot{\varphi} \quad 0]^T$$

Die zeitliche Änderung des Winkels φ , also $\dot{\varphi} = d\varphi/dt$, heißt Winkelgeschwindigkeit.

$[\dot{\varphi}] = 1/\text{Zeit}$, Einheit: s^{-1} .

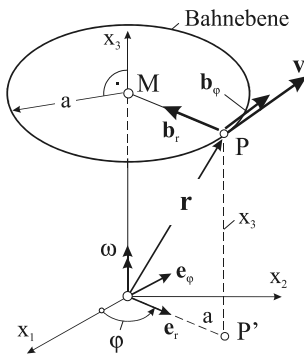


Abb. 1.9 Kreisbewegung eines Punktes P

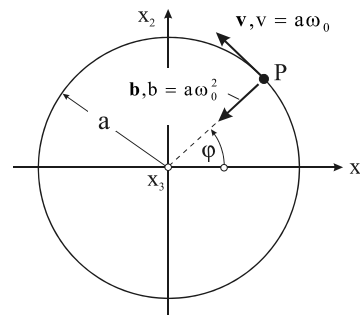


Abb. 1.10 Kreisbewegung mit $\omega_0 = \text{konst.}$

Sie wird auch mit ω bezeichnet. Die Geschwindigkeit von P ist dann

$$\mathbf{v} = a\dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi = a\omega \mathbf{e}_\varphi = v_\varphi \mathbf{e}_\varphi$$

$v_\varphi = a\dot{\varphi} = a\omega$ heißt Bahngeschwindigkeit des Punktes P. Durch Einführung des Winkelgeschwindigkeitsvektors $\omega = \omega \mathbf{e}_3$, der senkrecht auf der Bahnebene steht (Abb. 1.9), lässt sich die Geschwindigkeit des Punktes P auch wie folgt schreiben

$$\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{r} = \omega \mathbf{e}_3 \times (a \mathbf{e}_r + x_3 \mathbf{e}_3) = a\omega \mathbf{e}_\varphi$$

und für die Beschleunigung ergibt sich

$$\mathbf{b} = \dot{\mathbf{v}} = a\dot{\omega} \mathbf{e}_\varphi + a\omega \dot{\mathbf{e}}_\varphi = a\dot{\omega} \mathbf{e}_\varphi - a\omega^2 \mathbf{e}_r$$

Die zeitliche Änderung der Winkelgeschwindigkeit, also $\ddot{\varphi} = d\dot{\varphi}/dt = d^2\varphi/dt^2 = \dot{\omega}$, heißt Winkelbeschleunigung.

$[\ddot{\varphi}] = 1/(\text{Zeit})^2$, Einheit: s^{-2}