Kapitel 1
Einführung

1.1
Allgemeines zur Methode der finiten Elemente

Die Methode der finiten Elemente (FEM) ist eines der praktisch wichtigsten Näherungsverfahren zur Lösung von Variationsproblemen, Differentialgleichungen und Variationsungleichungen in den Ingenieurwissenschaften und der mathematischen Physik. Die Erfolge der FEM, insbesondere in der Festkörpermechanik, führten zu einer verstärkten Nutzung in der Thermodynamik, in der Strömungsmechanik und in anderen Gebieten. Die Leistungsfähigkeit der Methode liegt darin begründet, dass die FEM die Vorteile besitzt, systematische Regeln für die Erzeugung stabiler numerischer Schemata bereitzustellen, und es relativ einfach ist, kompliziertere zwei- und dreidimensionale Geometrien zu berücksichtigen.

Ursprünglich wurde die Methode in den fünfziger Jahren von Ingenieuren entwickelt, um große Systeme von Flugzeugbauteilen untersuchen zu können. Erst später entdeckte man die enge Verbindung der FEM mit dem bekannten Ritzschen Verfahren und eine Arbeit von Courant hierzu aus dem Jahre 1943. Die ersten mathematisch fundierten Untersuchungen stammen von K.O. Friedrichs (1962) und L.A. Oganesjan (1966), in den darauffolgenden Jahren schuf man eine breite mathematische Theorie der Methode. Zur raschen Verbreitung der FEM trug wesentlich die Monographie von Zienkiewicz (1967) bei. Heute existiert eine Vielzahl von Büchern, die sich den unterschiedlichen Aspekten der FEM – Theorie, Anwendung und Implementierung – widmen, erwähnt seien nur [11, 13, 19, 33, 57].

Wir nehmen an, dass ein gegebenes stationäres technisches Problem durch ein Variationsprinzip oder ein Randwertproblem für eine Differentialgleichung beschrieben werde. Bei der Methode der finiten Elemente wird das z.B. zweidimensionale zugrunde liegende Gebiet in einfache Teilgebiete zerlegt, etwa in Dreiecke, Vierecke usw. Die FEM erzeugt dann ein Gleichungssystem für Näherungswerte der unbekannten Funktion in ausgezeichneten Punkten der Teilgebiete. Nach dem Lösen des Gleichungssystems sind die Werte der Unbekannten in den ausgezeichneten Punkten näherungsweise bekannt.

Es gibt nun verschiedene Möglichkeiten der Erzeugung des Gleichungssystems (des *diskreten Problems*), ausgehend von einem Variationsprinzip oder einem Rand-

Die Finite-Elemente-Methode für Anfänger. Herbert Goering, Hans-Görg Roos und Lutz Tobiska

ISBN: 978-3-527-40964-8

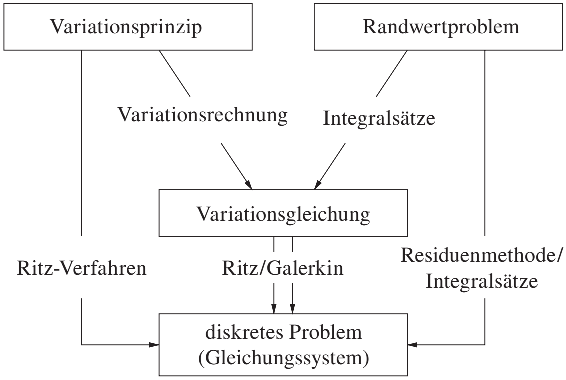

Abbildung 1.1 Verschiedene Varianten zur Erzeugung des diskreten Problems.

wertproblem (s. Abb. 1.1). Einen weiteren Weg, die diskrete Modellierung, möchten wir lediglich erwähnen.

Das Ritzsche Verfahren stellt beim Vorliegen eines Variationsprinzips den einfachsten Weg zum diskreten Problem dar. Es gibt jedoch für ingenieurtechnische Probleme oft kein Variationsprinzip. Dies hängt eng damit zusammen, dass die Lösung eines Randwertproblems nur dann auch Lösung eines zugeordneten Variationsproblems ist, wenn der entsprechende Differentialoperator symmetrisch ist. Deshalb gehen wir in diesem Buch ab Kapitel 2 stets so vor, dass wir als Ausgangspunkt eine *Variationsgleichung* wählen, dann ist nämlich die Erzeugung des diskreten Problems ebenfalls einfach. Im Abschnitt 1.2 demonstrieren wir an typischen Beispielen, wie man ausgehend von einem Variationsprinzip oder einem Randwertproblem die zugeordnete Variationsgleichung gewinnt. In Abschnitt 1.2 findet man eine Übersicht von Randwertproblemen zweiter Ordnung und den zugeordneten Variationsgleichungen.

Wir erläutern nun noch den Begriff *Variationsgleichung*. Sei V eine gegebene Menge von Funktionen mit der Eigenschaft, dass aus $v_1 \in V$, $v_2 \in V$ folgt $\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 \in V$ für reelle β_1, β_2 (man sagt, V ist eine lineare Menge). Als Beispiel halten wir uns die Menge der in einem Gebiet Ω stetig differenzierbaren Funktionen vor Augen. Dann heißt $f(v)$ mit $v \in V$ *Linearform auf* V, wenn $f(v)$ reell ist sowie

$$f(\alpha v) = \alpha f(v) \quad (\alpha \quad \text{beliebige reelle Zahl}) \tag{1.1}$$

und

$$f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) \tag{1.2}$$

gelten. Ein Beispiel einer Linearform ist etwa

$$f(v) = \int_\Omega v \mathrm{d}\Omega \ ,$$

ein zweites

$$f(v) = \int_\Omega g v \mathrm{d}\Omega$$

mit einer beliebig gewählten, festen stetigen Funktion g.

Aus den Eigenschaften (1.1) und (1.2) einer Linearform folgt für beliebige reelle α_1, α_2 unmittelbar

$$f(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 f(v_1) + \alpha_2 f(v_2) \ . \tag{1.3}$$

Wird jeweils zwei Funktionen $u, v \in V$ eine reelle Zahl $a(u, v)$ zugeordnet, so heißt diese Abbildung *Bilinearform auf* V, wenn sie für jedes feste u und für jedes feste v eine Linearform in der anderen Variablen ist.

Sei Ω ein zweidimensionales Gebiet in der x-y-Ebene. Dann sind Beispiele von Bilinearformen

$$a(u, v) = \int_\Omega u v \mathrm{d}\Omega \ ,$$

$$a(u, v) = \int_\Omega \left(u v + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \right) \mathrm{d}\Omega \ ,$$

$$a(u, v) = \int_\Omega \left(g_1 u v + g_2 u \frac{\partial v}{\partial x} \right) \mathrm{d}\Omega \ ;$$

im letzten Beispiel sind g_1 und g_2 beliebig gewählte, feste stetige Funktionen.

Die Eigenschaften von Linearformen übertragen sich auf Bilinearformen, so gilt

$$a(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, v) = \alpha_1 a(u_1, v) + \alpha_2 a(u_2, v) \ . \tag{1.4}$$

In einer *symmetrischen Bilinearform* kann man u und v vertauschen, sie ist also gekennzeichnet durch $a(u, v) = a(v, u)$. Von den drei Beispielen sind die ersten beiden Bilinearformen symmetrisch, die dritte ist es nicht.

Wir nennen nun ein Problem der folgenden Form *Variationsgleichung*:

$$\text{Gesucht ist ein } u \in V, \text{ so dass für alle } v \in V \text{ gilt } a(u, v) = f(v) \ . \tag{1.5}$$

Wir bezeichnen den Rand eines beschränkten zwei- oder dreidimensionalen Gebietes Ω mit Γ und die Vereinigung von Ω mit seinem Rand Γ mit $\overline{\Omega}$.

1.2
Wie überführt man ein Randwertproblem in eine Variationsgleichung?

1.2.1
Beispiel 1

Bei Wärmeleitungsproblemen genügt die stationäre Temperaturverteilung T der Differentialgleichung

$$-k\Delta T = Q\,,$$

wobei k der Wärmeleitfähigkeitskoeffizient und Q die Wärmequellenergiebigkeit sind. Der Einfachheit halber nehmen wir an, die Temperatur am Rand Γ des den Körper beschreibenden Gebietes Ω werde festgehalten, es gelte $T = 0$ auf Γ. Bekanntlich lässt sich die Lösung des Randwertproblems ($q = Q/k$)

$$-\Delta T = q \quad \text{in}\ \Omega\,, \qquad T = 0 \quad \text{auf}\ \Gamma\,, \tag{1.6}$$

dadurch kennzeichnen, dass sie das Funktional

$$F(w) = \int_\Omega \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 - 2qw\right] \mathrm{d}\Omega$$

minimiert. Auf diesem Weg kann man analog wie eben beschrieben die (1.6) zugeordnete Variationsgleichung bestimmen. Entsprechend unserem Schema (s. Abb. 1.1) kann man die Variationsgleichung aber auch direkt aus (1.6) gewinnen.

Sei V die Menge aller in Ω differenzierbaren Funktionen mit $v = 0$ auf Γ. Wir bezeichnen die Lösung des Randwertproblems (1.6) wieder mit u (ersetzen also T durch u), multiplizieren die Differentialgleichung mit einer beliebigen Funktion $v \in V$ und integrieren über Ω. Das liefert

$$-\int_\Omega (\Delta u) v \,\mathrm{d}\Omega = \int_\Omega q v \,\mathrm{d}\Omega\ .$$

Nun benötigen wir den Gaußschen Integralsatz

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) \mathrm{d}\Omega = \int_\Gamma (P, Q, R) \cdot n \,\mathrm{d}\Gamma\ . \tag{1.7}$$

Hier sind Γ der Rand von Ω und n der äußere Normaleneinheitsvektor bezüglich Γ. Setzt man

$$P = u_x \cdot v\,, \quad Q = u_y \cdot v\,, \quad R = u_z \cdot v\,,$$

so verschwindet das Integral auf der rechten Seite, weil Funktionen $v \in V$ auf dem Rand von Ω gleich Null sind, und man erhält

$$-\int_\Omega (\Delta u) v \,\mathrm{d}\Omega = \int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right) \mathrm{d}\Omega\ .$$

Setzt man

$$a(u, v) = \int\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} \right) \mathrm{d}\Omega \ ,$$

$$f(v) = \int\limits_{\Omega} q v \mathrm{d}\Omega \ ,$$

so haben wir das Randwertproblem (1.6) in die Variationsgleichung

Gesucht ist ein $u \in V$ mit $a(u, v) = f(v)$ für alle $v \in V$

mit einer symmetrischen Bilinearform überführt.

Bei der Herleitung ist es belanglos, ob Ω ein zweidimensionales oder ein dreidimensionales Gebiet ist, im zweidimensionalen Fall fällt lediglich der letzte Summand in dem die Bilinearform definierenden Integral weg.

Andere technische Problemstellungen führen ebenfalls auf die Randwertaufgabe (1.6). Betrachtet man z.B. einen geraden Stab mit Vollquerschnitt, der durch ein konstantes Moment, dessen Wirkungsebene senkrecht zur Stabachse liegt, auf Torsion beansprucht wird, so genügt die Torsionsfunktion $F(x, y)$ dem System

$$-\Delta F = 2G\vartheta \quad \text{in } \Omega, \quad F = 0 \quad \text{auf } \Gamma \ ,$$

dabei sind G der Schubmodul und ϑ die spezifische Verdrehung des tordierten Stabes.

1.2.2
Beispiel 2

Untersucht man die Strömung diffundierender Substanzen, so genügt die Konzentrationsverteilung infolge Diffusion und Konvektion im stationären, zweidimensionalen Fall einem Randwertproblem vom Typ

$$-\Delta c + w_1 \frac{\partial c}{\partial x} + w_2 \frac{\partial c}{\partial y} = g \quad \text{in } \Omega \ , \quad \frac{\partial c}{\partial n} = 0 \quad \text{auf } \Gamma \ , \tag{1.8}$$

$w = (w_1, w_2)$ ist die Konvektionsgeschwindigkeit.

Jetzt ist es i. allg. nicht möglich, eine zugeordnete Minimierungsaufgabe anzugeben. Man kann das Randwertproblem (1.8) aber fast analog wie die eben untersuchte Randwertaufgabe in eine Variationsgleichung überführen. Ein wesentlicher Unterschied ist die Art der Berücksichtigung der Randbedingung. Während man bei der Randbedingung $T = 0$ auf Γ (Dirichletsche Randbedingung oder Bedingung 1. Art) den Raum V so definiert, dass Funktionen aus V dieser Bedingung genügen, ist das jetzt nicht notwendig, denn bei der Randbedingung $\frac{\partial c}{\partial n} = 0$ auf Γ (Neumannsche Randbedingung oder Bedingung 2. Art) verschwindet das Integral über Γ im Integralsatz (1.7) automatisch.

Sei also V die Menge aller in Ω differenzierbaren Funktionen. Setzt man

$$a(u,v) = \int\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + w_1 \frac{\partial u}{\partial x} v + w_2 \frac{\partial u}{\partial y} v \right) \mathrm{d}\Omega \ ,$$

$$f(v) = \int\limits_{\Omega} g v \,\mathrm{d}\Omega \ ,$$

so hat man (1.8) in eine Variationsgleichung mit einer nicht symmetrischen Bilinearform überführt.

Man nennt manchmal eine Dirichletsche Randbedingung für Probleme vom Typ (1.6) *wesentliche Randbedingung*, da sie den Raum V mit kennzeichnet, eine Neumannsche Randbedingung *natürliche Randbedingung*, weil sie die Definition von V nicht beeinflusst.

Eine Randbedingung vom Typ $\frac{\partial c}{\partial n} + \sigma c = 0$ (Robinsche Bedingung oder Bedingung 3. Art) ist auch in dem Sinne natürlich, dass sie zur Charakterisierung von V nicht beiträgt. Entsprechend dem Gaußschen Integralsatz (1.7) erhält man aber einen zusätzlichen, die Bilinearform definierenden Summanden mit

$$a^*(u,v) := a(u,v) + \int\limits_{\Gamma} \sigma u v \,\mathrm{d}\Gamma \ .$$

Weitere Beispiele von Randwertaufgaben und zugeordneten Variationsgleichungen findet der Leser in Abschnitt 2.1.