1 Hydromechanik

1.1 Eigenschaften einer Flüssigkeit

Die *Hydromechanik* ist die Lehre vom Gleichgewicht und von der Bewegung der Flüssigkeiten. Nach der Erfahrung unterscheiden sich Flüssigkeiten – und auch Gase – von den festen Körpern hauptsächlich dadurch, daß sie Formänderungen, die langsam und ohne Volumenänderung vor sich gehen, nur sehr geringen Widerstand entgegensetzen. Eine solche Formänderung erfährt zum Beispiel eine Flüssigkeit, die sich zwischen zwei Platten befindet, an diesen haftet und einer scherenden Belastung unterworfen wird (Abb. 1.1a). Das Verschieben der Teilchen gegeneinander erfolgt unter dem Einfluß von Schubspannungen (Abb. 1.1b) und dauert an, solange die Schubspannungen wirken. Eine Flüssigkeit ist daher ein Stoff, der einer scherenden Beanspruchung unbegrenzt nachgibt. Dies bedeutet insbesondere, daß in einer ruhenden Flüssigkeit keine Schubspannungen auftreten können.

Die Schubspannungen hängen von der zeitlichen Änderung $\dot{\gamma}$ des Winkels γ ab: $\tau = f(\dot{\gamma})$. Dabei gilt $f(0) = 0$. Bei manchen Flüssigkeiten stellt man im Experiment einen linearen Zusammenhang

$$\tau = \eta \dot{\gamma} \tag{1.1}$$

fest. Solche Flüssigkeiten nennt man *Newtonsche Flüssigkeiten*. Die Größe η heißt *dynamische Viskosität* (*dynamische Zähigkeit, Scherzähigkeit*) und wird zum Beispiel in Ns/m^2 angegeben. Sie ist ein Materialparameter und hängt u.a. von der Temperatur der Flüssigkeit ab.

Wenn man den Schubversuch nach Abb. 1.1a mit einem elastischen Festkörper statt mit einer Flüssigkeit durchführt, dann stellt sich ein zeitunabhängiger Winkel γ ein. Dabei gilt anstelle von (1.1) das Hookesche Gesetz (Band 2, Gl. (3.10)) $\tau = G\gamma$.

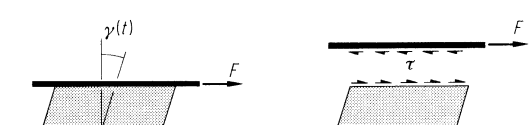

Abb. 1.1 **a** **b**

In vielen Fällen ist es zulässig, die bei der Bewegung einer Flüssigkeit auftretenden Schubspannungen zu vernachlässigen. Dies stellt eine Idealisierung der wirklichen Vorgänge dar und vereinfacht die Behandlung von praktischen Problemen beträchtlich. Man spricht dann von einer *reibungsfreien Flüssigkeit*. Dagegen nennt man eine Flüssigkeit, bei der die Schubspannungen berücksichtigt werden, eine *zähe* (*viskose*) *Flüssigkeit*.

Flüssigkeiten erfahren selbst unter hohem Druck nur eine sehr geringe Volumenänderung. Man kann sie daher bei fast allen praktisch wichtigen Vorgängen als *inkompressibel* betrachten. Dann ist die Dichte vom Druck unabhängig; sie kann aber bei inhomogenen Flüssigkeiten vom Ort und von der Zeit abhängen. Für homogene, inkompressible Flüssigkeiten ist die Dichte ϱ räumlich und zeitlich konstant:

$$\boxed{\varrho = \text{const}} \,. \tag{1.2}$$

Eine reibungsfreie Flüssigkeit mit konstanter Dichte nennt man *ideale Flüssigkeit*. Wir wollen im folgenden immer voraussetzen, daß (1.2) gilt.

Wie bereits erwähnt, setzen auch Gase einer scherenden Beanspruchung nur sehr geringen Widerstand entgegen. Im Gegensatz zu Flüssigkeiten besitzen Gase aber keine freie Oberfläche. Sie füllen jeden ihnen zur Verfügung stehenden Raum – gegebenenfalls unter Änderung ihrer Dichte – vollständig aus. Die Dichte hängt dabei stark vom Druck und von der Temperatur ab. Die Erfahrung zeigt allerdings, daß die Dichteänderung in Sonderfällen auch bei Gasen gering sein kann und dann vernachlässigbar ist. Dies gilt zum Beispiel, wenn die Strömungsgeschwindigkeit des Gases klein gegen die Schallgeschwindigkeit im Gas ist und wenn keine großen Druck- und Temperaturunterschiede vorhanden sind. Dann kann man auch bei einem Gas die Dichte als konstant ansehen und das Gas wie eine Flüssigkeit behandeln. Strömungsvorgänge, die mit großen Volumen- bzw. Dichteänderungen verbunden sind, werden in der *Gasdynamik* untersucht.

Das Unterscheidungsmerkmal zwischen Flüssigkeiten und Gasen wird durch den Begriff *tropfbar* charakterisiert. Als Oberbegriff für beide Aggregatzustände hat sich die Bezeichnung *Fluid* eingebürgert: tropfbare Fluide sind Flüssigkeiten, nicht tropfbare Fluide sind Gase.

1.2 Hydrostatik

Die *Hydrostatik* ist die Lehre vom Verhalten ruhender Flüssigkeiten. Von besonderem Interesse sind hierbei die Verteilung des Drucks in ei-

ner Flüssigkeit sowie die Kräfte, die von einer Flüssigkeit auf in ihr schwimmende Körper oder auf sie begrenzende Flächen ausgeübt werden. Zu deren Ermittlung verwenden wir das Schnittprinzip (Band 1, Abschn. 1.4) sowie die Gleichgewichtsbedingungen. Beide gelten nicht nur bei festen, sondern auch bei flüssigen Stoffen.

Da die Schubspannungen in beliebigen ruhenden Flüssigkeiten Null sind, gelten die folgenden Überlegungen gleichermaßen für reibungsfreie und für zähe Flüssigkeiten.

1.2.1 Druck in einer ruhenden Flüssigkeit

Nach Abschnitt 1.1 treten in einer ruhenden Flüssigkeit nur Normalspannungen auf. Bei Vorgängen von technischer Bedeutung sind dies Druckspannungen. Sie können nach dem Schnittprinzip veranschaulicht und einer Berechnung zugänglich gemacht werden.

Wir wollen im folgenden zeigen, daß die Druckspannungen in einem beliebigen Punkt der Flüssigkeit unabhängig von der Orientierung des Schnittes sind. Dazu denken wir uns dort einen kleinen Keil der Dicke Δz aus der Flüssigkeit geschnitten; er ist in Abb. 1.2 in der Seitenansicht dargestellt. Der Winkel α ist dabei beliebig gewählt. Die auf die Schnittflächen wirkenden Spannungen sind im Bild als Druckspannungen eingezeichnet und mit p, p_x und p_y bezeichnet. Außerdem wird das Element durch eine Volumenkraft $\boldsymbol{f}$ mit den Komponenten f_x, f_y und f_z belastet.

Das Kräftegleichgewicht in x- und in y-Richtung liefert

$$\rightarrow: \quad p_x \Delta y \Delta z - p \Delta s \Delta z \cos\alpha + f_x \frac{1}{2} \Delta x \Delta y \Delta z = 0\,,$$

$$\uparrow: \quad p_y \Delta x \Delta z - p \Delta s \Delta z \sin\alpha + f_y \frac{1}{2} \Delta x \Delta y \Delta z = 0\,.$$

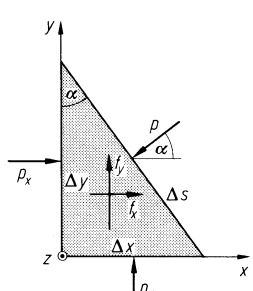

Abb. 1.2

Mit $\Delta x = \Delta s \sin\alpha$ und $\Delta y = \Delta s \cos\alpha$ folgt daraus

$$p_x = p - f_x \Delta x/2\,, \quad p_y = p - f_y \Delta y/2\,.$$

Wir lassen nun das Volumen des Keils gegen Null gehen. Mit $\Delta x \to 0$ und $\Delta y \to 0$ erhalten wir dann

$$p_x = p_y = p\,.$$

Mit Hilfe eines Tetraeders (vgl. Abschn. 2.1.1) läßt sich zeigen, daß insgesamt gilt:

$$\boxed{p_x = p_y = p_z = p}\,. \tag{1.3}$$

Die Druckspannung p nennt man kurz den *Druck*. Nach (1.3) ist in einer ruhenden Flüssigkeit der Druck in einem Punkt in allen Richtungen gleich. Diese Erkenntnis geht auf den Mathematiker und Physiker Blaise Pascal (1623–1662) zurück. Somit hängt der Druck nur vom Ort ab: $p = p(x, y, z)$. Er hat die Dimension Kraft/Fläche und wird in der nach Pascal benannten Einheit 1 Pa = 1 N/m^2 oder in der Einheit 1 bar = 10^5 Pa angegeben (1 MPa = 1 N/mm^2).

Da in einer ruhenden Flüssigkeit keine Schubspannungen auftreten und die Normalspannungen nach (1.3) gleich groß sind, ist der Spannungstensor durch

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix} \tag{1.4}$$

gegeben (vgl. Abschn. 2.1.4). Ein solcher Spannungszustand heißt *hydrostatischer Spannungszustand*.

Eine Flüssigkeit, auf die als einzige Volumenkraft die Schwerkraft wirkt, nennt man *schwere Flüssigkeit*. Um die Druckverteilung in einer schweren Flüssigkeit zu bestimmen, schneiden wir zunächst einen Zylinder (Querschnittsfläche ΔA) mit horizontaler Achse (Abb. 1.3a) aus der Flüssigkeit (die vertikalen Kräfte sind im Freikörperbild nicht eingezeichnet). Aus der Gleichgewichtsbedingung $p_1 \Delta A - p_2 \Delta A = 0$ folgt, daß an den Stellen ① und ② in gleicher Tiefe der gleiche Druck herrscht. Der Druck kann daher nur von der Tiefe abhängen. Um diese Abhängigkeit zu ermitteln, betrachten wir eine vertikale Flüssigkeitssäule (Querschnittsfläche A) nach Abb. 1.3b (hier sind die horizontalen Kräfte nicht eingezeichnet). Die Oberseite der Säule befindet sich an der Oberfläche der Flüssigkeit. Dort herrscht der Luftdruck p_0. An der Unterseite, d.h.

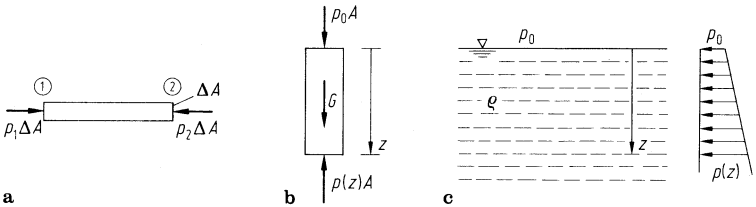

Abb. 1.3

in der Tiefe z, gilt $p = p(z)$. Mit dem Gewicht $G = \varrho g A z$ der Säule folgt somit aus dem Kräftegleichgewicht

$$\uparrow: \quad p(z)A - G - p_0 A = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{p(z) = p_0 + \varrho g z} \,. \qquad (1.5)$$

In einer schweren Flüssigkeit wächst demnach der Druck linear mit der Tiefe (Abb. 1.3c).

Die Gleichung (1.5) kann auch dann zur Bestimmung der Druckverteilung verwendet werden, wenn mehrere Flüssigkeiten mit verschiedenen Dichten in horizontalen Schichten angeordnet sind. So herrscht zum Beispiel in der Trennfläche zwischen den beiden in Abb. 1.4 dargestellten Flüssigkeiten mit den Dichten ϱ_1 und ϱ_2 der Druck $p_1 = p_0 + \varrho_1 g h$, und in der Tiefe z unterhalb der Trennfläche lautet der Druck $p(z) = p_1 + \varrho_2 g z$.

Nach (1.5) ist der Druck in einer schweren Flüssigkeit an allen Stellen gleicher Tiefe gleich groß. Somit ist der Druck am Boden eines Gefäßes unabhängig von der Gefäßform. Wenn die Bodenflächen A verschiedener Gefäße gleich groß sind (Abb. 1.5), dann wird – unabhängig vom jeweiligen Gesamtgewicht der Flüssigkeit – jeweils die gleiche Kraft F von der Flüssigkeit auf den Boden ausgeübt. Dies nennt man das *Pascalsche* oder *hydrostatische Paradoxon*.

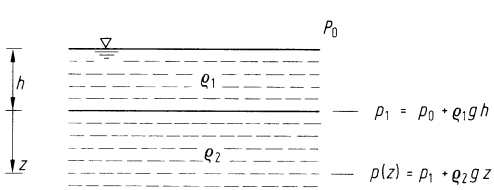

Abb. 1.4

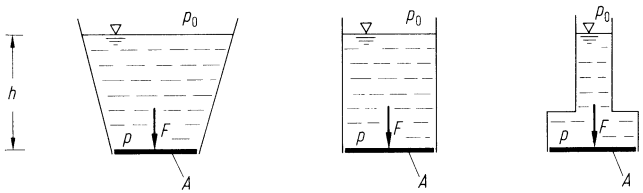

Abb. 1.5

In den *kommunizierenden Röhren* nach Abb. 1.6a ist der Druck an den Flüssigkeitsspiegeln gleich dem Umgebungsdruck p_0. Daher stehen die Flüssigkeitsspiegel in den beiden Schenkeln des Rohres gleich hoch. Wenn die beiden Schenkel dagegen zum Beispiel an Druckbehälter angeschlossen sind und unterschiedliche Drücke p_1 und p_2 and den Flüssigkeitsspiegeln herrschen, dann stellt sich ein Höhenunterschied Δh ein (Abb. 1.6b). Da der Druck im rechten Schenkel in der Höhe des linken Flüssigkeitsspiegels ebenfalls gleich p_1 ist, gilt nach (1.5) die Beziehung

$$p_1 = p_2 + \varrho\, g\, \Delta h\,. \tag{1.6}$$

Danach kann zum Beispiel bei bekanntem Druck p_2 der Druck p_1 durch Messen des Höhenunterschiedes Δh bestimmt werden. Dies wird bei *Flüssigkeitsmanometern* angewendet.

Mit einem *Barometer* mißt man den Druck in der Erdatmosphäre. Wenn der eine Schenkel abgeschlossen und die Luft oberhalb der Flüssigkeit entfernt worden ist (Abb. 1.6c), dann stellt sich nach (1.6) unter der Wirkung des Luftdrucks p_0 ein Höhenunterschied

$$\Delta h = \frac{p_0}{\varrho\, g}$$

ein. Der Druck p_0, der bei Verwendung von Quecksilber mit der Dichte $\varrho = 13,594 \cdot 10^3\,\mathrm{kg/m^3}$ beim Normwert $g = 9,80665\,\mathrm{m/s^2}$ der Erdbeschleunigung zu einer Höhendifferenz von $\Delta h = 760\,\mathrm{mm}$ führt, wird Normalluftdruck genannt. Er ergibt sich zu $p_0 = 1,0132\,\mathrm{bar} = 1013,2\,\mathrm{mbar} = 1013,2\,\mathrm{hPa}$ (Hektopascal).

In Wasser ($\varrho = 10^3\,\mathrm{kg/m^3}$) herrscht nach (1.5) in einer Tiefe von $z = 10\,\mathrm{m}$ der Druck $p = p_0 + 0,980665\,\mathrm{bar} \approx 2\,p_0$. Er ist somit ungefähr doppelt so groß wie der Luftdruck.

Bei einer *hydraulischen Presse* (Abb. 1.6d) wirken die Kräfte F_1 und F_2 auf die in die Schenkel eingepaßten Kolben mit den Flächen A_1 und A_2. Diese Kräfte erzeugen die Drücke p_1 und p_2 an den Kolben. Bei praktischen Anwendungen ist meist $\varrho\, g\, \Delta h \ll p_1, p_2$, so daß aus (1.6) näherungsweise

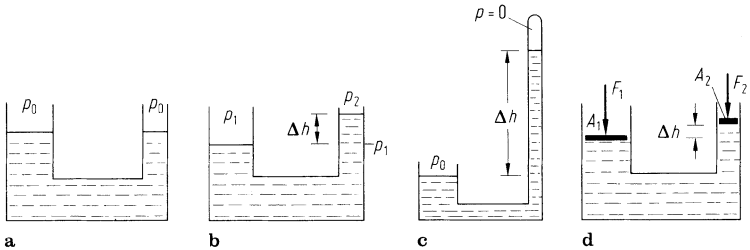

Abb. 1.6

$$p_1 = p_2 \quad \rightarrow \quad \frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2} \quad \rightarrow \quad \frac{F_1}{F_2} = \frac{A_1}{A_2}$$

folgt. Wählt man zum Beispiel $A_1 \gg A_2$, so gilt $F_1 \gg F_2$, d.h., man braucht nur eine sehr kleine Kraft F_2, um F_1 das Gleichgewicht zu halten.

Wir betrachten nun eine Flüssigkeit, auf die eine beliebige Volumenkraft wirkt. Zwischen der Volumenkraft $\boldsymbol{f}$ und dem Druck p besteht ein Zusammenhang. Um ihn herzuleiten, denken wir uns den in Abb. 1.7 in der Seitenansicht dargestellten infinitesimalen Quader (Kantenlängen $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}z$) aus der Flüssigkeit herausgeschnitten. Da der Druck vom Ort abhängt, ist er auf gegenüberliegenden Flächen i.a. nicht gleich groß. So wirkt auf der linken Schnittfläche der Druck p und auf der rechten Fläche der infinitesimal geänderte Druck $p + \frac{\partial p}{\partial x}\mathrm{d}x$.

Das Kräftegleichgewicht in x-Richtung liefert

$$p\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + f_x \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial p}{\partial x} = f_x\,.$$

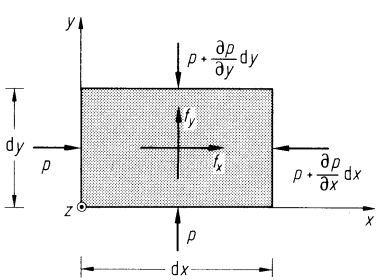

Abb. 1.7

Wenn wir entsprechend auch das Kräftegleichgewicht in y- und in z-Richtung bilden, so erhalten wir insgesamt den gesuchten Zusammenhang

$$\boxed{\frac{\partial p}{\partial x} = f_x\,, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = f_y\,, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = f_z} \,. \tag{1.7}$$

Mit Hilfe des Gradientenvektors (Band 3, Abschn. 1.2.7) kann (1.7) auch in der vektoriellen Form

$$\boxed{\operatorname{grad} p = \boldsymbol{f}} \tag{1.8}$$

geschrieben werden. Die Punkte, in denen der gleiche Druck $p = \mathrm{const}$ herrscht, bilden Flächen, die man *Niveauflächen* nennt.

Ein konservatives Kraftfeld ist aus einem Potential (potentielle Energie) E_p herleitbar: $\boldsymbol{f} = -\operatorname{grad} E_p$. Da $\boldsymbol{f}$ eine Volumenkraft ist, stellt E_p eine potentielle Energie pro Volumeneinheit dar. Durch Vergleich mit (1.8) erhält man einen Zusammenhang zwischen der potentiellen Energie der Volumenkraft und der Druckverteilung in der Flüssigkeit:

$$p\,(x, y, z) = -E_p(x, y, z) + C\,. \tag{1.9}$$

Dabei ist C eine beliebig wählbare Konstante. Demnach sind die Flächen gleichen Drucks (Niveauflächen) identisch mit den Flächen gleichen Potentials (*Äquipotentialflächen*). Da der Gradientenvektor (1.8) normal zur Niveaufläche steht, ist diese (bzw. die Äquipotentialfläche) in einem Punkt orthogonal zur Richtung der dort wirkenden Volumenkraft. Bei einer schweren Flüssigkeit stellen diese Flächen horizontale Ebenen dar.

Beispiel 1.1: Ein offenes U-Rohr enthält zwei sich nicht mischende Flüssigkeiten mit verschiedenen Dichten (Abb. 1.8a). Gegeben sind p_0, ϱ_1, h_2 und Δh. Man bestimme ϱ_2.

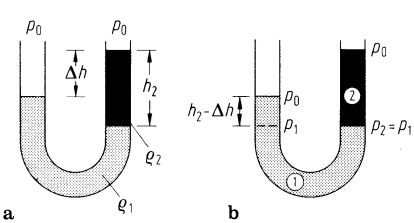

Abb. 1.8

Lösung: In der Flüssigkeit ② ist der Druck an der Trennfläche nach (1.5) durch $p_2 = p_0 + \varrho_2\, g\, h_2$ gegeben. Der Druck in der Flüssigkeit ① an der Trennfläche stimmt mit dem im linken Schenkel auf gleicher Höhe herrschenden Druck $p_1 = p_0 + \varrho_1\, g(h_2 - \Delta h)$ überein (Abb. 1.8b). Gleichsetzen der Drücke liefert

$$p_1 = p_2 \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{\varrho_2 = \left(1 - \frac{\Delta h}{h_2}\right) \varrho_1}}\,.$$

Beispiel 1.2: Ein Behälter mit Flüssigkeit (Dichte ϱ) rotiert als Ganzes mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um eine feste, vertikale Achse (Abb. 1.9a).

Gesucht sind die Druckverteilung in der Flüssigkeit und die Form der freien Oberfläche.

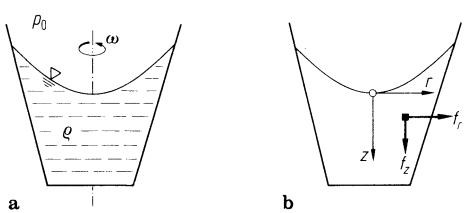

Abb. 1.9 **a** **b**

Lösung: Wir führen die Aufgabe auf ein statisches Problem zurück und bestimmen die Druckverteilung aus den Volumenkräften nach (1.7). In radialer Richtung wirkt die d'Alembertsche Trägheitskraft $f_r = \varrho\, r\, \omega^2$ (Band 3, Abschn. 4.1), in vertikaler Richtung wirkt die Gewichtskraft $f_z = \varrho\, g$ (Abb. 1.9b). Aus

$$\frac{\partial p}{\partial r} = f_r \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{\partial p}{\partial z} = f_z$$

folgt durch Integration

$$p\,(r,z) = \frac{1}{2}\varrho\,\omega^2\, r^2 + \varphi(z) \qquad \text{bzw.} \qquad p\,(r,z) = \varrho\, g z + \psi(r)\,.$$

Dabei sind $\varphi(z)$ bzw. $\psi(r)$ zunächst unbekannte Funktionen von z bzw. r. Durch Vergleich der beiden Ausdrücke für p erkennt man, daß

$$p\,(r,z) = \frac{1}{2}\,\varrho\,\omega^2\, r^2 + \varrho\, g z + C$$

gilt, wobei C eine Konstante ist. Da bei dem gewählten Koordinatensystem (Abb. 1.9b) an der Stelle $r = 0$, $z = 0$ der Druck gleich dem Luftdruck p_0 sein muß, folgt $C = p_0$. Die Druckverteilung in der Flüssigkeit ergibt sich damit zu

$$\underline{\underline{p\,(r,z) = p_0 + \frac{1}{2}\,\varrho\,\omega^2\,r^2 + \varrho\,g z\,.}} \tag{a}$$

In vertikaler Richtung nimmt hiernach der Druck wie in einer nichtrotierenden Flüssigkeit linear mit der Tiefe zu, in horizontaler Richtung steigt er mit dem Quadrat der Entfernung von der Drehachse.

An der freien Oberfläche gilt $p = p_0$. Damit erhält man aus (a) die Gleichung der Oberfläche:

$$\underline{\underline{z = -\frac{\omega^2}{2g}\,r^2\,.}}$$

Die freie Oberfläche ist somit ein Rotationsparaboloid.

1.2.2 Auftrieb

Wenn man einen an eine Federwaage gehängten Körper in eine ruhende Flüssigkeit eintaucht, stellt man an der Waage eine scheinbare Gewichtsverminderung fest. Sie entsteht dadurch, daß von der Flüssigkeit flächenhaft verteilte Kräfte auf den Körper ausgeübt werden, deren Resultierende vertikal nach oben gerichtet ist. Diese resultierende Kraft nennt man *Auftrieb*.

Um den Auftrieb zu bestimmen, betrachten wir einen beliebig geformten Körper mit dem Volumen V, der zunächst vollständig eingetaucht sein soll. Wir denken uns den Körper aus vertikalen Elementarzylindern aufgebaut. Ein solcher Zylinder mit der Querschnittsfläche $\mathrm{d}A$ und der Höhe h ist in Abb. 1.10a dargestellt. Auf seine schräge Oberseite $\mathrm{d}A_1$ bzw. Unterseite $\mathrm{d}A_2$ wirken die Kräfte $p_1\,\mathrm{d}A_1$ bzw. $p_2\,\mathrm{d}A_2$. Mit den Winkeln α_1 und α_2 gilt nach Abb. 1.10b der Zusammenhang $\mathrm{d}A = \mathrm{d}A_1 \cos\alpha_1 = \mathrm{d}A_2 \cos\alpha_2$. Damit erhalten wir die Vertikalkomponente der resultierenden Kraft der Flüssigkeit auf den Elementarzylinder (positiv nach oben gezählt) zu

$$\mathrm{d}F_A = p_2\,\mathrm{d}A_2 \cos\alpha_2 - p_1\,\mathrm{d}A_1 \cos\alpha_1 \;\rightarrow\; \mathrm{d}F_A = (p_2 - p_1)\mathrm{d}A\,.$$

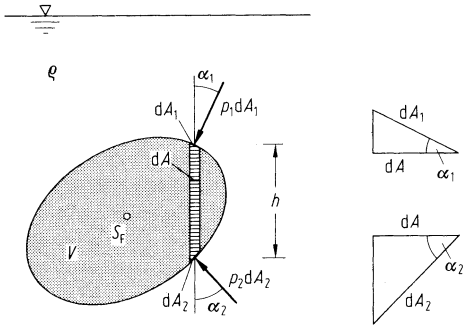

Abb. 1.10 **a** **b**

Nach der hydrostatischen Druckgleichung (1.5) gilt $p_2 - p_1 = \varrho\, g\, h$, wobei ϱ die Dichte der Flüssigkeit ist. Mit dem Volumen $\mathrm{d}V = h\,\mathrm{d}A$ des Zylinders ergibt sich daher

$$\mathrm{d}F_A = \varrho\, g\, \mathrm{d}V\,.$$

Die gesamte resultierende Kraft nach oben – d.h. der Auftrieb – folgt durch Integration über den Körper:

$$F_A = \int\limits_V \varrho\, g\, \mathrm{d}V\,.$$

Da ϱ und g konstant sind, erhält man daraus mit $\int\limits_V \mathrm{d}V = V$ schließlich

$$\boxed{F_A = \varrho\, g V}\,. \tag{1.10}$$

Der Auftrieb ist somit gleich dem Gewicht der verdrängten Flüssigkeitsmenge. Dieser Zusammenhang wurde bereits von Archimedes (287–212) gefunden und wird daher *Archimedisches Prinzip* genannt. Die Wirkungslinie des Auftriebs geht wie die Wirkungslinie der Gewichtskraft durch den Schwerpunkt S_F der verdrängten Flüssigkeitsmenge.

Um zu zeigen, daß die Horizontalkomponente der von der Flüssigkeit auf den Körper ausgeübten Kraft Null ist, denken wir uns den Körper aus horizontalen Elementarzylindern aufgebaut. Die Endflächen eines Zylinders mit beliebiger Orientierung befinden sich jeweils in gleicher Tiefe. Daher herrscht dort jeweils der gleiche Druck, und die in Richtung der Zylinderachse wirkenden Kraftkomponenten sind im Gleichgewicht. Somit ist auch die resultierende Kraft in beliebiger horizontaler Richtung Null.

Der Auftrieb kann auch auf anschauliche Weise bestimmt werden. Dazu denkt man sich den Körper aus der Flüssigkeit entfernt und den von ihm vorher eingenommenen Raum (Volumen V, Oberfläche O) mit der Flüssigkeit selbst ausgefüllt. Da die Flüssigkeit in Ruhe ist, müssen die an der Oberfläche O angreifenden Flächenkräfte mit der Gewichtskraft $G = \varrho\, g\, V$, deren Wirkungslinie durch den Schwerpunkt geht, im Gleichgewicht sein. Die Resultierende aus den Flächenkräften – d.h. der Auftrieb – ist demnach dem Betrag nach gleich dem Gewicht der Flüssigkeitsmenge, geht durch deren Schwerpunkt S_F und ist nach oben gerichtet. Da die an der Oberfläche O wirkenden Flächenkräfte nicht davon abhängen, welches Material sich im Innern von O befindet, gilt diese Aussage auch für einen eingetauchten Körper.

Wenn der Körper nicht vollständig, sondern nur teilweise eingetaucht ist, dann ist der Auftrieb ebenfalls gleich dem Gewicht der verdrängten Flüssigkeitsmenge und geht durch deren Schwerpunkt.

Beispiel 1.3: Eine unten offene, zylindrische Taucherglocke (Querschnittsfläche A, Höhe h, Gewicht G) wird über ein Seil in einen See langsam nach unten gelassen (Abb. 1.11a). Dabei ändern sich Druck und Volumen der Luft in der Glocke nach dem Gesetz $pV = \mathrm{const}$.

In welcher Tiefe t ist das Volumen der Luft auf die Hälfte des ursprünglichen Wertes abgesunken? Wie groß ist dann die Seilkraft?

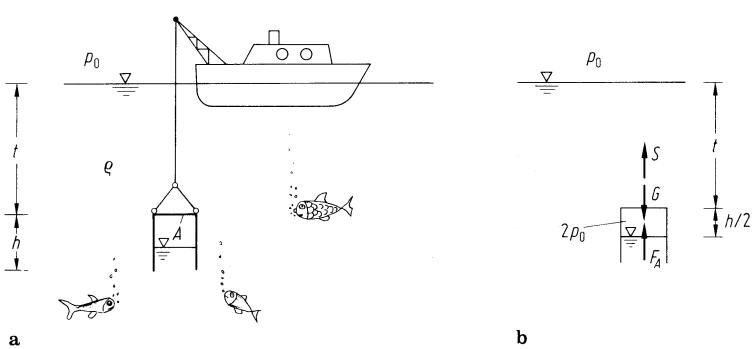

Abb. 1.11

Lösung: Wenn das Luftvolumen auf die Hälfte abgesunken ist, dann hat sich wegen $pV = \mathrm{const}$ der Druck verdoppelt, und die Taucherglocke hat sich bis zur Hälfte mit Wasser gefüllt (Abb. 1.11b). Die Trennfläche

zwischen der Luft und dem Wasser befindet sich in der Tiefe $t + h/2$. Somit gilt

$$p_0 + \varrho\, g\, (t + h/2) = 2p_0 \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{t = \frac{p_0}{\varrho\, g} - \frac{h}{2}}}\,.$$

Aus der Gleichgewichtsbedingung

$$\uparrow: \quad S - G + F_A = 0$$

folgt mit der Auftriebskraft $F_A = \varrho\, g\, A\, h/2$ die Seilkraft zu

$$\underline{\underline{S = G - \varrho\, g\, A\, h/2}}\,.$$

Beispiel 1.4: Ein Träger ruht nach Abb. 1.12a auf zwei gleichen Schwimmern (Grundfläche A). Um welchen Winkel ist der Träger geneigt, wenn eine Last (Gewicht G) im Abstand a vom linken Ufer aufgebracht wird?

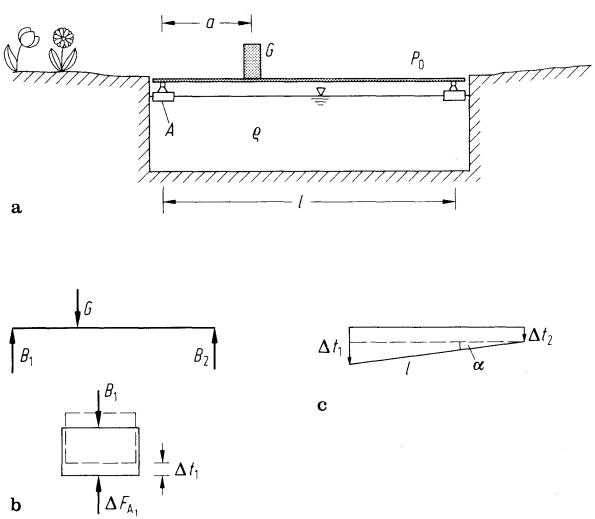

Abb. 1.12

Lösung: Wenn die Last aufgebracht wird, sinken die Schwimmer im Vergleich zur unbelasteten Ausgangslage tiefer ein. Wir betrachten im folgenden nur diese zusätzlichen Eintauchtiefen sowie die entsprechenden Kräfte.

Wir denken uns den Träger von den Schwimmern getrennt. Die auf die Teilkörper wirkenden Kräfte sind im Freikörperbild Abb. 1.12b dargestellt. Aus den Gleichgewichtsbedingungen am Träger sowie an den Schwimmern folgt:

$$\overset{\curvearrowright}{B_2}: \quad B_1 l - G(l-a) = 0 \quad \rightarrow \quad B_1 = \frac{l-a}{l}\, G\,,$$

$$\overset{\curvearrowleft}{B_1}: \quad B_2 l - Ga = 0 \quad \rightarrow \quad B_2 = \frac{a}{l}\, G\,,$$

$$\uparrow: \quad \Delta F_{A_1} = B_1\,, \quad \Delta F_{A_2} = B_2\,.$$

Außerdem gilt nach der Archimedischen Auftriebsformel (1.10):

$$\Delta F_{A_1} = \varrho\, g\, A\, \Delta t_1\,, \quad \Delta F_{A_2} = \varrho\, g\, A\, \Delta t_2\,.$$

Auflösen liefert die zusätzlichen Eintauchtiefen

$$\Delta t_1 = \frac{(l-a)G}{\varrho\, g\, A\, l}\,, \quad \Delta t_2 = \frac{aG}{\varrho\, g\, A\, l}\,.$$

Daraus folgt der Neigungswinkel α (Abb. 1.12c):

$$\sin\alpha = \frac{\Delta t_1 - \Delta t_2}{l} \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{\sin\alpha = \frac{(l-2a)G}{\varrho\, g\, A\, l^2}}}\,.$$

Beispiel 1.5: Ein homogener Stab (Länge l, Querschnittsfläche A, Dichte ϱ_S) ist an seinem Ende in B drehbar gelagert (Abb. 1.13a) und taucht mit dem anderen Ende in eine Flüssigkeit (Dichte $\varrho_F > \varrho_S$).

Gesucht sind die Eintauchlänge x und der Neigungswinkel α.

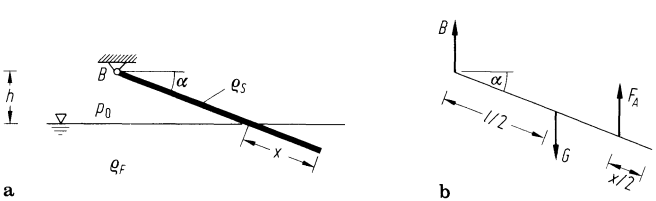

Abb. 1.13