Ableitungsregeln: Summen- und Faktorregel

1. Bestimmen Sie die Ableitung.

a) $f(x) = 6x^4 - \frac{3}{4}x^3 + 5x - 2$

$f'(x) =$

b) $g(x) = \frac{3}{4}x^8 + 0{,}5x^4 - 3{,}5x^{-2}$

$g'(x) =$

c) $f(t) = \frac{2}{t} - \frac{3}{t^2} + \frac{4}{5t^3}$

$f'(t) =$

d) $g(t) = \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{t^5} - t^{-4} + t - 2{,}8$

$g'(t) =$

e) $f(x) = \frac{2}{x^2} \cdot \left(4x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{2x}\right)$

$f'(x) =$

f) $g(x) = \frac{x^2}{a} + \frac{5b}{2x^2}$

$g'(x) =$

2. Berechnen Sie die Ableitung. Formen Sie dazu zunächst den Funktionsterm geeignet um.

a) $f(x) = \frac{9 - 4x}{x^3} =$ $\qquad f'(x) =$

b) $f(x) = \frac{3x^3 + 2x^2 - 5}{x^2} =$ $\qquad f'(x) =$

c) $f(x) = \frac{6x^3 - 12x^2}{x - 2} =$ $\qquad f'(x) =$

d) $f(x) = \frac{-4x + 10}{2} + \frac{x^2 - 4}{x + 2} =$ $\qquad f'(x) =$

3. Überprüfen Sie durch Ableiten, ob die Funktion F eine Stammfunktion der Funktion f ist.

a) $F\colon x \mapsto \frac{5a}{x^4} + a$ und $f\colon x \mapsto -20ax^{-5}$ $\qquad F'(x) =$

b) $F\colon x \mapsto xb^3 - b^2$ und $f\colon x \mapsto 3xb^2 - 2b$ $\qquad F'(x) =$

c) $F\colon x \mapsto \frac{m}{x} - 6m$ und $f\colon x \mapsto -mx^{-2} - 6$ $\qquad F'(x) =$

d) $F\colon t \mapsto xt^2 + tx^{-2}$ und $f\colon t \mapsto 2xt + \frac{1}{x^2}$ $\qquad F'(t) =$

e) $F\colon z \mapsto \frac{z}{4} - z^{-1} \cdot x$ und $f\colon z \mapsto \frac{1}{4} - \frac{1}{z}$ $\qquad F'(z) =$

4. Berechnen Sie $f'(0)$. Steigt oder fällt der Graph von f an der Stelle $x = 0$?

a) $f(x) = 7x^4 - 3x^3 + 2x$; $f'(x) =$; $f'(0) =$; bei $x = 0$ der Graph.

b) $f(x) = -\frac{1}{2}x + 7$; $f'(x) =$; $f'(0) =$; bei $x = 0$ der Graph.

5. Wahr oder falsch? Kreuzen Sie an. Begründen Sie oder geben Sie ein Gegenbeispiel an.

a) Wenn die Funktionsterme zweier Funktionen nicht äquivalent sind, können auch die Terme ihrer Ableitungen nicht äquivalent sein.

☐ wahr ☐ falsch Begründung/Gegenbeispiel:

b) Wenn der Graph einer Funktion eine Gerade ist, so ist auch der Graph der Ableitung eine Gerade.

☐ wahr ☐ falsch Begründung/Gegenbeispiel:

Ableitungsregeln: Summen- und Faktorregel

Lösung

1. Bestimmen Sie die Ableitung.

a) $f(x) = 6x^4 - \frac{3}{4}x^3 + 5x - 2$

$f'(x) = 24x^3 - \frac{9}{4}x^2 + 5$

b) $g(x) = \frac{3}{4}x^8 + 0{,}5x^4 - 3{,}5x^{-2}$

$g'(x) = 6x^7 + 2x^3 + 7x^{-3}$

c) $f(t) = \frac{2}{t} - \frac{3}{t^2} + \frac{4}{5t^3}$

$f'(t) = -2t^{-2} + 6t^{-3} - \frac{12}{5}t^{-4}$

d) $g(t) = \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{t^5} - t^{-4} + t - 2{,}8$

$g'(t) = -3t^{-6} + 4t^{-5} + 1$

e) $f(x) = \frac{2}{x^2} \cdot \left(4x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{2x}\right)$

$f'(x) = \left[8x - \frac{3}{2} + x^{-3}\right]' = 8 - 3x^{-4}$

f) $g(x) = \frac{x^2}{a} + \frac{5b}{2x^2}$

$g'(x) = \left[\frac{1}{a}x^2 + \frac{5b}{2}x^{-2}\right]' = \frac{2}{a}x - 5bx^{-3}$

2. Berechnen Sie die Ableitung. Formen Sie dazu zunächst den Funktionsterm geeignet um.

a) $f(x) = \frac{9 - 4x}{x^3} = 9x^{-3} - 4x^{-2}$ $\qquad f'(x) = -27x^{-4} + 8x^{-3}$

b) $f(x) = \frac{3x^3 + 2x^2 - 5}{x^2} = 3x + 2 - 5x^{-2}$ $\qquad f'(x) = 3 + 10x^{-3}$

c) $f(x) = \frac{6x^3 - 12x^2}{x - 2} = \frac{6x^2 \cdot (x-2)}{(x-2)} = 6x^2$ $\qquad f'(x) = 12x$

d) $f(x) = \frac{-4x + 10}{2} + \frac{x^2 - 4}{x + 2} = -2x + 5 + x - 2$ $\qquad f'(x) = -1$

3. Überprüfen Sie durch Ableiten, ob die Funktion F eine Stammfunktion der Funktion f ist.

a) $F\colon x \mapsto \frac{5a}{x^4} + a$ und $f\colon x \mapsto -20ax^{-5}$ $\qquad F'(x) = -20ax^{-5} = f(x)$

b) $F\colon x \mapsto xb^3 - b^2$ und $f\colon x \mapsto 3xb^2 - 2b$ $\qquad F'(x) = b^3 \neq f(x)$

c) $F\colon x \mapsto \frac{m}{x} - 6m$ und $f\colon x \mapsto -mx^{-2} - 6$ $\qquad F'(x) = -mx^{-2} \neq f(x)$

d) $F\colon t \mapsto xt^2 + tx^{-2}$ und $f\colon t \mapsto 2xt + \frac{1}{x^2}$ $\qquad F'(t) = 2xt + x^{-2} = f(t)$

e) $F\colon z \mapsto \frac{z}{4} - z^{-1} \cdot x$ und $f\colon z \mapsto \frac{1}{4} - \frac{1}{z}$ $\qquad F'(z) = \frac{1}{4} + x \cdot z^{-2} \neq f(z)$

4. Berechnen Sie $f'(0)$. Steigt oder fällt der Graph von f an der Stelle $x = 0$?

a) $f(x) = 7x^4 - 3x^3 + 2x$; $\quad f'(x) = 28x^3 - 9x^2 + 2$; $\quad f'(0) = 2$; bei $x = 0$ steigt der Graph.

b) $f(x) = -\frac{1}{2}x + 7$; $\quad f'(x) = -\frac{1}{2}$; $\quad f'(0) = -\frac{1}{2}$; bei $x = 0$ fällt der Graph.

5. Wahr oder falsch? Kreuzen Sie an. Begründen Sie oder geben Sie ein Gegenbeispiel an.

a) Wenn die Funktionsterme zweier Funktionen nicht äquivalent sind, können auch die Terme ihrer Ableitungen nicht äquivalent sein.

☐ wahr ☒ falsch Begründung/Gegenbeispiel: $f(x) = 2x$; $g(x) = 2x - 3$; $f'(x) = g'(x) = 2$

b) Wenn der Graph einer Funktion eine Gerade ist, so ist auch der Graph der Ableitung eine Gerade.

☒ wahr ☐ falsch Begründung/Gegenbeispiel: $f(x) = mx + t \Rightarrow f'(x) = m$; Graph ist eine waagrechte Gerade.

Ableitungsregeln: Produkt- und Quotientenregel

1. Berechnen Sie die Ableitung mit der Produkt- oder der Quotientenregel. Vereinfachen Sie danach so weit wie möglich.

a) $f(x) = (-0{,}5x^3 + 2x) \cdot (4 - x)$

$f'(x) =$

$=$

$=$

b) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{4x - 3}$

$f'(x) =$

$=$

$=$

c) $f(x) =$

$f'(x) =$

$=$

$=$

d) $f(x) =$

$f'(x) =$

$=$

2. Berechnen Sie die Ableitung sowohl mithilfe der Produkt- als auch der Quotientenregel. Formen Sie dazu bei jeweils einer der beiden Regeln zunächst den Funktionsterm geeignet um. Zeigen Sie, dass beide Rechenwege zu äquivalenten Ableitungen führen.

a) $f(x) = 5x^{-4} \cdot (-3x^2 + 4)$

mithilfe der Produktregel:

$f'(x) =$

$=$

$=$

mithilfe der Quotientenregel:

$f(x) =$

$f'(x) =$

$=$

$=$

b) $g(x) = \dfrac{x - \frac{2}{x}}{3x}$

mithilfe der Quotientenregel:

$g'(x) =$

$=$

$=$

mithilfe der Produktregel:

$g(x) =$

$g'(x) =$

$=$

$=$

3. Überprüfen Sie durch Ableiten, ob die Funktion F eine Stammfunktion der Funktion f ist.

a) $F(x) = (a + 1) \cdot x^3$ und $f(x) = 3ax^2 + 3x^2$ $F'(x) =$

b) $F(x) = \dfrac{tx - 2}{t - x}$ und $f(x) = \dfrac{2 - x^2}{(t - x)^2}$ $F'(x) =$

c) $F(x) = xb^3\left(\dfrac{1}{2}b^2 - 1\right)$ und $f(x) = 1{,}5xb^4 - 3xb^2$ $F'(x) =$

d) $F(a) = x^2(4a^2 - a)$ und $f(a) = -x^2 + 8ax^2$ $F'(a) =$

Ableitungsregeln: Produkt- und Quotientenregel

Lösung

1. Berechnen Sie die Ableitung mit der Produkt- oder der Quotientenregel. Vereinfachen Sie danach so weit wie möglich.

a) $f(x) = (-0{,}5x^3 + 2x) \cdot (4 - x)$

$f'(x) = (-1{,}5x^2 + 2)(4 - x) + (-0{,}5x^3 + 2x)(-1)$

$= -6x^2 + 1{,}5x^3 + 8 - 2x + 0{,}5x^3 - 2x$

$= 2x^3 - 6x^2 - 4x + 8$

b) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{4x - 3}$

$f'(x) = \dfrac{(2x - 2)(4x - 3) - (x^2 - 2x + 2) \cdot 4}{(4x - 3)^2}$

$= \dfrac{8x^2 - 6x - 8x + 6 - 4x^2 + 8x - 8}{(4x - 3)^2}$

$= \dfrac{4x^2 - 6x - 2}{(4x - 3)^2}$

c) $f(x) = 3x^{-3} \cdot (-2x^2 + x - 1)$

$f'(x) = -9x^{-4}(-2x^2 + x - 1) + 3x^{-3}(-4x + 1)$

$= 18x^{-2} - 9x^{-3} + 9x^{-4} - 12x^{-2} + 3x^{-3}$

$= 6x^{-2} - 6x^{-3} + 9x^{-4}$

d) $f(x) = \dfrac{3}{2 + x^2}$

$f'(x) = \dfrac{0 \cdot (2 + x^2) - 3 \cdot (2x)}{(2 + x^2)^2}$

$= \dfrac{-6x}{(2 + x^2)^2}$

2. Berechnen Sie die Ableitung sowohl mithilfe der Produkt- als auch der Quotientenregel. Formen Sie dazu bei jeweils einer der beiden Regeln zunächst den Funktionsterm geeignet um. Zeigen Sie, dass beide Rechenwege zu äquivalenten Ableitungen führen.

a) $f(x) = 5x^{-4} \cdot (-3x^2 + 4)$

mithilfe der Produktregel:

$f'(x) = -20x^{-5}(-3x^2 + 4) + 5x^{-4}(-6x)$

$= 60x^{-3} - 80x^{-5} - 30x^{-3}$

$= 30x^{-3} - 80x^{-5}$

mithilfe der Quotientenregel:

$f(x) = \dfrac{-15x^2 + 20}{x^4}$

$f'(x) = \dfrac{-30x \cdot x^4 - (-15x^2 + 20) \cdot 4x^3}{x^8}$

$= \dfrac{-30x^5 + 60x^5 - 80x^3}{x^8}$

$= 30x^{-3} - 80x^{-5}$

b) $g(x) = \dfrac{x - \frac{2}{x}}{3x}$

mithilfe der Quotientenregel:

$g'(x) = \dfrac{(1 + 2x^{-2}) \cdot 3x - (x - 2x^{-1}) \cdot 3}{9x^2}$

$= \dfrac{3x + 6x^{-1} - 3x + 6x^{-1}}{9x^2}$

$= \dfrac{4}{3} \cdot x^{-3}$

mithilfe der Produktregel:

$g(x) = \dfrac{1}{3}x^{-1} \cdot (x - 2x^{-1})$

$g'(x) = -\dfrac{1}{3}x^{-2} \cdot (x - 2x^{-1}) + \dfrac{1}{3}x^{-1} \cdot (1 + 2x^{-2})$

$= -\dfrac{1}{3}x^{-1} + \dfrac{2}{3}x^{-3} + \dfrac{1}{3}x^{-1} + \dfrac{2}{3}x^{-3}$

$= \dfrac{4}{3}x^{-3}$

3. Überprüfen Sie durch Ableiten, ob die Funktion F eine Stammfunktion der Funktion f ist.

a) $F(x) = (a + 1) \cdot x^3$ und $f(x) = 3ax^2 + 3x^2$ $\quad F'(x) = 3 \cdot (a + 1) \cdot x^2 = 3ax^2 + 3x^2 \quad = f(x)$

b) $F(x) = \dfrac{tx - 2}{t - x}$ und $f(x) = \dfrac{2 - x^2}{(t - x)^2}$ $\quad F'(x) = \dfrac{t \cdot (t - x) - (tx - 2) \cdot (-1)}{(t - x)^2} = \dfrac{t^2 - x}{(t - x)^2} \quad \neq f(x)$

c) $F(x) = xb^3\left(\dfrac{1}{2}b^2 - 1\right)$ und $f(x) = 1{,}5xb^4 - 3xb^2$ $\quad F'(x) = b^3 \cdot \left(\dfrac{1}{2}b^2 - 1\right) = \dfrac{1}{2}b^5 - b^3 \quad \neq f(x)$

d) $F(a) = x^2(4a^2 - a)$ und $f(a) = -x^2 + 8ax^2$ $\quad F'(a) = x^2 \cdot (8a - 1) = -x^2 + 8ax^2 \quad = f(a)$

Gleichungen von Tangenten und Normalen

1. Ermitteln Sie, falls möglich, die Gleichungen der Tangente und der Normale an den Graphen der Funktion f im Punkt P.

a) f: $x \mapsto x^3 + 3x^2 - 2$ und $P(1|2)$

Ableitung von f: $f'(x) =$

Steigung der Tangente: $m = f'(\ \ ) =$

P einsetzen: $2 = \ \cdot\ + t$

$\Rightarrow\ t = \ =$

Tangentengleichung: $y =$

Steigung der Normale: $m_n \cdot m_t = -1$

$\Rightarrow\ m_n =$

P einsetzen: $2 = \ \cdot\ + t_n$

$\Rightarrow\ t_n = \ =$

Normalengleichung: $y =$

b) f: $x \mapsto \frac{1}{4}x^2 - \frac{2}{x^2}$ und $P(2|0{,}5)$

Ableitung von f: $f'(x) =$

Steigung der Tangente: $m = \ =$

P einsetzen: $= \ \cdot\ + t$

$\Rightarrow\ t = \ =$

Tangentengleichung: $y =$

Steigung der Normale: $m_n = -1 : \ =$

P einsetzen: $= \ \cdot\ + t_n$

$\Rightarrow\ t_n = \ =$

Normalengleichung: $y =$

c) f: $x \mapsto \frac{2x}{x-2}$ und $P(1|-2)$

d) f: $x \mapsto \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2$ und $P\left(-1\middle|\frac{1}{6}\right)$

2. Berechnen Sie den Schnittpunkt bzw. die Schnittpunkte der Graphen G_f und G_g. Stellen Sie anschließend die Gleichung(en) der Tangente(n) an den Graphen G_f im Schnittpunkt bzw. in den Schnittpunkten auf.
Wie kann man das Ergebnis in Teilaufgabe b) geometrisch deuten?

a) f: $x \mapsto x^2 - 5x + 8$ und g: $x \mapsto x + 8$

Berechnung der Schnittpunkte P und Q:

Tangente p im Punkt P:

Tangente q im Punkt Q:

b) f: $x \mapsto 2x^2 - 4x + 1$ und g: $x \mapsto 8x - 17$

Deutung des Ergebnisses:

Gleichungen von Tangenten und Normalen

Lösung

1. Ermitteln Sie, falls möglich, die Gleichungen der Tangente und der Normale an den Graphen der Funktion f im Punkt P.

a) $f\colon x \mapsto x^3 + 3x^2 - 2$ und $P(1|2)$

Ableitung von f: $f'(x) = 3x^2 + 6x$

Steigung der Tangente: $m = f'(1) = 9$

P einsetzen: $2 = 9 \cdot 1 + t$

$\Rightarrow \quad t = 2 - 9 = -7$

Tangentengleichung: $y = 9x - 7$

Steigung der Normale: $m_n \cdot m_t = -1$

$\Rightarrow \quad m_n = -\frac{1}{9}$

P einsetzen: $2 = -\frac{1}{9} \cdot 1 + t_n$

$\Rightarrow \quad t_n = 2 + \frac{1}{9} = \frac{19}{9}$

Normalengleichung: $y = -\frac{1}{9}x + \frac{19}{9}$

b) $f\colon x \mapsto \frac{1}{4}x^2 - \frac{2}{x^2}$ und $P(2|0{,}5)$

Ableitung von f: $f'(x) = \frac{1}{2}x + \frac{4}{x^3}$

Steigung der Tangente: $m = f'(2) = 1{,}5$

P einsetzen: $0{,}5 = 1{,}5 \cdot 2 + t$

$\Rightarrow \quad t = 0{,}5 - 3 = -2{,}5$

Tangentengleichung: $y = 1{,}5x - 2{,}5$

Steigung der Normale: $m_n = -1 : 1{,}5 = -\frac{2}{3}$

P einsetzen: $0{,}5 = -\frac{2}{3} \cdot 2 + t_n$

$\Rightarrow \quad t_n = 0{,}5 + \frac{4}{3} = \frac{11}{6}$

Normalengleichung: $y = -\frac{2}{3}x + \frac{11}{6}$

c) $f\colon x \mapsto \frac{2x}{x-2}$ und $P(1|-2)$

Ableitung von f: $f'(x) = \frac{-4}{(x-2)^2}$

Steigung der Tangente: $m = f'(1) = -4$

P einsetzen: $-2 = -4 \cdot 1 + t \quad \Rightarrow \quad t = -2 + 4 = 2$

Tangentengleichung: $y = -4x + 2$

Steigung der Normale: $m_n = -1 : (-4) = \frac{1}{4}$

P einsetzen: $-2 = \frac{1}{4} \cdot 1 + t_n \quad \Rightarrow \quad t_n = -2 - \frac{1}{4} = -\frac{9}{4}$

Normalengleichung: $y = \frac{1}{4}x - \frac{9}{4}$

d) $f\colon x \mapsto \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2$ und $P\left(-1\middle|\frac{1}{6}\right)$

Ableitung von f: $f'(x) = x^2 + x$

Steigung der Tangente: $m = f'(-1) = 0$

P einsetzen: $\frac{1}{6} = 0 + t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{1}{6}$

Tangentengleichung: $y = \frac{1}{6}$

Da die Tangentensteigung 0 ist, ist die Tangente parallel zur x-Achse. Das bedeutet, dass die Normale orthogonal zur x-Achse steht. Da die Normale außerdem durch den Punkt $P\left(-1 \middle| \frac{1}{6}\right)$ geht, lautet die Normalengleichung in diesem Fall: $x = -1$.
(Beachten Sie, dass diese Normalengleichung keine Funktionsgleichung ist, da dem x-Wert −1 unendlich viele y-Werte zugeordnet sind.)

2. Berechnen Sie den Schnittpunkt bzw. die Schnittpunkte der Graphen G_f und G_g. Stellen Sie anschließend die Gleichung(en) der Tangente(n) an den Graphen G_f im Schnittpunkt bzw. in den Schnittpunkten auf.
Wie kann man das Ergebnis in Teilaufgabe b) geometrisch deuten?

a) $f\colon x \mapsto x^2 - 5x + 8$ und $g\colon x \mapsto x + 8$

Berechnung der Schnittpunkte P und Q:

$x^2 - 5x + 8 = x + 8$

$x^2 - 6x = 0$

$x(x - 6) = 0$

$x_1 = 0;\ x_2 = 6$

$g(0) = 8 \quad \Rightarrow \quad$ Schnittpunkt $P(0|8)$

$g(6) = 14 \quad \Rightarrow \quad$ Schnittpunkt $Q(6|14)$

Tangente p im Punkt P:

Ableitung von f: $f'(x) = 2x - 5$

Steigung der Tangente: $m = f'(0) = -5$

P einsetzen: $8 = -5 \cdot 0 + t \quad \Rightarrow \quad t = 8$

Tangentengleichung: $y = -5x + 8$

Tangente q im Punkt Q:

Steigung der Tangente: $m = f'(6) = 7$

P einsetzen: $14 = 7 \cdot 6 + t \quad \Rightarrow \quad t = 14 - 42 = -28$

Tangentengleichung: $y = 7x - 28$

b) $f\colon x \mapsto 2x^2 - 4x + 1$ und $g\colon x \mapsto 8x - 17$

$2x^2 - 4x + 1 = 8x - 17$

$2x^2 - 12x + 18 = 0$

$x^2 - 6x + 9 = 0$

$(x - 3)^2 = 0$

$x = 3 \quad \Rightarrow \quad$ Schnittpunkt $P(3|7)$

Tangente im Punkt P:

Ableitung von f: $f'(x) = 4x - 4$

Steigung der Tangente: $m = f'(3) = 8$

P einsetzen: $7 = 8 \cdot 3 + t \quad \Rightarrow \quad t = 7 - 24 = -17$

Tangentengleichung: $y = 8x - 17$

Deutung des Ergebnisses:
Die Gleichung der Tangente im Schnittpunkt P stimmt mit der Gleichung der Geraden g überein. G_f und g berühren sich in ihrem einzigen (!) Schnittpunkt, das heißt, die Gerade g ist selbst bereits eine Tangente an den Graphen von f.