Funktionen

Folgen

Setzen Sie in die Formel $a_n = \frac{1}{(n+1)^2}$ nacheinander die natürlichen Zahlen $0, 1, 2, 3, \ldots$ anstelle von n ein, so erhalten Sie:

$$1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \ldots$$

Dies ist eine **unendliche Folge** reeller Zahlen.

Arithmetische Folgen

Eine Folge, bei der die Differenz $d = a_{n+1} - a_n$ zweier Folgenglieder immer konstant ist, heißt **arithmetische Folge**.
Ist das erste Folgenglied a_0, so können Sie bei arithmetischen Folgen das n-te Glied a_n einfach berechnen:

$$a_n = a_0 + n \cdot d$$

Beispiel
In der Folge 3, 5, 7, 9,... ist die Differenz zweier Folgenglieder immer konstant $d = 2$. Deshalb gilt wegen $a_0 = 3$:

$$a_n = 3 + n \cdot 2 = 2n + 3$$

Geometrische Folgen

Eine Folge, bei der sich die Folgenglieder um einen konstanten Faktor q ändern, heißt **geometrische Folge**.

$$q = \frac{a_{n+1}}{a_n} \quad \Leftrightarrow \quad a_{n+1} = q \cdot a_n$$

Ist das erste Folgenglied a_0, so können Sie auch bei geometrischen Folgen das n-te Glied a_n einfach berechnen:

$$a_n = a_0 \cdot q^n$$

Beispiel
In der Folge $2, 4, 8, 16, \ldots$ ist der Quotient zweier Folgenglieder immer konstant $q = 2$. Hier gilt wegen $a_0 = 2$:

$$a_n = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$$

Beispiel
Rechnen Sie mit Zinseszins, so bildet das Kapital nach n Jahren eine geometrische Folge mit $q = 1 + \frac{p}{100}$ und $a_0 = K_0$.

Grenzwerte von Folgen und Funktionen

Nähert sich eine Folge a_n für $n \to \infty$ immer stärker einer Zahl a, so sagt man, die Folge hat den **Grenzwert** a:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = a$$

Analog zu den Folgengrenzwerten definiert man Funktionengrenzwerte. Hier muss die unabhängige Variable aber nicht unbedingt gegen ∞ gehen, sondern es sind beliebige Punkte zulässig: Nähert sich der Funktionswert $f(x)$

(s. S. 64) bei Annäherung von x an x_0 immer stärker dem Wert c, so schreibt man

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = c$$

und spricht: „Der Grenzwert von $f(x)$ für x gegen x_0 ist c." Dies gilt auch für den Fall, dass x_0 oder c unendlich sind.
Der Grenzwert der Summe, des Produkts und des Quotienten konvergenter Folgen und Funktionen, ist die Summe, das Produkt, ... der Grenzwerte der Einzelfolgen bzw. -funktionen, wenn der Grenzwert der Nennerfolge bzw. Nennerfunktion nicht 0 ist:

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) \pm \lim_{x \to x_0} g(x)$$

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x)$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to x_0} f(x)}{\lim_{x \to x_0} g(x)}, \text{ falls } \lim_{x \to x_0} g(x) \neq 0$$

Für Folgengrenzwerte gilt dies analog, nur dass x_0 immer unendlich ist und die unabhängige Variable meist nicht x, sondern n heißt.

Beispiele

$$\lim_{n \to \infty} \frac{2n^3 - n^2 + 5}{5n^3 + 2n - 1} = \lim_{n \to \infty} \frac{2 - \frac{1}{n} + \frac{5}{n^2}}{5 + \frac{2}{n^2} - \frac{1}{n^3}} = \frac{2}{5}$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n^3 - 6n^2}{n^4 + 6n^2} = \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{1}{n} - \frac{6}{n^2}}{1 + \frac{6}{n^2}} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2-3n}{n+4}\right)^2 = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{2}{n}-3}{1+\frac{4}{n}}\right)^2 = 3^2 = 9$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4n+2}{5n-1}\right)\left(\frac{3}{2}+\frac{2}{n+1}\right) = \frac{4}{5}\cdot\frac{3}{2} = \frac{6}{5}$$

Sind Zähler und Nenner Polynome, so können Sie den Grenzwert für $n \to \infty$ direkt an ihrem Grad, also dem höchsten auftretenden Exponenten, ablesen:

- Gilt Zählergrad $<$ Nennergrad, so gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

  Beispiel

  $$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^3-n^2+5}{5n^4+2n-1} = 0$$

- Gilt Zählergrad $=$ Nennergrad, so gilt:

  $\lim\limits_{n\to\infty} a_n =$ Verhältnis der Koeffizienten der höchsten Potenz.

  Beispiel

  $$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^3-n^2+5}{5n^3+2n-1} = \frac{2}{5}$$

- Gilt Zählergrad $>$ Nennergrad, so gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$.

  Beispiel

  $$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^4-n^2+5}{5n^3+2n-1} = \infty$$

Vorsicht: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$

Die Regeln von L'Hospital

Sehr nützlich bei der Bestimmung von Grenzwerten der Form „$\frac{0}{0}$“ oder „$\frac{\infty}{\infty}$“ sind die Regeln von l'Hospital: Konvergieren Zähler und Nenner beide gegen 0 oder beide gegen ∞, so leiten Sie Zähler und Nenner einzeln ab (s. S. 80 ff.) und schauen sich den Grenzwert dieses neuen Bruchs an.

Gilt $f(x) \to 0$, $g(x) \to 0$ oder $f(x) \to \infty$, $g(x) \to \infty$ für $x \to x_0$, und existiert $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ dann gilt:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Beispiel

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x}{\ln x}\right) \overset{\text{L'H. mit } \frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} x = \infty$$

Beispiel

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \left(x \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\right) &\overset{\text{Logarithmengesetze}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x+1) - \ln(x-1)}{\frac{1}{x}} \\
&\overset{\text{L'H. mit } \frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1}}{-\frac{1}{x^2}} \\
&= \lim_{x\to\infty} -\frac{x^2(x-1-(x+1))}{(x+1)(x-1)} = 2
\end{aligned}$$

Für die Anwendung der Regeln von L'Hospital ist es wichtig zu prüfen, ob wirklich Terme der geforderten Form (also „$\frac{\infty}{\infty}$“ bzw. „$\frac{0}{0}$“) vorliegen, sonst kann dies zu falschen Ergebnissen führen!