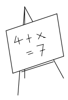
Vorwort

Mathematik ist die Sprache der Physik. Jedem Physikstudierenden wird dies bereits im ersten Semester beim Blick auf den Studienplan deutlich: Mathematik nimmt einen großen Raum ein. Sie ist notwendig, um Grundkonzepte der Physik elegant und eindeutig zu formulieren. In dieser Sprache Mathematik hat die Physik die Möglichkeit gefunden, sich von einer phänomenologisch orientierten Naturbeschreibung zu einer Wissenschaft zu entwickeln, die mit wenigen fundamentalen Gesetzen und Konzepten, wie z.B. den Erhaltungssätzen, selbst komplexe und der direkten Beobachtung nicht zugängliche Prozesse beschreiben kann, wie z.B. die Energieerzeugung im Innern der Sterne. Ein weiterer Aspekt der Physik ist die Vorhersagefähigkeit: Physik will nicht nur den Ist-Zustand eines Systems beschreiben sondern auch Vorhersagen über seine weitere Entwicklung oder sein Verhalten unter anderen Bedingungen geben – wieder unter Verwendung einer mathematischen Formulierung.

An der Notwendigkeit der Mathematik in der Physikausbildung besteht keine Zweifel. Schwierigkeiten gibt es in der praktischen Durchführung: das sorgfältige Studium und Verständnis der mathematischen Grundlagen kostet Zeit. Andererseits möchte die Physik bereits früh im Studium den Übergang zur Konzept orientierten formalen Wissenschaft vermitteln und benötigt dafür die Mathematik. Die Rechenmethoden möchten aus dieser Zwickmühle heraus helfen. Es will kein Lehrbuch der Sprache Mathematik sein sondern ein Sprachführer, der Ihnen in verschiedenen Situationen die notwendigen Rechenmethoden zur Verfügung stellt; z.B. bei der Bestimmung von Trägheitsmomenten die Mehrfachintegrale, bei der Beschreibung von Bewegungen die Differentialgleichungen oder bei der Beschreibung von Feldern die Vektoranalysis. Ebenso, wie Sie aus einem Sprachführer keine Sprache lernen können, können Sie aus diesem Buch nicht die Mathematik in ihren Feinheiten und ihrer formalen Strenge erlernen. Aber, wie bei einem Sprachführer, sollen die Rechenmethoden Ihnen helfen, die zum Verständnis der Experimentalphysik notwendigen mathematischen Werkzeuge in ihren Grundzügen zu erfassen und anwenden zu können.

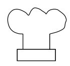
Das vorliegende Buch basiert auf einer über 2 Semester jeweils einstündig gehaltenen Vorlesung, deren Aufbau in enger Anlehnung an den zeitlichen Ablauf der Experimentalphysik-Vorlesung gewählt wurde. Für die vorliegende Buchform wurde der Aufbau so modifiziert, daß die einzelnen Themen im wesentlichen in der Reihenfolge eingeführt werden, wie sie in einem Lehrbuch zur Experimentalphysik benötigt werden. Hier stand, meinem persönlichen Geschmack folgend, der Demtröder [3–6] Pate.

Das Buch gliedert sich in drei Teile. In Teil 1 werden die Rechenmethoden eingeführt, die in der Mechanik benötigt werden: der Umgang mit Vektoren, Mehrfachintegrale, Matrizen und Differentialgleichungen. Teil 2 soll beim Verständnis der Elektrodynamik unterstützen: er führt ein in die Vektoranalysis und partielle Differentialgleichungen. Der dritte Teil befaßt sich mit Verteilungsfunktionen und legt die Basis zum Verständnis der statistischen Mechanik einerseits und der Grundlagen der Meßdatenauswertung andererseits.



→ x.y.z

→ x.y.z



Randmarkierungen helfen, den jeweiligen Stoff einzuschätzen. Ausgehend von der Sprachführeranalogie verfolgen die Rechenmethoden den Ansatz, daß sie ohne Vorkenntnisse verwendet werden können. Daher wird in verschiedenen Abschnitten Schulstoff wiederholt, der gegebenenfalls übersprungen werden kann. Diese Anschnitte sind durch eine Tafel markiert, versehen mit einem Querverweis zu dem Abschnitt, ab dem Stoff vermittelt wird, der nicht mehr zum normalen Oberstufenrepertoire gehört. Andere Kapitel bzw. Abschnitte behandeln sehr speziellen Stoff und können beim ersten Durcharbeiten weggelassen werden. Diese sind durch einen etwas ratlosen und überforderten Leser gekennzeichnet, ebenfalls mit dem Hinweis, an welcher Stelle im normalen Text weiter gearbeitet werden sollte. An anderen Stellen gibt es bei etwas komplexeren Problemen für Ratlose eine Zusammenfassung der Rechenschritte. Zum leichteren Auffinden sind diese Kochrezepte am Rande mit gekennzeichnet.

Viele der hier vorgestellten Rechenmethoden werden Ihnen im Laufe Ihres Studiums immer wieder begegnen. Diese Methoden müssen Ihnen vertraut werden; so vertraut, daß Sie bei einem physikalischen Problem erkennen können, welches Werkzeug Sie zu seiner Behandlung aus Ihrem Werkzeugkasten 'Rechenmethoden' ziehen müssen. Diese Vertrautheit können Sie nur durch wiederholte Anwendung erreichen. Daher enthält dieses Buch Übungsaufgaben. Nehmen Sie das Angebot wahr, rechnen Sie. Und wenn Sie nicht sehr viel Zeit haben, erarbeiten Sie sich zumindest die Lösungsansätze. Viele weitere Aufgaben, zu einem großen Teil auch mit Lösungen, finden Sie als Rechenaufgaben im Papula [18–20] sowie als Aufgaben mit physikalischem Hintergrund im Greiner [8–12]. Der Papula kann auch als Ergänzung zum vorliegenden Buch dienen, insbesondere für die Studierenden, die einen etwas größeren Abstand zur Mathematik haben. Weitere empfehlenswerte Bücher sind der Korsch [17], der sich noch stärker am Demtröder orientiert und bei ähnlicher Stoffauswahl wie das vorliegende Buch ein höheres Niveau erreicht, sowie Großmann [13], Hassani [14] und Seaborn [21], die alle Teilaspekte des vorliegenden Buches in erweiterter Form abdecken.

Die Entstehung dieses Buches wurde von vielen Personen unterstützend begleitet. Insbesondere möchte ich mich bei Rainer Pacena bedanken, der nicht nur die allerersten Versionen der Vorlesungsskripte begleitet hat, sondern auch die vollständige Buchversion durchgearbeitet und kommentiert hat. Sven-Lars Schulz und Tobias Hahn gebührt ein großer Dank für ihre hilfreichen Kommentare sowie für die vielen Aufgaben, die sie in die Vorlesung und die begleitenden Übungen eingebracht haben. Ulrich Fischer danke ich ganz herzlich für seine Erlaubnis, Aufgaben aus dem Fundus der Kieler Experimentalphysik zu verwenden. Trotz dieser Unterstützung werden sich verschiedene (Tipp)Fehler, korrektur-resistent wie sie ein können, auch in das endgültige Buch eingeschmuggelt haben. Über Hinweise auf diese, ebenso wie über Anregungen und Kritik, an mkallenr@uos.de würde ich mich freuen.

Bedanken möchte ich mich auch bei meinen Betreuern im Springer-Verlag, Thorsten Schneider und Jacqueline Lenz, für die angenehme und effiziente Zusammenarbeit sowie bei meiner Arbeitsgruppe, insbesondere Elena Bondarenko und Bernd Heber, die mein Chaos während des Schreibens ertragen haben. Und – last not least – einen ganz herzlichen Dank an Klaus Betzler.

Osnabrück/Prerow, im Januar 2003 *May-Britt Kallenrode*

5 Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung

Differentialgleichungen sind Bestimmungsgleichungen für Funktionen. In der Physik werden Sie häufig mit Differentialgleichungen konfrontiert. Entsprechend breiten Raum nimmt ihre Behandlung in diesem Buch ein. In den folgenden Kapiteln werden wir uns mit gewöhnlichen Differentialgleichungen befassen, in denen eine Funktion in Abhängigkeit von einer Variablen, meistens der Zeit, gesucht wird. Differentialgleichungen erhalten Sie in der Mechanik z.B. aus dem 2. Newton'schen Axiom, $m\,\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}/\mathrm{d}t^2 = \boldsymbol{F}$, wenn Sie für $\boldsymbol{F}$ eine vom Ort abhängige Kraft einsetzen. Andere Differentialgleichungen erhalten Sie, wenn Sie eine Veränderung einer Größe betrachten, die zu dieser Größe selbst proportional ist, wie z.B. beim radioaktiven Zerfall, der Entladung eines Kondensators oder der barometrischen Höhenformel. Mit diesem letzten Typ von Differentialgleichung wollen wir nach einer allgemeinen Einführung in diesem Kapitel beginnen.

5.1 Was ist eine Differentialgleichung (DGL)?

Eine Differentialgleichung ist eine Bestimmungsgleichung für eine Funktion, d.h. die Lösung einer Differentialgleichung ist keine Zahl sondern eine Funktion.

Definition 28. *Eine Gleichung, in der Ableitungen einer unbekannten Funktion $f = f(x)$ bis zur n-ten Ordnung auftreten, heißt eine* gewöhnliche Differentialgleichung n-ter Ordnung*.*

Eine gewöhnliche Differentialgleichung n-ter Ordnung enthält daher als höchste Ableitung $f^{(n)}(x)$ die n-te Ableitung der unbekannten Funktion $f = f(x)$, kann aber auch Ableitungen niedrigerer Ordnung sowie die Funktion $f = f(x)$ und deren unabhängige Variable x enthalten. Sie ist darstellbar in der impliziten Form

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0 \tag{5.1}$$

oder, falls diese Gleichung nach der höchsten Ableitung $y^{(n)}$ auflösbar ist, in der expliziten Form

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}) \ . \tag{5.2}$$

Neben gewöhnlichen Differentialgleichungen gibt es partielle Differentialgleichungen, die partielle Ableitungen einer Funktion mehrerer Variablen enthalten.

Gewöhnliche Differentialgleichungen haben Formen wie

$$f(x) = c\, f'(x)\ , \tag{5.3}$$

$$f'(x) = -c f'''(x)\ , \tag{5.4}$$

$$f(x) = c_1\, f'(x) + c_2\, f''(x) + c_3\, f'''(x) + \dots\ . \tag{5.5}$$

Physikalische Beispiele für gewöhnliche Differentialgleichungen sind (radioaktiver) Zerfall oder exponentielles Wachstum

$$\mathrm{d}N = -\lambda\, N\, \mathrm{d}t \tag{5.6}$$

und in der Mechanik die Bewegungsgleichung

$$F = ma = m \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} \tag{5.7}$$

z.B. mit $F = -kx$ als Rückstellkraft beim Federpendel.

Da eine Differentialgleichung eine Bestimmungsgleichung für eine unbekannte Funktion ist, sind ihre Lösungen Funktionen.

Definition 29. *Eine Funktion* $f = f(x)$ *ist* Lösung *der Differentialgleichung, wenn sie mit ihren Ableitungen die Differentialgleichung identisch erfüllt.*

Jede Lösungsfunktion einer DGL wird Lösung oder Integral genannt. Lösungen können durch verschiedene Verfahren gefunden werden: Raten, Schemata und numerische Verfahren. Lösungen durch Schemata und numerische Verfahren werden im folgenden ausführlicher behandelt; ein Beispiel für das 'Raten' der Lösung ist in Abschn. 5.2 gegeben.

Bei der Lösung einer Differentialgleichung wird unterschieden zwischen der allgemeinen Lösung und einer speziellen oder partikulären Lösung:

– die *allgemeine Lösung* einer Differentialgleichung n-ter Ordnung enthält noch n voneinander unabhängige Parameter (Integrationskonstanten).
– Eine *spezielle* oder *partikuläre Lösung* wird aus der allgemeinen Lösung gewonnen, in dem man aufgrund zusätzlicher Bedingungen den n freien Parametern feste Werte zuweist. Dies kann durch Anfangs- oder durch Randbedingungen geschehen.

Um die freien Parameter der Lösung einer Differentialgleichung zu bestimmen, benötigen wir Anfangs- oder Randwerte.

Bei einem *Anfangswertproblem* bzw. einer *Anfangswertaufgabe* werden der Lösungsfunktion $y = y(t)$ insgesamt n-Werte, nämlich der Funktionswert sowie die Werte der $n-1$ Ableitungen an einer Stelle t_o vorgeschrieben: $y(t_o)$, $y'(t_o)$, $y''(t_o)$, ..., $y^{(n-1)}(t_o)$. Anschaulich geben diese Anfangswertbedingungen bei einer Differentialgleichung 1. Ordnung einen Punkt $(x_t, y(x_t))$, durch den die Kurve verläuft, bzw. bei einer DGL zweiter Ordnung einen Punkt und die Steigung in diesem Punkt.

Anfangsbedingungen beschreiben also einen Anfangszustand des Systems. Mit der DGL werden die Regeln zur Beschreibung der weiteren Entwicklung des Systems vorgegeben; physikalisch geben die Anfangsbedingungen den Start des Systems (der Apfel hängt noch am Baum), die Lösung der DGL beschreibt dann die weitere Entwicklung des Systems.

Bei einem *Randwertproblem* bzw. einer *Randwertaufgabe* werden der gesuchten speziellen Lösung einer Differentialgleichung n-ter Ordnung an n verschiedenen Stellen x_1, x_2, ..., x_n der Reihe nach Funktionswerte $y(x_1)$, $y(x_2)$, ..., $y(x_n)$ vorgeschrieben. Sie werden als Randwerte oder Randbedingungen bezeichnet. Physikalische Beispiele sind ein an einem Ende eingespannter Stab oder die Auflagepunkte einer Brücke auf ihren Trägern.

5.2 Lösung durch Raten

Zur Illustration soll für ein einfaches Beispiel aus der Mechanik die Differentialgleichung durch Raten gelöst werden. Beim Federpendel wird die Bewegung dadurch beschrieben, daß man die rückstellende Kraft $F_\mathrm{r} = -kx$ der Feder in die Bewegungsgleichung einsetzt und als Differentialgleichung erhält:

$$\frac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}t^2} = -\omega^2 x(t) \quad \text{mit} \quad \omega^2 = \frac{k}{m} \; . \tag{5.8}$$

Wir suchen also eine Funktion $x(t)$, deren zweite zeitliche Ableitung das Negative der Funktion multipliziert mit einen Vorfaktor ergibt. Eine Funktion, die diese Anforderungen erfüllt, ist eine Winkelfunktion wie z.B. der Sinus

$$x(t) = \sin \omega t \; . \tag{5.9}$$

Diese ergibt als erste Ableitung

$$x'(t) = \omega \, \cos \omega t \tag{5.10}$$

und als zweite Ableitung wieder die Ausgangsfunktion (multipliziert mit einem negativen Vorfaktor):

$$x''(t) = -\omega^2 \, \sin \omega t = -\omega^2 \, x(t) \; . \tag{5.11}$$

Die Funktion $x(t) = \sin \omega t$ löst nach Definition (29) also die Differentialgleichung. Allerdings finden wir genauso schnell auch eine andere Lösung $x(t) = \cos \omega t$ mit

$$x'(t) = -\omega \, \sin \omega t \quad \text{und} \quad x''(t) = -\omega^2 \, \cos \omega t = -\omega^2 \, x(t) \; . \tag{5.12}$$

Wenn beide Funktionen eine Lösung der DGL sein können, dann ist auch eine Linearkombination der beiden Lösung:

$$x(t) = A \, \sin \omega t + B \, \cos \omega t \; , \tag{5.13}$$

wie man durch zweimaliges Ableiten sehen kann.

Die Linearkombination ist die allgemeinere der drei hier vorgeschlagenen Lösungen, die anderen beiden sind Spezialfälle, bei denen der Koeffizient A bzw. B verschwindet. Wie groß diese Koeffizienten sind (bzw. ob sie verschwinden) ergibt sich aus den Anfangs- oder Randbedingungen: so ergibt sich für die Anfangswerte $x = 0$ und $x' = v_{\text{max}}$ zur Zeit $t = 0$ der Sinus als Lösung, für $x = x_{\text{max}}$ und $x' = 0$ zur Zeit $t = 0$ dagegen der Kosinus. Für andere Kombinationen der Anfangswerte ergibt sich die allgemeine Lösung als Linearkombination.

5.3 Gewöhnliche lineare DGL erster Ordnung

Die formal einfachste Differentialgleichung ist die gewöhnliche lineare Differentialgleichung erster Ordnung. Eine Differentialgleichung erster Ordnung enthält nur die gesuchte Funktion und ihre erste Ableitung. Die Differentialgleichungen sind gewöhnlich, da die gesuchte Funktion nur von einer Variablen abhängt und damit keine partiellen Ableitungen auftreten. Die Differentialgleichung ist linear, wenn sie die folgenden Kriterien erfüllt: (1) y und y' treten nur linear, d.h. in der ersten Potenz auf, und (2) es tritt kein gemischtes Produkt yy' auf. Diese Beschreibung führt auf die folgende Definition:

Definition 30. *Eine Differentialgleichung 1. Ordnung heißt* linear*, wenn sie in der Form*

$$y' = f(x)\, y + g(x) \tag{5.14}$$

darstellbar ist.

Die Funktion $g(x)$ wird dabei als *Störfunktion* oder *Störglied* bezeichnet. Fehlt das Störglied, so handelt es sich um eine *homogene lineare Differentialgleichungen* erster Ordnung. Ist $g(x)$ von Null verschieden, so wird die Differentialgleichung als inhomogen bezeichnet. Dieser Zusatzterm $g(x)$ wird daher auch als *Inhomogenität* bezeichnet.

5.4 Homogene lineare DGL erster Ordnung

Nach dieser Einführung wollen wir mit der formal einfachsten Differentialgleichung beginnen, der homogenen linearen DGL 1. Ordnung.

Definition 31. *Eine* lineare homogene Differentialgleichung 1. Ordnung *ist eine Bestimmungsgleichung für eine Funktion $y(x)$, in der nur die Funktion y, ihr erste Ableitung y' und eine Proportionalitätskonstante a auftreten:*

$$y'(x) = a\, y(x) \quad \text{oder} \quad f'(x) = a\, f(x). \tag{5.15}$$

Gesucht wird also eine Funktion $f(x)$, die an jeder Stelle x dem Wert $f'(x)$ ihrer ersten Ableitung proportional ist. Rein formal können wir eine Lösungsfunktion erraten: die Exponentialfunktion, da eine Ableitung der Exponentialfunktion immer wieder auf eine Exponentialfunktion führt.

5.4.1 Separation der Variablen

Für homogene Differentialgleichungen erster Ordnung gibt es ein Standardlösungsverfahren, die Trennung bzw. Separation der Variablen. Dazu werden alle Terme mit x auf die eine Seite der Gleichung gebracht, alle Terme mit y auf die andere:

$$f'(x) = a f(x) \quad \Rightarrow \quad a\,y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \quad \Rightarrow \quad a\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}y}{y}\ . \tag{5.16}$$

Beide Seiten der Gleichung werden nun integriert:

$$\int a\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}y}{y} \quad \Rightarrow \quad ax = \ln y + \ln c \tag{5.17}$$

wobei die Integrationskonstanten der beiden Seiten in $\ln c$ enthalten sind.

Auflösen nach y liefert die Lösung (das Integral) der Differentialgleichung:

$$\mathrm{e}^{ax} = y\,c_1 \quad \Rightarrow \quad y = c\,\mathrm{e}^{ax}\ . \tag{5.18}$$

5.4.2 Anfangs- oder Randbedingungen

Anfangs- oder Randbedingungen werden benötigt, um die Integrationskonstante zu bestimmen. Die Zahl der erforderlichen Bedingungen hängt von der Ordnung der DGL ab, d.h. im Falle einer Differentialgleichung 1. Ordnung wird eine Randbedingung bzw. ein Anfangswert benötigt. Hier soll gelten für $x = 0$ ist $y = y_\mathrm{o}$. Einsetzen in die Lösung liefert

$$y_\mathrm{o} = c\,\mathrm{e}^{a\,0} = c\ . \tag{5.19}$$

und damit letztendlich die Lösung:

$$y = y_\mathrm{o}\,\mathrm{e}^{ax}\ . \tag{5.20}$$

5.4.3 Zusammenfassung: Trennung der Variablen

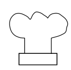
Eine homogene Differentialgleichung 1. Ordnung vom Typ

$$y' + f(x)\,y = 0 \tag{5.21}$$

wird durch Trennung der Variablen gelöst. Die allgemeine Lösung ist in der Form

$$y = c\,\exp\left\{-\int f(x)\,\mathrm{d}x\right\} \tag{5.22}$$

darstellbar.

Das zugehörige Lösungsverfahren, die Separation oder Trennung der Variablen, läßt sich in folgendem Kochrezept zusammenfassen: 

1. Trennung der beiden Variablen.
2. Integration auf beiden Seiten der Gleichung.
3. Auflösung der in Form einer impliziten Gleichung vom Typ $F_1(y) = F_2(y)$ vorliegenden allgemeinen Lösung nach der Variablen y (falls möglich).
4. Bestimmung der Integrationskonstanten aus den Rand- oder Anfangsbedingungen (falls gegeben).

Beispiel 44. Radioaktiver Zerfall: Die Zahl $\mathrm{d}N/\mathrm{d}t$ der pro Zeiteinheit zerfallenden Atome einer radioaktiven Substanz ist proportional der Zahl N der vorhandenen Atome und einer Zerfallskonstanten λ [s^{-1}]. Damit ergibt sich als Differentialgleichung

$$\mathrm{d}N = -\lambda N \,\mathrm{d}t \,. \tag{5.23}$$

Separation der Variablen liefert:

$$\frac{\mathrm{d}N}{N} = -\lambda \,\mathrm{d}t \,. \tag{5.24}$$

Die Integration ergibt

$$\ln N + \ln c_1 = -\lambda t \tag{5.25}$$

und mit der Randbedingung $N(t = 0) = N_o$

$$N(t) = N_\mathrm{o} \cdot \mathrm{e}^{-\lambda t} \,. \tag{5.26}$$

□

Beispiel 45. Exponentielles Wachstum: Exponentielles Wachstum tritt immer dann auf, wenn die Änderung der Zahl der Individuen einer Population (Frösche oder Seerosen im Teich, Bakterien in Nährlösung, verzinstes Kapital ohne Entnahme der Zinserträge) sich proportional zur Zahl der Individuen und einer Vermehrungsrate verändert. Die Differentialgleichung

$$\mathrm{d}N = \lambda N \,\mathrm{d}t \tag{5.27}$$

unterscheidet sich von (5.23) nur durch das fehlende Minus-Zeichen auf der rechten Seite: hier ist die Änderung nicht negativ (Abnahme der Population, d.h. Zerfall) sondern positiv (Zunahme der Population, d.h. Wachstum). Das Lösungsverfahren ist völlig analog. Separation der Variablen liefert:

$$\frac{\mathrm{d}N}{N} = \lambda \,\mathrm{d}t \,. \tag{5.28}$$

Integration (inkl. Randbedingung $N(t{=}0) = N_\mathrm{o}$) führt auf

$$\ln N + \ln c_1 = \lambda\, t \quad \text{und} \quad N(t) = N_\mathrm{o}\, \mathrm{e}^{\lambda t} \,. \tag{5.29}$$

□

Beispiel 46. Gradlinige Bewegung mit Reibung: Die Beschleunigung eines sich entlang einer Geraden bewegenden Körpers ist gegeben durch $a = -\beta v$. Die Bewegungsgleichung läßt sich schreiben als

$$m \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = m \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\beta v \; , \tag{5.30}$$

d.h. die Bewegung wird durch eine lineare homogene Differentialgleichung erster Ordnung beschrieben mit $v(t)$ als der gesuchten Funktion. Separation der Variablen liefert

$$\frac{\mathrm{d}v}{v} = -\beta \, \mathrm{d}t \tag{5.31}$$

und damit nach Integration

$$v = v_\mathrm{o} \mathrm{e}^{-\beta t} \tag{5.32}$$

mit der Anfangsbedingung $v(t{=}0) = v_\mathrm{o}$. Für den Ort $x(t)$ können wir ebenfalls eine Differentialgleichung

$$\mathrm{d}x = v \, \mathrm{d}t \tag{5.33}$$

aufstellen. Mit der Anfangsbedingung $x(t{=}0) = x_0$ ergibt sich die Lösung

$$x = x_\mathrm{o} + \frac{v_\mathrm{o}}{\beta} \left(1 - \mathrm{e}^{-\beta t} \right) \; . \tag{5.34}$$

Aus (5.32) und (5.34) erhalten wir für die Geschwindigkeit in Abhängigkeit vom Ort

$$v(x) = v_\mathrm{o} - \beta (x - x_\mathrm{o}) \; . \tag{5.35}$$

□

Beispiel 47. Entladung eines Kondensators: Die Differentialgleichung für die Entladung eines Kondensators (Ladung Q, Kapazität C) über einen Widerstand R ist gegeben als

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = -\frac{Q}{CR} \; . \tag{5.36}$$

Separation der Variablen und Verwendung der Randbedingung $Q(t{=}0) = Q_\mathrm{o}$ liefert die Lösung

$$Q = Q_\mathrm{o} \mathrm{e}^{-t/CR} \; . \tag{5.37}$$

□

5.5 Homogene lineare DGL erster Ordnung mit konstantem Summanden

Wir werden jetzt die Differentialgleichung um einen konstanten Summanden erweitern. Eine physikalische Situation wäre der freie Fall mit Reibung: dann tritt in der Bewegungsgleichung (5.31) aus Bsp. 46 zusätzlich ein konstanter Term mg auf, der die Gravitationskraft beschreibt, vgl. Bsp. 48.

Definition 32. *Eine Differentialgleichung der Form*

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = ay + b \tag{5.38}$$

wird als homogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung mit konstantem Summanden *bezeichnet.*

Diese Form der DGL läßt sich ebenfalls durch Separation der Variablen lösen, der einzige Unterschied ergibt sich in der Durchführung der Integration: hier wird eine Substitution benötigt. Separation der Variablen liefert

$$ay + b = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \quad \Rightarrow \quad a\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}y}{y + b/a} \ . \tag{5.39}$$

Jetzt werden wieder beide Seiten der Gleichung integriert:

$$\int a\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}y}{y + b/a} \ . \tag{5.40}$$

Die Gleichung ist ähnlich (5.16), lediglich die rechte Seite muß mit Hilfe einer Substitution integriert werden. Mit $u = y + b/a$ und $u' = 1$ ergibt sich

$$\int a \, \mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}u}{u} \tag{5.41}$$

und damit nach Ausführen der Integration

$$ax = \ln u + \ln c \ , \tag{5.42}$$

wobei wieder beide Integrationskonstanten auf der rechten Seite zusammengefaßt sind. Auflösen nach u liefert

$$u = c \, \mathrm{e}^{ax} \ . \tag{5.43}$$

Re-Substitution ergibt

$$y + b/a = c \, \mathrm{e}^{ax} \quad \Rightarrow \quad f(x) = c \, \mathrm{e}^{ax} - b/a \ . \tag{5.44}$$

Die Integrationskonstante ist aus der Anfangs- oder Randbedingung zu bestimmen. Für $x = 0$ ist $y = 0$ und damit ergibt sich für die Integrationskonstante

$$f(0) = 0 = c \, \mathrm{e}^0 - b/a \quad \Rightarrow \quad c = b/a \ . \tag{5.45}$$

Die Lösung der Differentialgleichung ist damit

$$f(x) = -b/a\mathrm{e}^{ax} + b/a = b/a(1 - \mathrm{e}^{ax}) = y_{\mathrm{E}}(1 - \mathrm{e}^{ax}) \ . \tag{5.46}$$

Dieses Verfahren läßt sich erweitern um einen Term, der auch die unabhängige Variable x enthält. Damit erhalten wir das folgende Kochrezept: Differentialgleichungen 1. Ordnung vom Typ

$$y' = f(ax + by + c) \quad \text{bzw.} \quad y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \tag{5.47}$$

lassen sich durch die Substitutionen

$$u = ax + by + c \qquad \text{bzw.} \quad u = \frac{x}{y} \tag{5.48}$$

lösen:

1. Durchführung der Substitution.
2. Integration der neuen Differentialgleichung 1. Ordnung für die Hilfsfunktion u durch Trennung der Variablen.
3. Rücksubstitution und Auflösen der Gleichung nach y.

Beispiel 48. Freier Fall mit Stokes'scher Reibung: eine Masse m fällt mit einer Anfangsgeschwindigkeit v_o im Schwerefeld der Erde senkrecht nach unten. Als verzögernde Kraft wirkt eine Reibungskraft der Form $-\beta v$. Die Situation unterscheidet sich von der in Bsp. 46 dadurch, daß auf der rechten Seite der Bewegungsgleichung zusätzlich ein konstanter Term, die nach unten gerichtete Gewichtskraft $-mg$, auftritt. Die Bewegungsgleichung ist also

$$m \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -mg - \beta v \ . \tag{5.49}$$

Separation der Variablen liefert

$$\frac{m \, \mathrm{d}v}{mg + \beta v} = -\mathrm{d}t \ . \tag{5.50}$$

Mit der Substitution $u = mg + \beta v$ wird $\mathrm{d}u = \beta \mathrm{d}v$ und es ergibt sich

$$\frac{m}{\beta} \int\limits_{v_\text{o}}^{v} \frac{\mathrm{d}u}{u} = - \int\limits_{t_\text{o}}^{t} \mathrm{d}t \ . \tag{5.51}$$

Beachten Sie, daß wir in diesem Beispiel nicht erst eine allgemeine Lösung und dann deren Integrationskonstanten aus den Anfangsbedingungen bestimmt haben, sondern daß die Anfangsbedingungen als Integrationsgrenzen verwendet wurden. Integration und Re-Substitution liefern

$$\frac{m}{\beta} \ln \left(\frac{mg + \beta v}{mg + \beta v_\text{o}} \right) = -t \ . \tag{5.52}$$

Anwendung der Exponentialfunktion liefert

$$\frac{mg + \beta v}{mg + \beta v_\text{o}} = \exp \left\{ -\frac{\beta}{m} t \right\} \tag{5.53}$$

und damit für die Geschwindigkeit

$$v(t) = -\frac{mg}{\beta} + \left(\frac{mg}{\beta} + v_\text{o} \right) \exp \left\{ -\frac{\beta}{m} t \right\} \ . \tag{5.54}$$

Mit zunehmender Zeit strebt diese Geschwindigkeit gegen einen Grenzwert v_∞. Anschaulich ist dann die abwärts beschleunigende Kraft $-mg$ gleich der verzögernden Kraft βv, d.h. durch Gleichsetzen der beiden Kräfte erhalten wir $v_\infty = -mg/\beta$. Diese Endgeschwindigkeit erhalten wir auch, wenn wir in (5.54) die Zeit gegen ∞ gehen lassen. Dann geht die Exponentialfunktion gegen Null und nur der erste Summand bleibt stehen. □