Einleitung

Eine glatte, komplex-wertige Funktion $f : \mathcal{O} \to \mathbb{C}$, definiert auf einer offenen Teilmenge $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^2$, ist bekanntlich genau dann holomorph, falls sie Lösung der Cauchy-Riemann-Gleichung

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0 \quad \text{mit} \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

ist. Geometrisch fassen wir hierbei $\mathbb{R}^2$ als flachen Euklidischen Raum mit fixierter Orientierung auf. Änderten wir diese Orientierung, so ginge der Operator $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ über in den Differentialoperator $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)$. Beide Operatoren zusammengefaßt ergeben einen Differentialoperator $P : C^\infty(\mathbb{R}^2; \mathbb{C}^2) \to C^\infty(\mathbb{R}^2; \mathbb{C}^2)$, welcher durch die Formel

$$P\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = 2i\begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial z} \\ \\ \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \end{pmatrix}$$

auf Paaren komplex-wertiger Funktionen wirkt. Eine leichte Umrechnung führt zu nachstehender Formel für P:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial y}.$$

Bezeichnen wir die hierbei auftretenden Matrizen mit γ_x und γ_y,

$$\gamma_x = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \gamma_y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

so gilt

$$P = \gamma_x \frac{\partial}{\partial x} + \gamma_y \frac{\partial}{\partial y}$$

und

$$\gamma_x^2 = -E = \gamma_y^2 \quad , \quad \gamma_x\gamma_y + \gamma_y\gamma_x = 0.$$

Das Quadrat des Operators P stimmt mit dem Laplace-Operator Δ von $\mathbb{R}^2$ überein:

$$P^2 = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \Delta.$$

Wir haben also eine Wurzel $P = \sqrt{\Delta}$ des Laplace-Operators in der Klasse der Differentialoperatoren erster Ordnung gefunden, und zudem beschreibt der Kern von P die holomorphen (anti-holomorphen) Funktionen.

In Euklidischen Räumen höherer Dimension trat die Frage nach einer Wurzel $\sqrt{\Delta}$ aus dem Laplace-Operator durch die folgende Diskussion von P.A.M. Dirac (1928) auf. Sei T ein freies, klassisches Teilchen in $\mathbb{R}^3$ mit $spin\frac{1}{2}$, dessen Bewegung wir in der speziellen Relativitätstheorie studieren. Sind m die Masse, E seine Energie und $p = \frac{vm}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ das Moment, so gilt

$$E = \sqrt{c^2p^2 + m^2c^4}.$$

Quantenmechanisch wird T durch eine Zustandsfunktion $\psi(t,x)$ definiert auf $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^3$ beschrieben, und die Energie sowie das Moment sind durch die Differentialoperatoren

$$E \to ih\frac{\partial}{\partial t} \qquad p \longmapsto -ih\ grad$$

zu ersetzen. Die Zustandsfunktion ψ wird Lösung der Gleichung

$$ih\frac{\partial\psi}{\partial t} = \sqrt{c^2h^2\Delta + m^2c^4}\ \psi$$

mit dem 3-dimensionalen Laplace-Operator $\Delta = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}$. Mathematisch gehen wir nun zum n-dimensionalen Euklidischen Raum über und wollen nach einer Wurzel $P = \sqrt{\Delta}$ aus dem Laplace-Operator $\Delta = -\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ fragen. Die naheliegende Annahme, daß es sich bei P um einen Differentialoperator erster Ordnung mit konstantem Koeffizienten handeln sollte, führt zu dem Ansatz

$$P = \sum_{i=1}^{n}\gamma_i\frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Die Gleichung $P^2 = \Delta = -\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ ist genau dann erfüllt, falls für die Koeffizienten γ_i von P die Relationen

$$\gamma_i^2 = -E \qquad i = 1,\ldots,n$$

$$\gamma_i\gamma_j + \gamma_j\gamma_i = 0 \qquad i \neq j$$

gelten. Ist $n = 3$, so sehen wir sofort eine Realisierung dieser Relationen. Der Vektorraum $\mathbb{C}^2$ kann mit der Menge der Quaternionen durch $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = z_1 + jz_2$ identifiziert werden und $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 : \mathbb{C}^2 = \mathbb{H} \to \mathbb{H} = \mathbb{C}^2$ sind die Multiplikationen mit den Quaternionen $i, j, k \in \mathbb{H}$ entsprechend. Schreiben wir dies als komplexe (2×2)-Matrizen, so gilt

$$\gamma_1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \quad , \quad \gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Diejenige Algebra, welche multiplikativ von n-Elementen $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ erzeugt wird mit den Relationen

$$\gamma_i^2 = -E \quad , \quad \gamma_i\gamma_j + \gamma_j\gamma_i = 0 \quad (i \neq j),$$

nennt man die Clifford-Algebra $\mathcal{C}_n$ (1845-1879) der negativ-definiten quadratischen Form $(\mathbb{R}^n, -x_1^2 - \ldots - x_n^2)$. Die Frage nach der Wurzel $\sqrt{\Delta}$ aus dem Laplace-Operator führt somit darauf, komplexe Darstellungen $\kappa : \mathcal{C}_n \to End\ (V)$ der Clifford-Algebra zu studieren. Es stellt sich heraus, daß $\mathcal{C}_n$ eine kleinste Darstellung der Dimension $\dim_{\mathbb{C}} V = 2^{[\frac{n}{2}]}$ besitzt. Der entsprechende Vektorraum wird mit Δ_n bezeichnet und seine Elemente sind die Dirac-Spinoren. $\sqrt{\Delta}$ ist dann ein Differentialoperator erster Ordnung mit konstantem Koeffizienten, welcher auf dem Raum $\mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}^n; \Delta_n)$ der glatten Funktionen auf $\mathbb{R}^n$ mit Werten in Δ_n wirkt.

Spinoren können mit Vektoren des Euklidischen Raumes multipliziert werden. Einen Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ zerlegen wir in seine Komponenten bezüglich einer orthonormalen Basis $e_1, \ldots, e_n$

$$x = \sum_{i=1}^{n} x^i e_i$$

und definieren dann das Produkt $x \cdot \psi$ mit einem Spinor $\psi \in \Delta_n$ durch

$$x \cdot \psi = \sum_{i=1}^{n} x^i \kappa(\gamma_i)(\psi).$$

Aus der Relation der Clifford-Algebra folgt sofort die Formel

$$x \cdot (x \cdot \psi) = -||x||^2 \psi.$$

Insbesondere verschwindet das Produkt $x \cdot \psi$ nur dann, falls der Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ oder der Spinor $\psi \in \Delta_n$ gleich Null ist. Im Raum Δ_n der Spinoren existiert keine Darstellung $\varepsilon : GL^+(n;\mathbb{R}), SO(n;\mathbb{R}) \to GL(\Delta_n)$ der linearen Gruppe oder der orthogonalen Gruppe, die mit der Clifford-Multiplikation verträglich wäre, d.h. mit der Eigenschaft

$$A(x) \cdot \varepsilon(A)(\psi) = \varepsilon(A)(x \cdot \psi)$$

für alle $A \in SO(n;\mathbb{R})$, $x \in \mathbb{R}^n$ und $\psi \in \Delta_n$. Spinoren über Riemannschen Mannigfaltigkeiten können daher nicht als Schnitte in einem Vektorbündel definiert werden, welches assoziiert zum Reperbündel der Mannigfaltigkeit ist und aus diesem Grunde war Jahrzehnte in der Differentialgeometrie die Frage unklar, inwieweit sich das Konzept der Spinoren im flachen Raum global auf Riemannsche Mannigfaltigkeiten übertragen läßt. Elie Cartan drückte die skizzierte Schwierigkeit 1938 in seinem Buch „Leçons sur la théorie des spineurs“ in folgenden Worten aus:

> „With the geometric sense we have given to the word 'spinor' it is impossible to introduce fields of spinors into the classical Riemannian technique.“

Es bedurfte Ende der vierziger Jahre der Entwicklung der Begriffswelt der Hauptfaserbündel, assoziierten Bündel und der allgemeinen Zusammenhangstheorie in der Differentialgeometrie, um diese Schwierigkeit zu überwinden. Die Gruppe $SO(n;\mathbb{R})$ ist nicht einfach-zusammenhängend. Für $n \geq 3$ ist ihre universelle Überlagerung - die sogenannte $Spin(n)$-Gruppe - kompakt und überlagert $SO(n;\mathbb{R})$ zweifach. Andererseits existiert eine Darstellung $\varepsilon : Spin(n) \to GL(\Delta_n)$ der Spin-Gruppe verträglich mit der Clifford-Multiplikation. Betrachten wir somit spezielle Riemannsche Mannigfaltigkeiten M^n, deren Reperbündel eine Reduktion von der Strukturgruppe $SO(n;\mathbb{R})$ auf die zweifache Überlagerung $Spin(n)$ zulassen - heute spricht man von Spin-Mannigfaltigkeiten - , so können wir das zu dieser Reduktion assoziierte Vektorbündel S mittels der Darstellung $\varepsilon : Spin(n) \to GL(\Delta_n)$ definieren, das sogenannte Spinorbündel von M^n. Spinorfelder über M^n sind Schnitte im Bündel S und der Dirac-Operator D kann - wie im Euklidischen Raum - durch die Formel

$$D\psi = \sum_{i=1}^{n} e_i \cdot \nabla_{e_i} \cdot \psi$$

eingeführt werden. Dabei ist ∇ die kovariante Ableitung, welche dem Levi-Civita-Zusammenhang der Riemannschen Mannigfaltigkeit entspricht.

Spinorfelder und Dirac-Operatoren lassen sich somit nicht in jedem Riemannschen Raum, aber dennoch in einer großen Klasse solcher einführen. Die Existenz einer $Spin(n)$-Reduktion des Reperbündels von M^n ist eine topologische Bedingung an die Mannigfaltigkeit, die ersten beiden Stiefel-Whitney-Klassen müssen verschwinden:

$$w_1(M^n) = 0 = w_2(M^n).$$

In der Dimension $n = 4$ bedeutet diese topologische Bedingung im Fall einer einfach-zusammenhängenden, kompakten Mannigfaltigkeit M^4, daß ihre Schnittform $H^2(M^4;\mathbb{Z})$ als quadratische Form über dem Ring $\mathbb{Z}$ eine gerade, unimodulare Form ist. Die Algebra der quadratischen $\mathbb{Z}$-Formen ergibt in diesem Fall die Teilbarkeit der Signatur σ durch 8. Verwunderlicherweise bewies Rochlin 1952 eine zusätzliche Teilbarkeit durch 2 der Signatur einer glatten, kompakten 4-dimensionalen Spin-Mannigfaltigkeit $M^4, \sigma(M^4)$ ist durch 16 teilbar:

$$\sigma(M^4)/16 \in \mathbb{Z}.$$

Diese nicht aus algebraischen Überlegungen resultierende zusätzliche Teilbarkeit der Signatur einer 4-dimensionalen Spin-Mannigfaltigkeit war innermathematisch ein wesentlicher Aspekt, um Spinorfelder und Dirac-Operatoren einzuführen. Die dahinterstehende Überlegung kann wie folgt skizziert werden. Könnte es sein, daß auf jeder glatten, kompakten 4-dimensionalen Mannigfaltigkeit M^4 mit gerader Schnittform $H^2(M^4;\mathbb{Z})$ ein elliptischer Operator P existiert, dessen Index gleich $\sigma/16$ ist? Die Antwort darauf kennen wir heute, es handelt sich im wesentlichen um den Dirac-Operator dieser Spin-Mannigfaltigkeit, welcher endgültig im Zusammenhang mit der Ausarbeitung der Indextheorie für elliptische Operatoren von M.F. Atiyah 1962 für Riemannsche Mannigfaltigkeiten eingeführt worden ist. Seither tritt er in vielen Zweigen der Mathematik auf und zählt zu den grundlegenden elliptischen Differentialoperatoren der Analysis und Geometrie.

Das vorliegende Buch entstand nach einer einsemestrigen Vorlesung an der Humboldt-Universität zu Berlin im Studienjahr 1996/97 und ist eine Einführung in die Theorie der Spinoren und Dirac-Operatoren über Riemannschen Mannigfaltigkeiten. Vom Leser werden nur die grundlegenden Kenntnisse der Algebra und Geometrie im Umfang von zwei bis drei Jahren eines Mathematik- oder Physikstudiums erwartet. Die Darstellung beginnt mit einem algebraischen Teil, welcher Clifford-Algebren, Spin-Gruppen und die Spin-Darstellung betrifft. Die topologischen Aspekte der Existenz und Klassifikation von Spin-Reduktionen eines $SO(n)$-Hauptfaserbündels besprechen wir in Kapitel 2. Die Darlegung hier ist so angelegt, daß im Grunde nur elementare Überlagerungstheorie topologischer Räume benötigt wird. Zugleich formulieren wir die Resultate jeweils kohomologisch in die Sprache der charakteristischen Klassen um. Das sich anschließende Kapitel 3 stellt die Analysis im Spinorbündel, den Twistor-Operator und den Dirac-Operator ausführlich dar. Wir benutzen dabei systematisch die allgemeinen Techniken der Hauptfaserbündel und der Zusammenhangstheorie. Im Anhang 2 zu diesem Buch stellen wir daher diese Resultate der modernen Differentialgeometrie ohne Beweis noch einmal zusammen. Kapitel 4 enthält die Beweise der analytischen Eigenschaften von Dirac-Operatoren (wesentliche Selbstadjungiertheit, Fredholm-Eigenschaft) mit solchen Beweisen, die speziell für Dirac-Operatoren unter Umgehung der allgemeinen Theorie für elliptische Pseudodifferentialoperatoren möglich sind. Eigenwertabschätzung und Lösungsräume spezieller spinorieller Feldgleichungen (Killing-Spinoren, Twistorspinoren) studieren wir im Ansatz im Kapitel 5 und verweisen für detailliertere Untersuchungen zu diesen Fragen auf die angegebene Literatur. Das Buch schließt im Anhang 1 mit einer überarbeiteten Version eines Vortrages des Autors am 09.02.1995 im Seminar des Sonderforschungsbereiches 288 „Differentialgeometrie und Quantenphysik" in Berlin zum Thema der Seiberg-Witten-Theorie ab.

Seit den achtziger Jahren arbeitet an der Humboldt-Universität zu Berlin eine Gruppe von jüngeren Mathematikern zu Spektraleigenschaften von Dirac-Operatoren und Lösungsräumen spinorieller Feldgleichungen. Viele Ergebnisse dieser Zeit sind in dem Literaturverzeichnis zusammengestellt, das vorliegende Buch kann andererseits als eine Einführung bei näherem Studium dienen. Diesen Studenten und Mitarbeitern danke ich für die zahlreichen Hinweise und Anmerkungen, welche in dieser oder jener Form den vorliegenden Text inhaltlich beeinflußt haben.

Insbesondere danke ich Frau Dr. Ines Kath für ihre sorgfältigen und detaillierten Korrekturen des Textes und Frau Heike Pahlisch für den alle Wünsche berücksichtigenden Computersatz des Manuskriptes.

Berlin, im März 1997 Thomas Friedrich