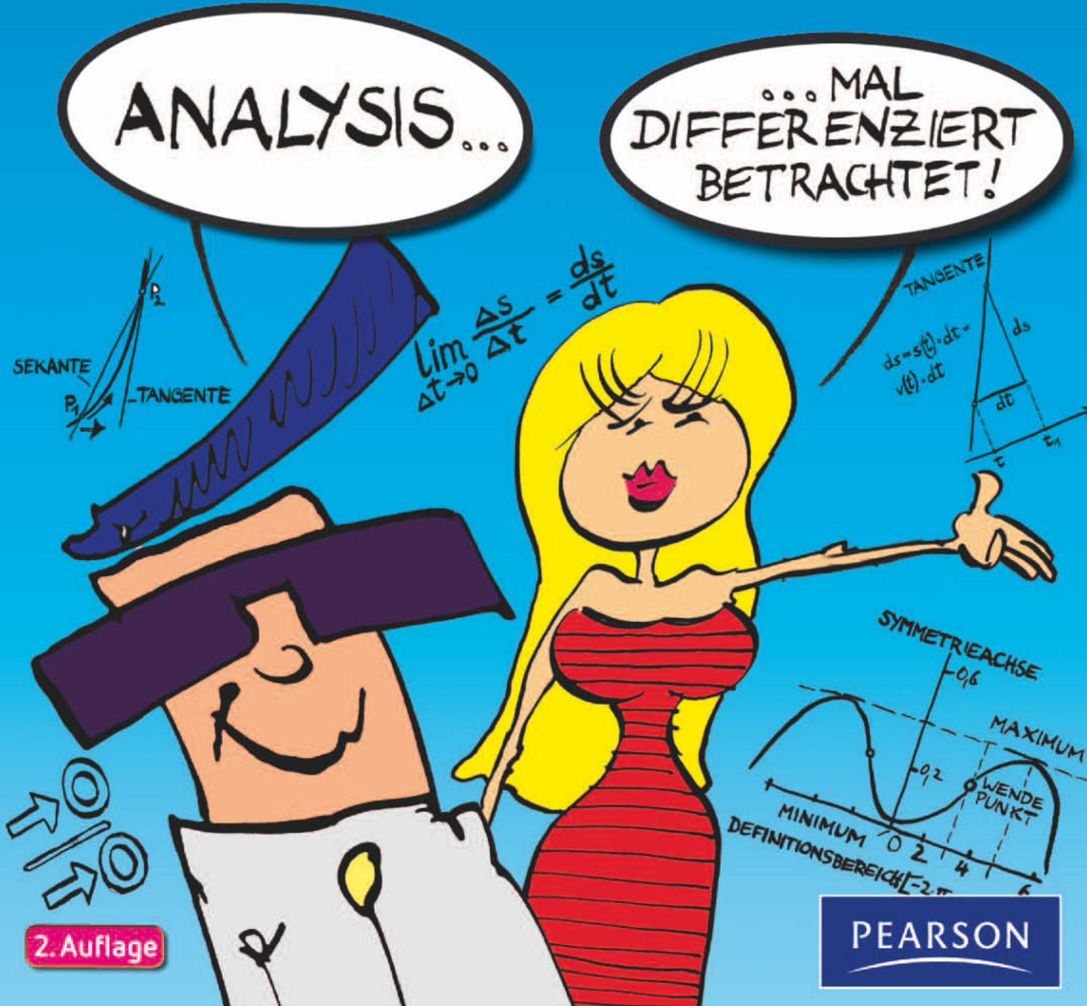
HEINZ PARTOLL, IRMGARD WAGNER
ILLUSTRIERT VON PETER FEJES

MATHE macchiato ANALYSIS

Fit für's Abi

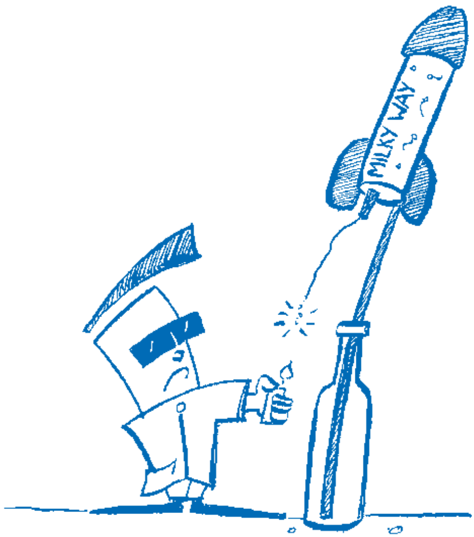


2. Auflage

PEARSON

Grundlegende Differenziationsregeln

Die ersten neuen Maschinen



Um es kurz zu sagen: Mit der Differenzialrechnung ging in der Physik und Technik die Post ab. Aber die Anwendung verlangt Verallgemeinerungen d.h. Regeln.

Bisher hatten wir t für die Zeit und s bzw. $s(t)$ für den Weg geschrieben. Abstrakt verwendet der Mathematiker die Buchstaben x und y bzw. $y(x)$ oder $f(x)$.

Die **Voraussetzung** für das **Differenzieren** ist, dass die Funktion $y = f(x)$ „glatt“ ist. Das ist genau dort der Fall, wo eine eindeutige Tangente existiert!

Ich kann keine Tangenten ziehen, wenn die Funktion eine Lücke hat oder springt oder einen Knick hat.

Wenn diese Voraussetzungen für das Differenzieren erfüllt sind, können wir ab(g)leiten.

Jetzt geht's los: Wir suchen die Verallgemeinerung, d.h. die **Regeln**.

Dazu erweitern wir unser Team:

Unseren stummen Diener „TRA-FO" können wir oben mit einer Funktion füttern und unten kommt die differenzierte Funktion heraus. Zugleich zeigt er uns in der linken Hand das **Piktogramm**, das für diese Regel steht. Ein rechteckiges Piktogramm zeigt eine Regel für eine spezielle Funktion an (z.B. die Potenzfunktion oder den Sinus), ein rundes steht für eine allgemeine Regel (z.B. Differenzieren einer Summe, eines Produkts, etc.).

Beim freien Fall haben wir gesehen, dass aus der Funktion

$$y = 5 \cdot x^2$$

durch Differenzieren die Ableitungsfunktion

$$y' = 10 \cdot x$$

entsteht. Aus dieser haben wir wieder durch Differenzieren

$$y'' = 10$$

erhalten.

Wenn wir uns diese drei Gesetze genauer ansehen, drängt sich die Frage auf, ob nicht auch das Differenzieren selbst einer gewissen Gesetzmäßigkeit gehorcht.

Wie entsteht aus $5 \cdot x^2$ die Funktion $10 \cdot x$ und daraus wieder die konstante Funktion 10?

Offensichtlich nimmt der Exponent der Potenzfunktion immer um eins ab; aus x^2 wird $x^1 = x$ und aus x^1 wird $x^0 = 1$. Wie aber wird aus 5 die Zahl 10?

Die einzig vernünftige Erklärung, die schon die Ableitung des Fallgesetzes nahe gelegt hat, ist: Die Konstante 5 bleibt und aus x^2 wird nicht einfach x^1, sondern x^1 wird noch mit dem alten Exponenten multipliziert, also $2 \cdot x^1 = 2 \cdot x$.

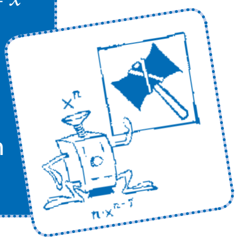
Wenn unsere Vermutung stimmt, müsste z.B. aus der Potenzfunktion $f(x) = x^3$ durch Differenzieren $f'(x) = 3 \cdot x^2$ entstehen. Mit dem Grenzwert können wir das überprüfen.

$$f'(x) = \lim_{x_1 \to x} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = \lim_{x_1 \to x} \frac{x^3 - x_1^3}{x - x_1} = \lim_{x_1 \to x} \frac{(x - x_1) \cdot (x^2 + x \cdot x_1 + x_1^2)}{x - x_1} =$$

$$= \lim_{x_1 \to x} (x^2 + x \cdot x_1 + x_1^2) = x^2 + x^2 + x^2 = 3 \cdot x^2$$

Hier haben wir wieder eine binomische Formel verwendet, die wir durch Ausmultiplizieren bestätigen können: $(a - b) \cdot (a^2 + a \cdot b + b^2) = a^3 - b^3$

Tatsächlich gilt allgemein für **Potenzfunktionen**, dass $f(x) = x^n$ die Ableitung $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$ hat. Mit dem Grenzwert und einer binomischen Zerlegungsformel für $a^n - b^n$ können wir das auch bestätigen. Das Piktogramm zeigt eine Axt, die andeutet, dass beim Differenzieren vom Exponenten ein Scheibchen abgeschnitten wird.



Diese Ableitungsregel gilt sogar dann, wenn die Exponenten keine natürlichen Zahlen sind. Allerdings können wir das erst später mit der Exponentialfunktion bestätigen. Zum Beispiel gilt sie für den Exponenten 0,5. $x^{0,5}$ ist aber nichts anderes als die Wurzel aus x und die Ableitung ist $0{,}5 \cdot x^{-0,5}$ oder $\frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$.

Sehr selten steht eine Funktion allein – meistens kommt sie Hand in Hand mit einem Faktor wie z.B. beim freien Fall der gerundete Wert 5. Auch dafür gibt es eine Regel.

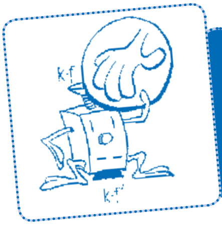
Versuchen wir $F(x) = k \cdot f(x)$ zu differenzieren, wobei wir annehmen, dass $f(x)$ differenzierbar ist und die Ableitung so aussieht

$$f'(x) = \lim_{x_1 \to x} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$$

Jetzt können wir $F(x)$ ableiten.

$$F'(x) = \lim_{x_1 \to x} \frac{F(x) - F(x_1)}{x - x_1} = \lim_{x_1 \to x} \frac{k \cdot f(x) - k \cdot f(x_1)}{x - x_1} =$$

$$= \lim_{x_1 \to x} \frac{k \cdot (f(x) - f(x_1))}{x - x_1} = k \cdot \lim_{x_1 \to x} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = k \cdot f'(x)$$



Der **konstante Faktor** k lässt sich aus dem Limes rausbefördern und bleibt deshalb beim Differenzieren unverändert erhalten. Der Faktor wird buchstäblich an der Hand mitgenommen.

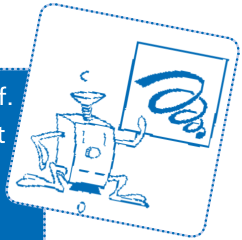
Wird also eine Funktion $f(x)$ auf $2 \cdot f(x)$ gestreckt, dann hat sie auch doppelt so große Tangentensteigungen.

Komplett verschieden vom konstanten Faktor und oft damit verwechselt wird der konstante Summand c.

Als Funktion aufgefasst, ist das die konstante Funktion $f(x) = c$. Sie ist eine Gerade parallel zur x-Achse und identisch mit ihrer Tangente. Daher hat die Tangente in jedem Punkt den Anstieg null; die Ableitung der konstanten Funktion ist daher null, also

$f'(x) = 0.$

Die Regel: $c' = 0$



In der Praxis tritt diese **konstante Funktion** selten allein auf. Sie ist meist ein Summand wie z.B. in $F(x) = 5 \cdot x^2 + 15$. Hier ist 15 der konstante Summand.

Dieser konstante Summand fällt beim Ableiten buchstäblich **in ein schwarzes Loch.**

Differenzieren können wir den Ausdruck $F(x) = 5 \cdot x^2 + 15$ allerdings noch nicht, da wir nicht wissen, was mit einer Summe passiert.

Für die Summe oder Differenz zweier Funktionen

$F(x) = f(x) \pm g(x)$

gilt eine einfache Regel (**Summenregel**, **Differenzregel**):

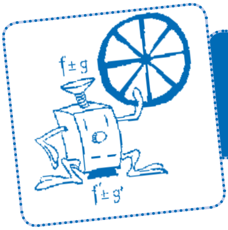
$F'(x) = f'(x) \pm g'(x)$, wenn es die beiden Ableitungen $f'(x)$ und $g'(x)$ gibt.

Die Herleitung der Regel ist einfach: Beim Grenzwert einer Summe darf die Summe der einzelnen Grenzwerte gebildet und summiert werden. (Wenn ich z.B. einen Ausdruck, der sich 2 annähert, mit einem Ausdruck addiere, der sich 3 annähert, dann ist es plausibel, dass sich die Summe dem Wert 5 annähern muss.)

$$\lim_{x_1 \to x} \frac{F(x)-F(x_1)}{x-x_1} = \lim_{x_1 \to x} \frac{f(x) \pm g(x) - (f(x_1) \pm g(x_1))}{x-x_1} =$$

$$= \lim_{x_1 \to x} \frac{f(x)-f(x_1) \pm (g(x)-g(x_1))}{x-x_1} =$$

$$= \lim_{x_1 \to x} \frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \pm \lim_{x_1 \to x} \frac{g(x)-g(x_1)}{x-x_1} = f'(x) \pm g'(x)$$



Die **Ableitung einer Summe (Differenz)** ist die Summe (Differenz) der Ableitungen der einzelnen Summanden. Jeder Summand wird einzeln durch die Ableitungsmühle gedreht.

Nun können wir die Funktion $F(x) = 5 \cdot x^2 + 15$ differenzieren.

Hier kommt alles vor, was wir gerade gemacht haben. Die Kunst ist es nun, zu wissen, wie ich es der Reihe nach anstellen kann. Welche Regel – welcher Trafo – kommt zuerst? Die Piktogramme weisen durch die nachfolgende Rechnung.

$F'(x) = \quad (5 \cdot x^2 + 15)'$

$(5 \cdot x^2)' + (15)'$

$(5 \cdot x^2)' + 0$

$5 \cdot (x^2)'$

$5 \cdot 2 \cdot x = 10 \cdot x$

Summen- bzw. Differenzregel	$(f(x)+g(x))' = f'(x) + g'(x)$
Regel für den konstanten Faktor	$(k \cdot f(x))' = k \cdot f'(x)$
Regel für den konstanten Summanden	$(c)' = 0$
Regel für die Potenzfunktion	$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$