

---

## Prólogo

Este libro de texto es una introducción al Cálculo Científico. Ilustraremos varios métodos numéricos para la resolución por computador de ciertas clases de problemas matemáticos que no pueden abordarse con “papel y lápiz”. Mostraremos cómo calcular los ceros o las integrales de funciones continuas, resolver sistemas lineales, aproximar funciones por polinomios y construir aproximaciones precisas de las soluciones de las ecuaciones diferenciales.

Con este objetivo, en el Capítulo 1 se establecerán las reglas de juego que adoptan los computadores cuando almacenan y operan con números reales y complejos, vectores y matrices.

Para hacer nuestra presentación concreta y atractiva adoptaremos los entornos de programación MATLAB<sup>®</sup><sup>1</sup> y Octave como leales compañeros. Octave es una reimplementación de parte de MATLAB que incluye muchos de sus recursos numéricos y se distribuye libremente bajo GNU *General Public License*. Descubriremos gradualmente sus principales comandos, instrucciones y construcciones. Mostraremos cómo ejecutar todos los algoritmos que introducimos a través del libro. Esto nos permitirá suministrar una evaluación cuantitativa inmediata de sus propiedades teóricas tales como estabilidad, precisión y complejidad. Resolveremos varios problemas que surgirán a través de ejercicios y ejemplos, a menudo consecuencia de aplicaciones específicas. A lo largo del libro haremos uso frecuente de la expresión “comando de MATLAB”; en ese caso, MATLAB debería ser entendido como el *lenguaje* que es subconjunto común a ambos programas MATLAB y Octave. Nos hemos esforzado para asegurar un uso sin problemas de nuestros códigos y programas bajo MATLAB y Octave. En los pocos casos en los que esto no

---

<sup>1</sup> MATLAB es una marca registrada de TheMathWorks Inc., 24 Prime Park Way, Natick, MA 01760, Tel: 001+508-647-7000, Fax: 001+508-647-7001.

se aplique, escribiremos una breve nota explicativa al final de la correspondiente sección.

Adoptaremos varios símbolos gráficos para hacer la lectura más agradable. Mostraremos al margen el comando de MATLAB (u Octave), al lado de la línea donde ese comando se introduce por primera

vez. El símbolo  se usará para indicar la presencia de ejercicios, mientras

que el símbolo  se utilizará cuando queramos atraer la atención del lector sobre un comportamiento crítico o sorprendente de un algoritmo o procedimiento. Las fórmulas matemáticas de especial relevancia

se pondrán en un recuadro. Finalmente, el símbolo  indicará la presencia de un panel resumiendo conceptos y conclusiones que acaban de ser expuestas y explicadas.

Al final de cada capítulo se dedica una sección específica a mencionar aquellos temas que no han sido abordados y a indicar las referencias bibliográficas para un tratamiento más amplio del material que hemos considerado.

Bastante a menudo remitiremos al texto [QSS06] donde muchas de las cuestiones abordadas en este libro se tratan con mayor profundidad, y donde se prueban resultados teóricos. Para una descripción más minuciosa de MATLAB enviamos a [HH05]. Todos los programas incluidos en este texto pueden descargarse de la dirección web

`mox.polimi.it/qs`.

No se piden especiales prerequisites al lector, con la excepción de un curso de Cálculo elemental.

Sin embargo, a lo largo del primer capítulo recordamos los principales resultados del Cálculo y la Geometría que se utilizarán extensamente a través de este texto. Los temas menos elementales, aquéllos que no son tan necesarios para un recorrido educacional introductorio se destacan

con el símbolo especial .

Agradecemos a Francesca Bonadei de Springer-Italia su colaboración indispensable a lo largo de este proyecto, a Paola Causin el habernos propuesto varios problemas, a Christophe Prud'homme, John W. Eaton y David Bateman su ayuda con Octave, y al proyecto Poseidón de la Escuela Politécnica Federal de Lausanne su apoyo económico.

Finalmente, queremos expresar nuestra gratitud a Alfredo Bermúdez por la traducción cuidadosa de este libro, así como por sus numerosas y acertadas sugerencias.

Lausanne y Milano, julio de 2006

Alfio Quarteroni, Fausto Saleri

---

## Índice

<b>1</b>	<b>Lo que no se puede ignorar</b>	<b>1</b>
1.1	Números reales	2
1.1.1	Cómo representarlos	2
1.1.2	Cómo operamos con números de punto flotante	4
1.2	Números complejos	7
1.3	Matrices	9
1.3.1	Vectores	14
1.4	Funciones reales	16
1.4.1	Los ceros	17
1.4.2	Polinomios	18
1.4.3	Integración y diferenciación	21
1.5	Errar no sólo es humano	23
1.5.1	Hablando de costes	26
1.6	Los entornos MATLAB y Octave	28
1.7	El lenguaje MATLAB	30
1.7.1	Instrucciones de MATLAB	31
1.7.2	Programación en MATLAB	33
1.7.3	Ejemplos de diferencias entre los lenguajes MATLAB y Octave	37
1.8	Lo que no le hemos dicho	38
1.9	Ejercicios	38
<b>2</b>	<b>Ecuaciones no lineales</b>	<b>41</b>
2.1	Método de bisección	43
2.2	Método de Newton	47
2.2.1	Cómo terminar las iteraciones de Newton	49
2.2.2	Método de Newton para sistemas de ecuaciones no lineales	51
2.3	Iteraciones de punto fijo	54
2.3.1	Cómo terminar las iteraciones de punto fijo	58

2.4	Aceleración utilizando el método de Aitken . . . . .	58
2.5	Polinomios algebraicos . . . . .	63
2.5.1	Algoritmo de Hörner . . . . .	64
2.5.2	Método de Newton-Hörner . . . . .	66
2.6	Lo que no le hemos dicho . . . . .	68
2.7	Ejercicios . . . . .	70
<b>3</b>	<b>Aproximación de funciones y datos . . . . .</b>	<b>73</b>
3.1	Interpolación . . . . .	76
3.1.1	Polinomio de interpolación de Lagrange . . . . .	77
3.1.2	Interpolación de Chebyshev . . . . .	82
3.1.3	Interpolación trigonométrica y FFT . . . . .	84
3.2	Interpolación lineal a trozos . . . . .	89
3.3	Aproximación por funciones <i>spline</i> . . . . .	90
3.4	Método de mínimos cuadrados . . . . .	95
3.5	Lo que no le hemos dicho . . . . .	100
3.6	Ejercicios . . . . .	101
<b>4</b>	<b>Diferenciación e integración numéricas . . . . .</b>	<b>105</b>
4.1	Aproximación de derivadas de funciones . . . . .	107
4.2	Integración numérica . . . . .	109
4.2.1	Fórmula del punto medio . . . . .	110
4.2.2	Fórmula del trapecio . . . . .	112
4.2.3	Fórmula de Simpson . . . . .	113
4.3	Cuadraturas de tipo interpolatorio . . . . .	115
4.4	Fórmula de Simpson adaptativa . . . . .	119
4.5	Lo que no le hemos dicho . . . . .	123
4.6	Ejercicios . . . . .	124
<b>5</b>	<b>Sistemas lineales . . . . .</b>	<b>127</b>
5.1	Método de factorización LU . . . . .	131
5.2	La técnica del pivoteo . . . . .	138
5.3	¿Cómo es de precisa la factorización LU? . . . . .	140
5.4	¿Cómo resolver un sistema tridiagonal? . . . . .	144
5.5	Sistemas sobredeterminados . . . . .	146
5.6	Lo que se esconde detrás del comando $\backslash$ . . . . .	148
5.7	Métodos iterativos . . . . .	150
5.7.1	Cómo construir un método iterativo . . . . .	151
5.8	Métodos de Richardson y del gradiente . . . . .	155
5.9	Método del gradiente conjugado . . . . .	158
5.10	¿Cuándo debería pararse un método iterativo? . . . . .	161
5.11	Confrontando: ¿directo o iterativo? . . . . .	164
5.12	Lo que no le hemos dicho . . . . .	169
5.13	Ejercicios . . . . .	170

<b>6</b>	<b>Autovalores y autovectores</b> .....	173
6.1	Método de la potencia .....	177
6.1.1	Análisis de la convergencia .....	179
6.2	Generalización del método de la potencia .....	180
6.3	Cómo calcular la traslación .....	183
6.4	Cálculo de todos los autovalores .....	185
6.5	Lo que no le hemos dicho .....	189
6.6	Ejercicios .....	190
<b>7</b>	<b>Ecuaciones diferenciales ordinarias</b> .....	193
7.1	El problema de Cauchy .....	196
7.2	Métodos de Euler .....	197
7.2.1	Análisis de la convergencia .....	200
7.3	Método de Crank-Nicolson .....	203
7.4	Cero-estabilidad .....	206
7.5	Estabilidad sobre intervalos no acotados .....	208
7.5.1	Región de estabilidad absoluta .....	211
7.5.2	La estabilidad absoluta controla las perturbaciones	211
7.6	Métodos de orden superior .....	218
7.7	Métodos predictor-corrector .....	223
7.8	Sistemas de ecuaciones diferenciales .....	225
7.9	Algunos ejemplos .....	231
7.9.1	El péndulo esférico .....	231
7.9.2	El problema de los tres cuerpos .....	235
7.9.3	Algunos problemas rígidos (stiff) .....	237
7.10	Lo que no le hemos dicho .....	241
7.11	Ejercicios .....	241
<b>8</b>	<b>Métodos numéricos para problemas de valores iniciales y de contorno</b> .....	245
8.1	Aproximación de problemas de contorno .....	248
8.1.1	Aproximación por diferencias finitas .....	249
8.1.2	Aproximación por elementos finitos .....	251
8.1.3	Aproximación por diferencias finitas de problemas bidimensionales .....	254
8.1.4	Consistencia y convergencia .....	260
8.2	Aproximación por diferencias finitas de la ecuación del calor .....	262
8.3	Ecuación de las ondas .....	266
8.3.1	Aproximación por diferencias finitas .....	269
8.4	Lo que no le hemos dicho .....	272
8.5	Ejercicios .....	273

<b>9 Soluciones de los ejercicios</b> .....	275
9.1 Capítulo 1 .....	275
9.2 Capítulo 2 .....	278
9.3 Capítulo 3 .....	284
9.4 Capítulo 4 .....	288
9.5 Capítulo 5 .....	293
9.6 Capítulo 6 .....	298
9.7 Capítulo 7 .....	302
9.8 Capítulo 8 .....	311
<b>Referencias</b> .....	317
<b>Índice alfabético</b> .....	321

---

## Programas

2.1	<b>bisection</b> : método de bisección	45
2.2	<b>newton</b> : método de Newton	50
2.3	<b>newtonsys</b> : método de Newton para sistemas no lineales	52
2.4	<b>aitken</b> : método de Aitken	61
2.5	<b>horner</b> : algoritmo de la división sintética	65
2.6	<b>newtonhorner</b> : método de Newton-Hörner	67
3.1	<b>cubicspline</b> : <i>spline</i> cúbico de interpolación	92
4.1	<b>midpointc</b> : fórmula de cuadratura del punto medio compuesta	112
4.2	<b>simpsonc</b> : fórmula de cuadratura de Simpson compuesta	114
4.3	<b>simpadpt</b> : fórmula de Simpson adaptativa	122
5.1	<b>lugauss</b> : factorización de Gauss	136
5.2	<b>itermeth</b> : método iterativo general	153
6.1	<b>eigpower</b> : método de la potencia	178
6.2	<b>invshift</b> : método de la potencia inversa con traslación	182
6.3	<b>gershcircles</b> : círculos de Gershgorin	183
6.4	<b>qrbasic</b> : método de iteraciones QR	187
7.1	<b>feuler</b> : método de Euler progresivo	198
7.2	<b>beuler</b> : método de Euler regresivo	199
7.3	<b>cranknic</b> : método de Crank-Nicolson	204
7.4	<b>predcor</b> : método predictor-corrector	224
7.5	<b>onestep</b> : un paso de Euler progresivo ( <b>eeonestep</b> ), un paso de Euler regresivo ( <b>eionestep</b> ), un paso de Crank-Nicolson ( <b>cnonestep</b> )	225
7.6	<b>newmark</b> : método de Newmark	230
7.7	<b>fvinc</b> : término forzante para el problema del péndulo esférico	234
7.8	<b>trescuerpos</b> : término forzante para el sistema simplificado de tres cuerpos	236
8.1	<b>bvp</b> : aproximación de un problema de contorno unidimensional por el método de diferencias finitas	250

XII Programas

8.2	<b>poissonfd</b> : aproximación del problema de Poisson con dato de Dirichlet mediante el método de diferencias finitas con cinco puntos .....	258
8.3	<b>heattheta</b> : $\theta$ -método para la ecuación del calor en un dominio cuadrado .....	264
8.4	<b>newmarkwave</b> : método de Newmark para la ecuación de las ondas .....	269
9.1	<b>rk2</b> : método de Heun .....	306
9.3	<b>neumann</b> : aproximación de un problema de contorno de Neumann .....	314