Le caractère propre des méthodes de l'Analyse et de la Géométrie modernes consiste dans l'emploi d'un petit nombre de principes généraux, indépendants de la situation respective des différentes parties ou des valeurs relatives des différents symboles; et les conséquences sont d'autant plus étendues que les principes eux–mêmes ont plus de généralité.

aus G. DARBOUX: Principes de Géométrie Analytique

Einleitung

Dieser Text ist gedacht für Studierende mittlerer Semesterzahl, die eine Grundausbildung in Analysis und linearer Algebra durchlaufen haben, etwa im Umfang des Stoffes der Bücher „Analysis 1–3“ von O. FORSTER und „Lineare Algebra“ sowie „Analytische Geometrie“ von G. FISCHER. Er soll der Einführung in ein Gebiet dienen, das derzeit Gegenstand intensiver Forschung ist und das ganz im Sinne des Wortes $\sigma\upsilon\mu\pi\lambda\acute{\varepsilon}\kappa\varepsilon\iota\nu$ (= zusammenflechten, verbinden) mehrere Gebiete der Mathematik mit der Physik zusammenführt.[1] Das Problem (zum einen und der Reiz zum anderen) ist hierbei die Vielfalt des mathematischen Handwerkszeugs, das gebraucht wird. Um dem zu begegnen, ist ein sicher ungewöhnlich langer Anhang zusammengestellt. Er enthält eine Sammlung der Definitionen von Begriffen, die vermutlich häufig in der mathematischen Grundausbildung nicht vorkommen, zusammen mit einigen Aussagen und Sätzen, die dann im Haupttext als Fundament für die der symplektischen Geometrie spezifischeren Konstruktionen verwandt werden. Dabei werden aber immernoch externe Anleihen, insbesondere aus der Theorie der Differentialgleichungen gemacht.

Etwas genauer gesagt, es wird versucht, zwei Ziele zu verfolgen, zum einen

- die Vorstellung des Formalismus der symplektischen Formen, die Einführung der symplektischen Gruppe und vor allem der symplektischen Mannigfaltigkeiten, zusammen mit einer Behandlung von möglichst vielen Beispielen für ihr Auftreten, insbesondere als Quotientenmannigfaltigkeiten bei Gruppenoperationen,

und zum anderen

- das Aufzeigen von Querverbindungen und Wechselwirkungen zwischen den eben genannten mathematischen Objekten und den Formalismen der theoretischen Mechanik, insbesondere dem Hamiltonformalismus, sowie dem der Quantenmechanik, nämlich dem Prozeß der „Quantisierung“.

[1] Herrn P. Slodowy verdanke ich den Hinweis darauf, daß der Name „symplektische Gruppe“, der dann zur Bezeichnung „symplektische Geometrie“ führte, von H. WEYL 1938 in seinem Buch "The Classical Groups" vorgeschlagen wurde ([W], Fußnote auf S. 165). Die symplektische Gruppe wurde davor auch "complex group" oder "Abelian linear group" genannt, letzteres zu Ehren von ABEL, der sie zuerst untersuchte.

Die Verfolgung dieser Ziele legt folgenden Plan nahe:

Zunächst wird in einem Kapitel 0 in Kurzform einiges Material aus der *theoretischen Mechanik* vorgestellt, das später angesteuert werden soll. Dieses Kapitel dürfte Studierenden der Physik vertraut sein, ist aber angesichts der beklagenswerten Tatsache, daß das Studium der Mathematik heute oft ohne Bezug zur Physik abläuft, für Studierende der Mathematik vielleicht nicht überflüssig.

Es ist für das vorliegende Thema ganz zwangsläufig, im ersten Kapitel zunächst die *symplektischen* (und etwas später auch die *Kählerschen*) *Vektorräume* einzuführen und dann über den zugehörigen Abbildungsbegriff die symplektische Gruppe $Sp\,(V)$ und deren Erzeugung. Weiter werden die für diese Theorie spezifischen Unterraumbegriffe vorgestellt, als da sind isotrope, koisotrope und Lagrangesche Unterräume, hyperbolische Ebenen und Räume sowie das Radikal.

Als erstes Ergebnis wird gezeigt, daß symplektische Unterräume durch ihre Dimension und ihren Rang n bis auf symplektische Isomorphismen fixiert sind. Eine Folge hiervon ist dann, daß die Lagrangeschen Unterräume einen homogenen Raum $\mathcal{L}\,(V)$ zur Gruppe $Sp\,(V)$ bilden. Der meiste Aufwand wird zur Beschreibung des Raumes $\mathcal{J}\,(V)$ der positiven komplexen Strukturen getrieben, die mit der vorgegebenen symplektischen Struktur verträglich sind. Das zweite Hauptergebnis ist, daß auch dieser Raum ein homogener Raum ist, und zwar für $\dim V = 2n$ isomorph zum Siegelschen Raum $\mathfrak{H}_n = Sp_n(\mathbb{R})/U(n)$.

Das zweite Kapitel ist der Einführung der zentralen Gegenstände dieses Textes, den *symplektischen Mannigfaltigkeiten*, gewidmet. Hier ist der Umgang mit Differentialformen unerläßlich. Ihr Kalkül wird im ersten Teil des Anhangs vorgestellt. Das erste Ergebnis dieses Kapitels ist dann eine Herleitung eines Satzes von Darboux, der zeigt, daß die symplektischen Mannigfaltigkeiten lokal alle gleich aussehen. Es steht dies in scharfem Kontrast zu den Riemannschen Mannigfaltigkeiten, deren Definition ansonsten eine gewisse Parallelität zu der der symplektischen Mannigfaltigkeiten hat. Ein Ausblick auf neuere Forschungen, die den symplektischen Mannigfaltigkeiten globale Objekte als Invarianten zuordnen, und zwar die symplektischen Kapazitäten und die pseudoholomorphen Kurven, wird am Schluß dieses Kapitels gegeben.

Zuvor werden im zweiten Teil des zweiten Kapitels *Beispiele* für symplektische Mannigfaltigkeiten beschrieben, und zwar als

– erstes das für die Entstehung der Theorie und insbesondere die physikalischen Anwendungen fundamentale *Kotangentialbündel* T^*Q an eine vorgegebene Mannigfaltigkeit Q, dann als

– zweites, zunächst ganz allgemein, das der *Kählermannigfaltigkeiten*, und weiter als

– drittes das der *koadjungierten Bahnen*. Diese Beschreibung symplektischer Mannigfaltigkeiten mit der Operation einer Liegruppe G kann als zweites Hauptergebnis des Kapitels angesehen werden. Und zwar wird ein Satz von Kostant und Souriau gezeigt, der besagt, daß für eine vorgegebene Liegruppe G mit Liealgebra $\mathfrak{g}$ unter der Voraussetzung des Verschwindens der ersten und zweiten Kohomologiegruppen, also $H^1(\mathfrak{g}) = H^2(\mathfrak{g}) = 0$, bis auf Überlagerung eine eindeutige Korrespondenz besteht zwischen symplektischen Mannigfaltigkeiten mit transitiver G–Operation und G–Bahnen im Dualraum $\mathfrak{g}^*$ von $\mathfrak{g}$. Hier geht etliches aus der Theorie der Liealgebren und der Differentialgleichungssysteme ein, das im Text zumindest in Rudimenten eingebracht werden muß. Von hier bietet sich dann auch ein direkter Weg zur Beschreibung eines weiteren zentralen Begriffs, nämlich dem der „Impulsabbildung", an. Dies wird jedoch auf später verschoben und zunächst als

– viertes und hier letztes Beispiel wird der *komplexe projektive Raum* als symplektische Mannigfaltigkeit erkannt, und zwar durch Spezialisierung der Beispiele 3 und 2, also als koadjungierte Bahn und als Kählersche Mannigfaltigkeit.

Bevor Konstruktionen auf einem höheren Niveau weitere Beispiele für symplektische Mannigfaltigkeiten liefern können, werden im 3. Kapitel die beiden Standardbegriffe *Hamiltonsches Vektorfeld* und *Poissonklammer* eingeführt. Mit Hilfe dieser Begriffe läßt sich der Hamiltonformalismus der klassischen Mechanik ausformulieren und die für alles folgende grundlegende Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{F}(M) \longrightarrow \operatorname{Ham} M \longrightarrow 0$$

etablieren, wobei $\mathcal{F}(M)$ den Raum der auf der symplektischen Mannigfaltigkeit definierten glatten Funktionen f meint, der mit der Poissonklammmer als Liealgebra angesehen werden kann, und $\operatorname{Ham} M$ die Liealgebra der Hamiltonschen Vektorfelder.

In das 3. Kapitel ist auch noch ein Abschnitt eingefügt, der den Kontaktmannigfaltigkeiten gewidmet ist. Eine Theorie dieser Mannigfaltigkeiten ungeradzahliger Dimension kann ganz parallel zu der der symplektischen Mannigfaltigkeiten entwickelt werden, oder beide Objekte können als spezielle prä–symplektische Mannigfaltigkeiten angesehen werden. Hier wird aber als Anknüpfungspunkt genommen, daß sich wichtige Beispiele für die Kontaktmannigfaltigkeiten als Flächen konstanter Energie eines Hamiltonschen Systems ergeben.

Im 4. und 5. Kapitel mischen sich weiter mathematische Konstruktionen mit physikalischen Interpretationen. Zunächst kann eine *Impulsabbildung* erklärt werden, falls eine Liegruppe G symplektisch auf einer symplektischen Mannigfaltigkeit M operiert und jedes lokal Hamiltonsche Vektorfeld auch global Hamiltonsch ist, und zwar als eine Abbildung

$$\Phi : M \longrightarrow \mathfrak{g}^*, \quad \mathfrak{g} = \operatorname{Lie} G.$$

Die wichtigsten Impulsabbildungen sind die Ad*–äquivarianten, d.h. solche, die noch eine Verträglichkeitsbedingung bezüglich der koadjungierten Darstellung Ad* erfüllen. Das erste Ergebnis des 4. Kapitels ist, daß für eine symplektische Form $\omega = -d\vartheta$ mit G–invarianter 1–Form ϑ eine solche Ad*–äquivariante Impulsabbildung konstruiert werden kann. Dies wird dann auf das Kotangentialbündel $M = T^*Q$ angewandt, aber auch auf das Tangentialbündel TQ, wobei herauskommt, daß für eine reguläre Lagrangefunktion $L \in \mathcal{F}(Q)$ die zugehörige Impulsabbildung ein Integral der zu L gehörigen Lagrangeschen Gleichungen ist. Als Beispiele werden der *lineare Impuls* und der *Drehimpuls* im Formalismus der Impulsabbildung aufgefunden und damit die Namensgebung gerechtfertigt.

Dann wird die *symplektische Reduktion* beschrieben. Und zwar ist bei Vorgabe einer symplektischen G–Operation auf M und einer Ad*–äquivarianten Impulsabbildung Φ unter gewissen relativ leicht zu kontrollierenden Zusatzannahmen für $\mu \in \mathfrak{g}^*$ der Quotient

$$M_\mu = \Phi^{-1}(\mu)/G_\mu$$

wieder eine symplektische Mannigfaltigkeit. Dieses zentrale Ergebnis des Kapitels 4 kann nun in vielfältiger Weise ausgenutzt werden, zum einen zur Konstruktion weiterer Beispiele für symplektische Mannigfaltigkeiten (es gibt hier einen weiteren Beweis, daß der komplexe projektive Raum $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ sowie die koadjungierten Bahnen symplektisch sind). Zum anderen können Ergebnisse der klassischen Mechanik über die Reduktion der Variablenzahl beim Vorliegen von Symmetrien und damit von Integralen hier wiedergefunden werden.

Im 5. und letzten Kapitel wird die *Quantisierung* behandelt, also der Übergang von der klassischen zur Quanten–Mechanik, der interessante mathematische Fragestellungen ins Gesichtsfeld bringt. Als Einstieg wird ausführlich der einfachste Fall $M = \mathbb{R}^{2n} = T^*\mathbb{R}^n$ behandelt, bei dem als mathematisches Handwerkszeug die Gruppen $SL_2(\mathbb{R}), Sp_{2n}(\mathbb{R})$, die Heisenberggruppen $\mathrm{Heis}_{2n}(\mathbb{R})$, die Jacobigruppe $G^J_{2n}(\mathbb{R})$ (als semidirektes Produkt der Heisenberg- und der symplektischen Gruppe) und deren jeweilige Liealgebren genügen. Die Quantisierung läuft dann darauf hinaus, daß Polynomen vom Grad ≤ 2 in den Variablen p und q des $\mathbb{R}^{2n}$ mit Hilfe der Schrödingerdarstellung der Heisenberggruppe und der Weildarstellung der symplektischen Gruppe (genauer ihrer metaplektischen Überlagerung) Operatoren auf $L^2(\mathbb{R}^n)$ zugeordnet werden. Das Theorem von Groenewald und van Hove sagt dann, daß diese Quantisierung *maximal* ist, d.h. nicht auf Polynome höheren Grades ausgedehnt werden kann.

Der Rest des 5. Kapitels besteht in einer Beschreibung eines Ansatzes für die allgemeine Situation, der im wesentlichen Kirillov [Ki] folgt. Hier kommt eine Unteralgebra $\mathfrak{p}$ *primärer Größen* ins Spiel (die für $M = T^*Q$ darauf hinausläuft, beliebige Funktionen in q und lineare in p zu betrachten) und es wird mehr Funktionalanalysis und Topologie gebraucht, um Kirillovs Ergebnis zu erhalten, daß für eine symplektische Mannigfaltigkeit M mit einer bezüglich der Poissonklammer gebildeten