
Topologies sur les domaines de \mathbb{R}^N

2.1 Pourquoi une topologie?

Nous venons de voir dans le chapitre 1 plusieurs exemples de problèmes du type (1.1), c'est-à-dire de la forme

$$\min_{\Omega \in \mathcal{O}} F(\Omega) \tag{2.1}$$

où \mathcal{O} est un ensemble de parties ou de "domaines" de \mathbb{R}^N . Une des toutes premières tâches du mathématicien est

1. de s'assurer que $m = \inf\{F(\Omega), \Omega \in \mathcal{O}\}$ est fini;
2. (d'essayer) de montrer que cet *inf* est atteint (et donc que c'est bien un minimum). On dit qu'on a alors un théorème **d'existence**.

La première étape est, en général, facile. Pour l'existence du minimum, une méthode systématique consiste à prendre une suite minimisante Ω_n , c'est-à-dire une suite de domaines Ω_n de \mathcal{O} telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(\Omega_n) = m. \tag{2.2}$$

Une telle suite existe toujours si \mathcal{O} est non vide, par définition d'une borne inférieure. Il s'agit alors de montrer que Ω_n "tend" (en un sens à préciser: c'est justement l'objet du reste de ce chapitre) vers un domaine Ω^* de \mathcal{O} et que $F(\Omega^*) \leq m$. On voit donc naturellement apparaître la nécessité de disposer d'une topologie sur l'ensemble des domaines admissibles. Ensuite, l'existence de Ω^* provient d'une propriété de *compacité* de la suite Ω_n pour cette topologie. Enfin, l'inégalité " $F(\Omega^*) \leq m$ " correspond à la semi-continuité inférieure de la fonctionnelle F "le long" de cette suite Ω_n . Ainsi, la preuve de l'existence d'un minimum passe par l'application d'un théorème du type "*Une fonction semi-continue inférieurement sur un compact atteint son minimum*". On peut résumer cette approche générale dans la proposition suivante:

Proposition 2.1.1 *On suppose que \mathcal{O} est muni d'une topologie τ pour laquelle*

1. *$F : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ est séquentiellement semi-continue inférieurement, c'est-à-dire*

$$\Omega_n \xrightarrow{\tau} \Omega \implies F(\Omega) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} F(\Omega_n);$$

2. *Toute suite F -bornée est séquentiellement compacte, c'est-à-dire*

$$\sup_n |F(\Omega_n)| < +\infty \implies \exists (\Omega_{n_k})_{k \geq 1}, \exists \Omega \in \mathcal{O} ; \Omega_{n_k} \xrightarrow{\tau} \Omega.$$

Alors si F est minorée, il existe $\Omega^* \in \mathcal{O}$ tel que

$$F(\Omega^*) = \min\{F(\Omega), \Omega \in \mathcal{O}\}.$$

La démonstration de cette proposition ne fait que reprendre les idées explicites ci-dessus. Noter que seules des notions séquentielles suffisent.

Remarque Comme on l'a vu dans les exemples du chapitre précédent, la fonctionnelle $F(\Omega)$ est souvent de la forme $F(\Omega) = J(\Omega, u_\Omega)$ où u_Ω est la solution d'une équation aux dérivées partielles (e.d.p.) posée sur Ω (ou d'un système de telles équations). La propriété 1. de la proposition précédente va donc nécessiter une "bonne" dépendance continue de la solution de l'e.d.p. u_Ω par rapport à Ω . C'est précisément ce que nous étudierons dans le chapitre 3 pour le cas d'opérateurs elliptiques.

2.2 Différentes topologies sur les domaines

2.2.1 Introduction

Il y a une particularité dans les problèmes d'optimisation de forme qui est à la fois une difficulté et une richesse: c'est la liberté qu'on a de choisir une topologie sur l'ensemble des domaines où le problème est posé pour montrer l'existence d'un minimum. Le plus souvent, en effet, il n'existe pas de topologie "naturelle". C'est d'ailleurs une situation assez générale quand on se pose un problème d'optimisation¹, mais la situation se complique dans le cas de l'optimisation de forme, car il n'existe pas de topologie "canonique" sur les domaines de \mathbb{R}^N , ni même sur les ouverts de \mathbb{R}^N .

Quand on cherche à introduire une topologie de manière à appliquer un résultat du type de la proposition 2.1.1, on est confronté à deux exigences de nature contradictoire. En effet, si l'on souhaite que la famille des domaines

¹ Quand on se pose un problème du type $\min\{J(a); a \in A\}$, il n'est *a priori* pas question de topologie. L'introduction d'une topologie sur A n'est qu'un cadre mathématique pour prouver l'existence d'un minimum en utilisant l'outil puissant de l'analyse qu'est la compacité.

avec laquelle on travaille soit compacte, on a intérêt à choisir une topologie la moins fine possible (c'est-à-dire contenant le moins d'ouverts possibles). En revanche, si on a besoin que la fonctionnelle à minimiser soit continue ou semi-continue inférieurement (s.c.i.), on a intérêt à avoir une topologie la plus fine possible. Tout l'art de l'analyste va donc consister à "naviguer" entre ces deux exigences antagonistes.

Nous allons présenter ici un peu plus en détail trois topologies parmi les plus utilisées pour des familles de domaines "sans trop de régularité": la première concerne même tous les ensembles mesurables de \mathbb{R}^N ; les deux autres concernent les familles d'ouverts de \mathbb{R}^N . Mais, en fonction du contexte, nous serons amenés à travailler avec d'autres topologies plus adaptées. Des commentaires seront faits à ce sujet à la fin du chapitre.

2.2.2 La convergence des fonctions caractéristiques

Une première idée naturelle est de "mettre en bijection" les ensembles (Lebesgue²-)mesurables E de \mathbb{R}^N avec leur fonction caractéristique χ_E (qui, par définition, vaut 1 sur E et 0 en dehors): c'est un élément de l'espace fonctionnel $L^\infty(\mathbb{R}^N)$, et aussi de tous les espaces $L^p(\mathbb{R}^N)$, $1 \leq p \leq \infty$, dès que E est borné (ou plus généralement de mesure de Lebesgue finie). On peut alors utiliser les topologies usuelles sur les fonctions caractéristiques.

Bien sûr, χ_E n'est définie que presque partout. Ainsi cette représentation des domaines ne fait pas la différence entre un ouvert et le même ouvert privé d'un compact de mesure nulle. Or on sait que, par exemple, la solution du problème de Dirichlet pour le laplacien sur cet ouvert peut en être modifiée. Ce point de vue conduira donc à des limitations sérieuses pour certaines fonctionnelles de formes. Il s'avère cependant intéressant de l'utiliser.

Une propriété intéressante (que nous développerons un peu plus au paragraphe 2.2.6 sur la compacité, voir la proposition 2.2.26) est que, quelle que soit la suite E_n d'ensembles mesurables qu'on se donne, la suite des fonctions caractéristiques χ_{E_n} est **-faiblement compacte dans L^∞* , c'est-à-dire qu'il existe $\chi \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ tel que

$$\forall \psi \in L^1(\mathbb{R}^N), \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} \chi_{E_n} \psi = \int_{\mathbb{R}^N} \chi \psi. \quad (2.3)$$

L'aspect moins favorable est qu'en général, la fonction limite χ n'est pas une fonction caractéristique (cf. exercice 2.1). Nous savons seulement qu'elle prend ses valeurs entre 0 et 1 (cf. proposition 2.2.26). Toutefois, la limite est une fonction caractéristique si la convergence est "*forte*" au sens qu'elle a lieu dans L^p_{loc} pour un certain $p \in [1, \infty[$. En effet, on peut alors en extraire une sous-suite qui converge presque partout; donc la limite χ ne prend que les

² Henri LEBESGUE, 1875-1941, français, enseignant à Rennes, Poitiers et Collège de France. On lui doit des contributions majeures à la théorie de l'intégration et aux séries de Fourier.

valeurs 0, 1 et elle coïncide avec la fonction caractéristique de l'ensemble où elle prend la valeur 1.

Il est intéressant de noter que la limite *-faible n'est une fonction caractéristique que si la limite est forte. Plus précisément, nous avons:

Proposition 2.2.1 *Si $(E_n)_{n \geq 1}$ et E sont des parties mesurables de \mathbb{R}^N telles que χ_{E_n} converge *-faiblement dans $L^\infty(\mathbb{R}^N)$ (au sens de (2.3)) vers χ_E , alors $\chi_{E_n} \rightarrow \chi_E$ dans $L^p_{loc}(\mathbb{R}^N)$ pour tout $p < +\infty$ et p.p..*

Démonstration: Par hypothèse on a

$$\forall \psi \in L^1(\mathbb{R}^N), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} (\chi_{E_n} - \chi_E) \psi(x) dx = 0. \quad (2.4)$$

Notons B_R la boule de centre 0 et de rayon R et E^c le complémentaire de E . On prend alors $\psi = \chi_{B_R} \chi_{E^c}$ dans (2.4) et on en déduit

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} \chi_{E_n} \chi_{B_R} \chi_{E^c}(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} |B_R \cap (E_n \setminus E)|,$$

où $|\cdot|$ désigne la mesure de Lebesgue dans \mathbb{R}^N . Maintenant, si on prend $\psi = \chi_{B_R}$ dans (2.4) on obtient

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{B_R} (\chi_{E_n} - \chi_E)(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \{ |B_R \cap (E_n \setminus E)| - |B_R \cap (E \setminus E_n)| \}.$$

Donc aussi $|B_R \cap (E \setminus E_n)| \rightarrow 0$. Or

$$\int_{B_R} |(\chi_{E_n} - \chi_E)(x)|^p dx = |B_R \cap (E \setminus E_n)| + |B_R \cap (E_n \setminus E)|, \quad (2.5)$$

ce qui démontre la proposition. \square

Remarque 2.2.2 En général la convergence n'a pas lieu dans $L^p(\mathbb{R}^N)$ tout entier comme le montre l'exemple de E_n égal à la boule de centre x_n et de rayon 1, où x_n est une suite tendant vers l'infini: on a alors $\chi_{E_n} \rightarrow 0$ *-faiblement dans $L^\infty(\mathbb{R}^N)$ (0 est la fonction caractéristique de l'ensemble vide), mais $\|\chi_{E_n}\|_{L^p}$ ne tend pas vers 0 puisqu'elle est constante non nulle.

Suite aux remarques ci-dessus, il est assez naturel de prendre comme (première) définition de la convergence des E_n celle qui apparaît dans la proposition 2.2.1, soit:

Définition 2.2.3 *Soient $(E_n)_{n \geq 1}$ et E des ensembles mesurables de \mathbb{R}^N . On dira que E_n converge au sens des fonctions caractéristiques vers E quand n tend vers l'infini si*

$$\chi_{E_n} \rightarrow \chi_E \quad \text{dans } L^p_{loc}(\mathbb{R}^N), \quad \forall p \in [1, \infty[. \quad (2.6)$$

Remarque 2.2.4 Dans (2.6), on peut bien sûr prendre n'importe quel $p < \infty$ puisque comme $|\chi_{E_n} - \chi_E|$ prend les seules valeurs 0 et 1, on a, pour tout p fini, $|\chi_{E_n} - \chi_E|^p = |\chi_{E_n} - \chi_E|$ et donc $\|\chi_{E_n} - \chi_E\|_{L^p} = \|\chi_{E_n} - \chi_E\|_{L^1}^{1/p}$. En revanche, le cas $p = \infty$ n'a aucun intérêt puisque $\|\chi_{E_n} - \chi_E\|_{L^\infty} = 1$ dès que E_n et E diffèrent sur un ensemble de mesure non nulle.

Remarque 2.2.5 Il est intéressant de noter que pour des E_n restant dans un ensemble fixe B de mesure finie, la convergence ainsi définie coïncide avec celle de la métrique δ définie sur les ensembles mesurables de \mathbb{R}^N (modulo l'égalité presque partout) par: pour E_1, E_2 mesurables dans \mathbb{R}^N ,

$$\delta(E_1, E_2) := \text{Arctg}(|E_1 \Delta E_2|), \tag{2.7}$$

où Δ désigne la différence symétrique des ensembles E_1, E_2 soit

$$E_1 \Delta E_2 = (E_1 \setminus E_2) \cup (E_2 \setminus E_1).$$

L'équivalence des notions de convergence s'obtient immédiatement à l'aide de l'identité (2.5) où on remplace B_R par B . Rappelons que l'espace quotient des ensembles mesurables de \mathbb{R}^N modulo l'égalité presque partout, muni de cette métrique, est complet et que l'application du théorème de Baire³ à cet espace fournit des résultats puissants sur l'uniforme intégrabilité des fonctions (cf. exercice 2.10).

Remarque 2.2.6 *A propos d'autres convergences faibles sur les fonctions caractéristiques:* si les $(E_n)_{n \geq 1}$ sont inclus dans un ensemble B de mesure finie, les χ_{E_n} sont aussi bornées dans $L^p(\mathbb{R}^N)$ pour tout $p \in [1, \infty[$. Pour $p \in]1, \infty[$, par réflexivité de L^p , on peut alors extraire de χ_{E_n} une sous-suite convergeant faiblement vers 0 dans $L^{p'}(\mathbb{R}^N)$ où p' est le conjugué de p ($1/p + 1/p' = 1$), c'est-à-dire qu'il existe $\chi \in L^p(\mathbb{R}^N)$ tel que

$$\forall \psi \in L^{p'}(\mathbb{R}^N), \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} \chi_{E_n} \psi = \int_{\mathbb{R}^N} \chi \psi. \tag{2.8}$$

On note souvent

$$\chi_{E_n} \xrightarrow{\sigma(L^p, L^{p'})} \chi_E,$$

cette convergence faible, $\sigma(L^p, L^{p'})$ étant une notation assez classique pour la topologie faible associée où le premier argument L^p de $\sigma(\cdot, \cdot)$ indique l'espace où se trouvent les fonctions et où le deuxième argument $L^{p'}$ indique l'espace des fonctions tests (voir par exemple [45]). Cette notation s'applique aussi à $p = 1, p' = \infty$ tandis que la topologie L^∞ -faible se note -de façon similaire- $\sigma(L^\infty, L^1)$.

³ René BAIRE, 1874-1932, français, enseigne d'abord en lycée, puis à l'Université à Montpellier et Dijon. Ses travaux portent sur les nombres irrationnels, les fonctions réelles et la théorie des ensembles.

Bien sûr, les fonctions χ obtenues dans (2.8) et (2.3) coïncident puisque les intégrales $\int \chi \psi$ sont les mêmes dans les deux cas pour tout $\psi \in L^1 \cap L^{p'}$.

Noter que, dans l'énoncé de la proposition 2.2.1, on peut remplacer l'hypothèse de convergence L^∞ -faible (ou $\sigma(L^\infty, L^1)$) par toute convergence dans $\sigma(L^p, L^{p'})$ pour un p quelconque dans $[1, \infty[$. Pour $p = 1$, l'hypothèse serait cependant plus forte puisqu'elle impliquerait alors la convergence dans $L^p(\mathbb{R}^N)$ pour tout entier p fini, c'est-à-dire qu'il y aurait conservation de la masse à l'infini (remplacer χ_{B_R} par la fonction constante égale à 1 dans la démonstration) -voir aussi l'exercice 2.10-.

2.2.3 La convergence des ouverts au sens de Hausdorff

Définition

Dans ce paragraphe, nous nous restreignons au cas de domaines *ouverts* et nous supposons toujours qu'ils sont "confinés", c'est-à-dire qu'il existe un (grand) compact B **fixé** de \mathbb{R}^N qui contient tous les ouverts considérés. On note \mathcal{K}_B la famille des compacts non vides inclus dans B . Nous commençons par rappeler la définition de la distance de Hausdorff sur \mathcal{K}_B ; nous notons $d(\cdot, \cdot)$ la distance euclidienne⁴ dans \mathbb{R}^N .

Définition 2.2.7 *Etant donnés K_1 et K_2 dans \mathcal{K}_B , on pose*

$$\begin{aligned} \forall x \in B, d(x, K_1) &:= \inf_{y \in K_1} d(x, y) \\ \rho(K_1, K_2) &:= \sup_{x \in K_1} d(x, K_2) \\ d^H(K_1, K_2) &:= \max(\rho(K_1, K_2), \rho(K_2, K_1)). \end{aligned} \tag{2.9}$$

C'est un exercice élémentaire de montrer que d^H est une distance sur \mathcal{K}_B ; on l'appelle *distance de Hausdorff*. On montre que \mathcal{K}_B , muni de d^H est complet et même compact (voir le théorème 2.2.23).

Nous pouvons maintenant définir la convergence au sens de Hausdorff pour des ouverts de B :

Définition 2.2.8 *Soient $(\Omega_n)_{n \geq 1}$ et Ω des ouverts inclus dans B . On dira que la suite Ω_n converge au sens de Hausdorff vers Ω si*

$$d^H(B \setminus \Omega_n, B \setminus \Omega) \longrightarrow 0 \quad \text{quand } n \rightarrow \infty. \tag{2.10}$$

On notera alors $\Omega_n \xrightarrow{H} \Omega$.

Remarque 2.2.9 La terminologie de "*convergence au sens de Hausdorff*" sera donc utilisée à la fois pour les compacts de B et pour les ouverts de B bien que les notions soient bien distinctes; cette ambiguïté ne pose pas de problème et permet par ailleurs de ne pas alourdir les définitions.

⁴ EUCLIDE, 330 av. J.C.-275 av. J.C. environ, mathématicien grec dont les treize livres qui composent *Les Eléments* ont eu une influence considérable sur le développement des mathématiques.

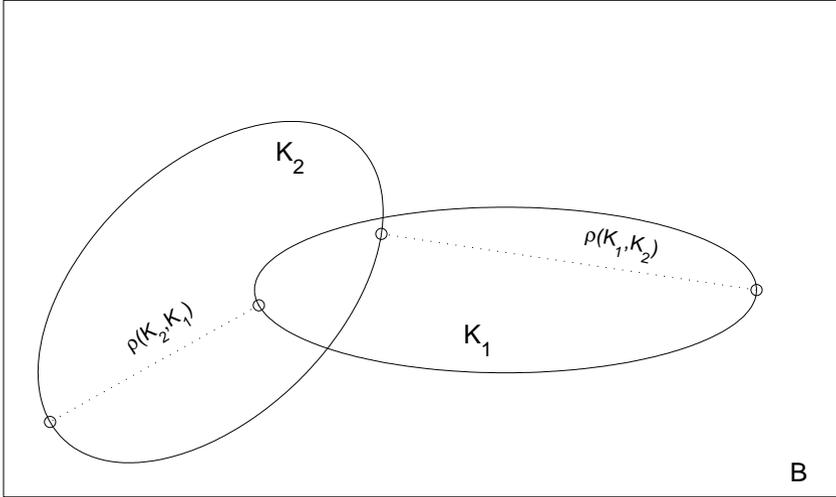


FIG. 2.1 -. Distance de Hausdorff des compacts

Cette convergence est clairement associée à la métrique définie sur l'ensemble \mathcal{O}_B des ouverts de B par

$$\forall \Omega_1, \Omega_2 \in \mathcal{O}_B, d_H(\Omega_1, \Omega_2) := d^H(B \setminus \Omega_1, B \setminus \Omega_2). \quad (2.11)$$

Noter que $B \setminus \Omega$ est bien un compact non vide si $\Omega \in \mathcal{O}_B$. Nous utiliserons donc la notation d_H pour la distance des ouverts et nous conservons d^H pour la distance des compacts.

Remarque 2.2.10 Il est intéressant de noter que la définition de cette métrique ne dépend en fait pas de B : plus précisément, si \hat{B} est une autre boule fermée contenant les ouverts Ω_1, Ω_2 , nous avons

$$d^H(B \setminus \Omega_1, B \setminus \Omega_2) = d^H(\hat{B} \setminus \Omega_1, \hat{B} \setminus \Omega_2).$$

Ceci peut se voir à l'aide du lemme élémentaire suivant intéressant en soi:

Lemme 2.2.11 Si $\Omega_2 \setminus \Omega_1$ est non vide (i.e. Ω_2 non inclus dans Ω_1),

$$\rho(B \setminus \Omega_1, B \setminus \Omega_2) = \rho(\Omega_2 \setminus \Omega_1, \partial\Omega_2). \quad (2.12)$$

Démonstration: Pour tout x dans B ,

$$d(x, B \setminus \Omega_2) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in B \setminus \Omega_2 \\ d(x, \partial\Omega_2) & \text{si } x \in \Omega_2. \end{cases}$$

Ainsi, si $\Omega_2 \setminus \Omega_1$ est non vide,

$$\rho(B \setminus \Omega_1, B \setminus \Omega_2) = \sup_{x \in B \setminus \Omega_1} d(x, B \setminus \Omega_2) = \sup_{x \in \Omega_2 \setminus \Omega_1} d(x, \partial \Omega_2),$$

d'où le lemme. \square

Si $\Omega_2 \setminus \Omega_1$ est vide, on a évidemment $\rho(B \setminus \Omega_1, B \setminus \Omega_2) = 0$. En convenant que $\rho(\cdot, \cdot)$ est nul si son premier argument est vide, on a alors le corollaire suivant qui montre bien l'indépendance annoncée par rapport à B de la distance d_H sur les ouverts bornés de \mathbb{R}^N :

Corollaire 2.2.12 *Etant donnés deux ouverts bornés Ω_1, Ω_2 de \mathbb{R}^N , on a*

$$d_H(\Omega_1, \Omega_2) = \max\{\rho(\Omega_2 \setminus \Omega_1, \partial \Omega_2), \rho(\Omega_1 \setminus \Omega_2, \partial \Omega_1)\}. \quad (2.13)$$

Remarque Si $\Omega_1 = \emptyset$, $d_H(\emptyset, \Omega_2)$ est le rayon de la plus grande boule incluse dans Ω_2 .

Propriétés, exemples, contre-exemples

On trouve quelques détails sur la distance de Hausdorff dans [111], [144], [228]. Il nous a semblé opportun d'énumérer ici plusieurs résultats utiles concernant cette distance très employée en optimisation de forme. Les démonstrations, souvent élémentaires, en sont esquissées. Nous commençons par la **convergence au sens de Hausdorff des compacts**:

1. Une suite décroissante de compacts non vides converge vers son intersection.

(Si K_n est une telle suite, $K := \bigcap_n K_n$ et $x_n \in K_n$ tel que $d(x_n, K) = \rho(K_n, K)$, il existe x_∞ valeur d'adhérence de x_n et on a: $d(x_\infty, K) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, K)$ par monotonie et $d(x_\infty, K) = 0$ puisque $x_\infty \in K$ par construction. Ainsi, $\rho(K_n, K)$ tend vers 0 et, bien sûr, $\rho(K, K_n) = 0$.)

2. Une suite croissante de compacts non vides inclus dans B converge vers la fermeture de sa réunion.

(Si K_n est une telle suite, $K := \overline{\bigcup_n K_n}$, $x_n \in K$ tel que $d(x_n, K_n) = \rho(K, K_n)$, il existe $x_\infty \in K$, valeur d'adhérence de x_n . Par monotonie et puisque pour tout $\bar{x} \in \bigcup_n K_n$, $d(\bar{x}, K_n) = 0$ pour n assez grand, on a:

$$\lim \rho(K, K_n) = \lim d(x_n, K_n) = \lim d(x_\infty, K_n) = 0.)$$

3. Si K_n converge vers K au sens de Hausdorff:

$$\begin{aligned} K &= \bigcap_n \left(\overline{\bigcup_{p \geq n} K_p} \right) = \{x \in B; \exists x_{n_p} \in K_{n_p}, x_{n_p} \xrightarrow{p \rightarrow \infty} x\} \\ &= \{x \in B; \exists x_n \in K_n, x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x\}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

(D'après 1. ci-dessus, $F_n := \overline{\bigcup_{p \geq n} K_p}$ converge vers $F := \bigcap_n F_n$; d'autre part, $d_H(K_n, F_n) = \rho(F_n, K_n) \leq \sup_{p \geq n} \rho(K_p, K_n) \rightarrow 0$ puisque K_n est une suite de Cauchy⁵; il en résulte $F = K$, d'où la première égalité ci-dessus. Les deux autres sont faciles.)

⁵ Augustin-Louis CAUCHY, 1789-1857, a laissé une oeuvre mathématique considérable, en particulier en analyse: fonctions holomorphes, équations différentielles, notion de continuité, intégrale, mais aussi en théorie des groupes, des déterminants, des formes quadratiques, et aussi pour l'étude mathématique de l'élasticité.

4. **Inclusion** L'inclusion est stable pour la convergence au sens de Hausdorff.

L'application $(K_1, K_2) \in \mathcal{K}_B \times \mathcal{K}_B \rightarrow \rho(K_1, K_2)$ est continue et même lipschitzienne. Puisque $((K_1 \subset K_2) \Leftrightarrow \rho(K_1, K_2) = 0)$, la continuité de l'inclusion pour la métrique de Hausdorff s'en suit.)

5. Voici une autre définition utile de la distance de Hausdorff où pour $\alpha > 0$ et K compact, nous notons $K^\alpha = \{x \in \mathbb{R}^N; d(x, K) \leq \alpha\}$:

$$d^H(K_1, K_2) = \inf\{\alpha > 0; K_2 \subset K_1^\alpha \text{ et } K_1 \subset K_2^\alpha\}. \tag{2.15}$$

(Ceci provient immédiatement de l'équivalence

$$(K_2 \subset K_1^\alpha) \Leftrightarrow \sup_{x \in K_2} d(x, K_1) \leq \alpha.)$$

6. **Fonctions** $d(\cdot, K_n)$: On a l'équivalence

$$d^H(K_n, K) \rightarrow 0 \Leftrightarrow d(\cdot, K_n) \xrightarrow{L^\infty(B)} d(\cdot, K).$$

Ceci sera démontré plus loin (cf. proposition 2.2.25).

Nous résumons maintenant quelques propriétés de la **convergence de Hausdorff des ouverts** que nous serons amenés à utiliser par la suite. Les trois premières s'obtiennent par passage au complémentaire à partir de la convergence pour les compacts.

1. Une suite croissante d'ouverts inclus dans B converge au sens de Hausdorff vers sa réunion.
2. Une suite décroissante d'ouverts converge vers l'intérieur de l'intersection de tous les ouverts.
3. **Inclusion**: L'inclusion est stable pour la convergence au sens de Hausdorff, c'est-à-dire

$$\left. \begin{array}{l} \Omega_n^1 \xrightarrow{H} \Omega^1 \\ \Omega_n^2 \xrightarrow{H} \Omega^2 \\ \Omega_n^1 \subset \Omega_n^2 \text{ pour tout } n \end{array} \right\} \implies \Omega^1 \subset \Omega^2. \tag{2.16}$$

Remarque 2.2.13 Il n'est cependant *pas vrai* que

(F compact $\subset \Omega_n$ ouverts, $\Omega_n \xrightarrow{H} \Omega$ ouvert) implique $F \subset \Omega$;

Exemple: $\{0\} \subset]-1/n, 1/n[\xrightarrow{H} \emptyset$.

4. **Proposition 2.2.14** Soit Ω_n une suite d'ouverts qui converge au sens de Hausdorff vers l'ouvert Ω et soit $x \in \partial\Omega$. Alors, il existe une suite de points x_n avec $x_n \in \partial\Omega_n$ qui converge vers x .

(Soit $x \in \partial\Omega$ et supposons par l'absurde que sa distance à $\partial\Omega_n$ ne tende pas vers 0. Ainsi, il existe une boule fermée $\bar{B}(x, \eta)$, $\eta > 0$ dont l'intersection avec une sous-suite $\partial\Omega_{n_k}$ est vide. Par connexité, elle est incluse dans Ω_{n_k} ou dans son complémentaire. Par stabilité de l'inclusion pour la convergence de Hausdorff des ouverts et des fermés, on a donc $B(x, \eta) \subset \Omega$

ou $\bar{B}(x, \eta) \subset \Omega^c$, ce qui contredit que x est au bord de Ω .)

Notons que, d'après (2.14), la proposition 2.2.14 indique que, si $\partial\Omega_n$ converge au sens de Hausdorff vers un compact K , alors $\partial\Omega \subset K$. L'inclusion est stricte, en général, comme le montre l'exemple précédent $\Omega_n =] - 1/n, 1/n[$.

5. **Intersection:** L'intersection finie est stable pour la convergence au sens de Hausdorff,

$$\left. \begin{array}{l} \Omega_n^1 \xrightarrow{H} \Omega^1 \\ \Omega_n^2 \xrightarrow{H} \Omega^2 \end{array} \right\} \implies \Omega_n^1 \cap \Omega_n^2 \xrightarrow{H} \Omega^1 \cap \Omega^2. \quad (2.17)$$

(On utilise $d_H(\Omega_n^1 \cap \Omega_n^2, \Omega^1 \cap \Omega^2) \leq \max\{d_H(\Omega_n^1, \Omega^1), d_H(\Omega_n^2, \Omega^2)\}$.)

6. **Réunion:** En revanche pour la réunion, nous avons tout au plus une inclusion:

$$\left. \begin{array}{l} \Omega_n^1 \xrightarrow{H} \Omega^1 \\ \Omega_n^2 \xrightarrow{H} \Omega^2 \\ \Omega_n^1 \cup \Omega_n^2 \xrightarrow{H} \Omega \end{array} \right\} \implies \Omega^1 \cup \Omega^2 \subset \Omega. \quad (2.18)$$

Ceci résulte immédiatement du point 3. précédent. Mais, l'inclusion peut être stricte comme le montre l'exemple monodimensionnel:

$$\Omega_n^1 =]0, 1[\setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} \left\{ \frac{k}{n} \right\}$$

$$\Omega_n^2 = \bigcup_{k=1}^{n-1} \left] \frac{k}{n} - \frac{1}{2^n}, \frac{k}{n} + \frac{1}{2^n} \right[.$$

On a $\Omega_n^1 \xrightarrow{H} \emptyset$ et $\Omega_n^2 \xrightarrow{H} \emptyset$ tandis que $\Omega_n^1 \cup \Omega_n^2 =]0, 1[\xrightarrow{H}]0, 1[$. Il se peut même que $\Omega_n^1 \cup \Omega_n^2$ ne converge pas. Construisons par exemple, à partir de la suite ci-dessus, la nouvelle suite

$$\hat{\Omega}_n^1 := \Omega_n^1, \quad \hat{\Omega}_n^2 := \begin{cases} \Omega_n^1 & \text{si } n \text{ pair} \\ \Omega_n^2 & \text{si } n \text{ impair.} \end{cases}$$

A nouveau, $\hat{\Omega}_n^1, \hat{\Omega}_n^2 \xrightarrow{H} \emptyset$, mais $\hat{\Omega}_n^1 \cup \hat{\Omega}_n^2$ a les deux points d'adhérence \emptyset et $]0, 1[$.

7. **Proposition 2.2.15** *Si la suite d'ouverts Ω_n converge vers Ω et si K est un compact inclus dans Ω , alors K est inclus dans Ω_n pour n assez grand.*
(Puisque $0 < \inf_{x \in K} d(x, B \setminus \Omega)$ et que $d(\cdot, B \setminus \Omega) \leq d(\cdot, B \setminus \Omega_n) + d^H(B \setminus \Omega_n, B \setminus \Omega)$, on en déduit que $\inf_{x \in K} d(x, B \setminus \Omega_n) > 0$ pour n assez grand).

Remarque 2.2.16 On utilisera en particulier cette propriété sous la forme suivante: si φ est une fonction à support compact dans Ω , alors φ est aussi à support dans Ω_n pour n assez grand.

8. **Convexité**: elle est préservée par la convergence de Hausdorff des ouverts:

$$((\Omega_n)_{n \geq 1} \text{ convexes}, \Omega_n \xrightarrow{H} \Omega) \Rightarrow \Omega \text{ convexe.} \quad (2.19)$$

(D'après la propriété précédente, si $x, y \in \Omega$, alors $x, y \in \Omega_n$ pour n grand; mais alors $]x, y[\subset \Omega_n$ et ceci se conserve à la limite par stabilité de l'inclusion).

En revanche, l'enveloppe convexe n'est pas préservée par la convergence de Hausdorff. Si on reprend l'exemple de l'ouvert Ω_n^1 du point 6. ci-dessus, Ω_n^1 converge vers l'ensemble vide, mais son enveloppe convexe converge vers l'intervalle $]0, 1[$. Par contre, l'enveloppe convexe est une application continue pour la convergence de Hausdorff des compacts (voir exercice 2.5).

9. **Connexité**: La convergence de Hausdorff ne préserve pas la connexité des ouverts. Pour trouver un contre-exemple, il faut passer en dimension 2 car un intervalle ouvert qui converge au sens de Hausdorff ne peut converger que vers un intervalle. On peut prendre pour contre-exemple dans \mathbb{R}^2

$$\Omega_n =]0, 2[\times]0, 1[\setminus \{1\} \times \left[\frac{1}{n}, 1\right] \text{ ou } \Omega_n = B(0, 2) \setminus \{e^{ik\pi/n}, 0 \leq k < n\}.$$

qui convergent respectivement vers $]0, 1[\times]0, 1[\cup]1, 2[\times]0, 1[$ et la boule de rayon 2 privée du cercle unité (voir Figure 2.2). En revanche, on peut

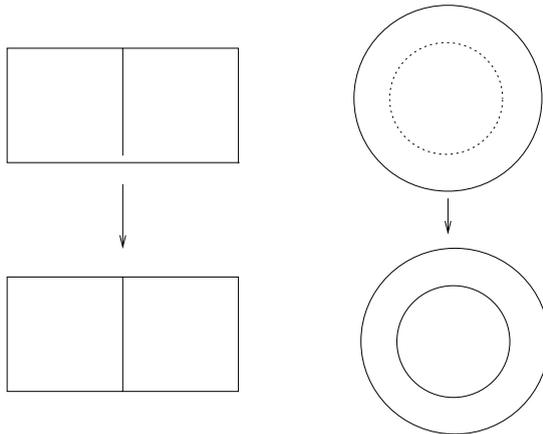


FIG. 2.2 –. La distance de Hausdorff ne préserve pas la connexité

montrer qu'elle préserve la connexité pour les compacts. Compte-tenu de l'importance de cette propriété pour la suite (cf. la proposition suivante et le théorème de Šverak 3.4.14), nous mettons ce résultat un peu plus en évidence et nous en donnons la preuve:

Proposition 2.2.17 Soit K_n une suite de compacts connexes qui converge au sens de Hausdorff vers un compact K . Alors K est connexe. Plus généralement, si K_n a au plus p composantes connexes avec $p \geq 1$ indépendant de n , alors il en est de même de K .

Remarque 2.2.18 On utilisera ce résultat pour les ouverts: soit Ω_n une suite d'ouverts convergeant vers Ω dont le complémentaire dans B a au plus p composantes connexes; alors le complémentaire de Ω a aussi au plus p composantes connexes.

Démonstration: Supposons par l'absurde que K ait strictement plus de p composantes connexes. Il est alors réunion disjointe de $p + 1$ fermés non vides F^i , $i = 1, \dots, p + 1$: en effet, comme K n'est pas connexe, il est réunion de deux fermés disjoints non vides; si $p \geq 2$, l'un de ces deux fermés n'est pas connexe et à son tour, il est réunion de deux fermés disjoints; on continue par récurrence pour obtenir que K est réunion de $p + 1$ fermés disjoints. Notons η le minimum des distances $d^H(F^i, F^j)$, $1 \leq i < j \leq p + 1$; comme les F^i sont compacts et disjoints, on a $\eta > 0$. Ainsi, les $p + 1$ ouverts $\omega_i = \{x \in B; d(x, F^i) < \eta/2\}$ sont disjoints. Or pour n assez grand, $\rho(K_n, K) < \eta/2$; donc, $K_n \subset \cup_i \omega_i$ et les ω_i constituent un recouvrement de K_n par $p + 1$ ouverts disjoints. Il en résulte que K_n a au moins $p + 1$ composantes connexes dès que $K_n \cap \omega_i \neq \emptyset$ pour tout $i = 1, \dots, p + 1$. C'est le cas pour n assez grand car alors, pour tout i :

$$\sup_{x \in F^i} d(x, K_n) \leq \sup_{x \in K} d(x, K_n) < \eta/2.$$

On a donc une contradiction.

10. **Volume:** La convergence au sens de Hausdorff ne préserve pas le volume. En fait, pour les ouverts, la fonction volume est s.c.i. comme nous le verrons un peu plus loin dans la proposition 2.2.21. C'est une autre façon d'exprimer le phénomène fréquent pour la convergence de Hausdorff *d'effondrement à la limite*. Comme on l'a déjà vu dans des exemples, la limite peut être strictement "plus petite" que les différents termes de la suite.
11. **Périmètre** Le périmètre d'un ouvert sera défini plus loin (cf. chapitre 4); il correspond à la "mesure de la surface latérale du bord" ($P(\Omega) = \int_{\partial\Omega} d\sigma(x)$) pour des ouverts à bord régulier. Nous verrons que c'est une fonction qui n'est s.c.i., ni s.c.s. pour la convergence de Hausdorff. L'exemple d'une suite de domaines ressemblant à des timbres avec des dents de plus en plus petites (cf Figure 2.3), montre qu'on peut avoir le périmètre de la limite strictement plus petit que la limite inf des périmètres des ouverts de la suite. Pour un exemple en sens inverse, on peut prendre pour Ω une couronne $\Omega = B(0, 1) \setminus \overline{B(0, R)}$, $R < 1$. On plaque alors sur le trou central une grille de taille $\frac{1}{n}$ et on ne conserve que les noeuds de la grille situés dans le disque central, soit x_1, x_2, \dots, x_p . On pose $\Omega_n = B(0, 1) \setminus (\bigcup_{i=1}^p \{x_i\})$ et on vérifie que $\Omega_n \xrightarrow{H} \Omega$, mais $P(\Omega_n) = 2\pi < P(\Omega) = 2\pi(1 + R)$.

12. **Diamètre:** Le diamètre est continu pour la convergence de Hausdorff.

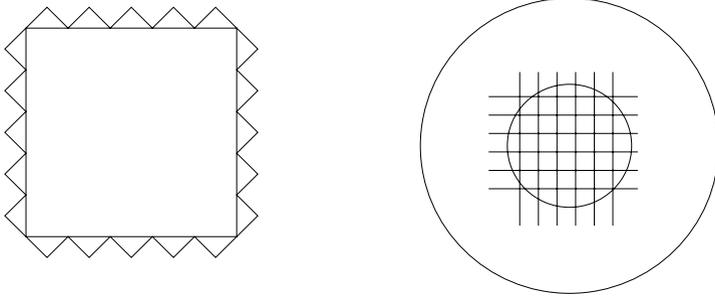


FIG. 2.3 –. *Le périmètre n'est pas continu pour la distance de Hausdorff*

2.2.4 La convergence au sens des compacts

Cette dernière notion de convergence est peut-être *a priori* moins naturelle, mais elle s'avère utile quand on s'intéresse à la continuité de la solution d'une équation aux dérivées partielles vis à vis de variations du domaine, cf [189], [181]. C'est donc une notion intéressante dans notre situation (cf la remarque à la fin du premier paragraphe).

Définition 2.2.19 Soient $(\Omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et Ω des ouverts de \mathbb{R}^N . On dira que Ω_n converge au sens des compacts vers Ω , et on notera $\Omega_n \xrightarrow{K} \Omega$ si

- (i) $\forall K$ compact $\subset \Omega$, on a $K \subset \Omega_n$ pour n assez grand
 - (ii) $\forall L$ compact $\subset \bar{\Omega}^c$, on a $L \subset \bar{\Omega}_n^c$ pour n assez grand.
- (2.20)

Un (gros) inconvénient de cette notion de convergence est qu'il n'y a pas unicité de la limite: on vérifie immédiatement que, si la suite Ω_n converge au sens des compacts vers Ω , alors elle converge aussi vers tout ouvert ω tel que $\omega \subset \Omega$ et $\bar{\omega} = \bar{\Omega}$. En fait, la topologie associée n'est pas séparée. Cette topologie est définie sur la famille \mathcal{O} des ouverts de \mathbb{R}^N à partir de la base d'ouverts $\mathcal{V}_{K,L}$ suivante où à chaque couple de compacts K, L de \mathbb{R}^N on associe la famille d'ouverts de \mathbb{R}^N :

$$\mathcal{V}_{K,L} := \{\omega \text{ ouvert de } \mathbb{R}^N; K \subset \omega, L \subset \bar{\omega}^c\}.$$

On vérifie facilement que $\{\mathcal{V}_{K,L}; K, L \text{ compacts de } \mathbb{R}^N\}$ constitue bien une base d'ouverts sur l'ensemble \mathcal{O} des ouverts de \mathbb{R}^N (stabilité par intersection finie) et que la topologie associée génère bien la notion de convergence au sens des compacts ci-dessus (cf. exercice 2.8). Mais cette topologie n'est pas séparée: on peut trouver deux ouverts distincts Ω_1 et Ω_2 de \mathbb{R}^N tels que tous

les $\mathcal{V}_{K,L}$ contenant Ω_1 rencontrent tous les $\mathcal{V}_{\hat{K},\hat{L}}$ contenant Ω_2 . Prenons par exemple pour Ω_1 la boule unité et

$$\Omega_2 := \Omega_1 \bigcap \bigcup_{k=1}^{\infty} B(x_k, r_k), \quad (2.21)$$

où x_k est une suite de points de Ω_1 **dense** dans Ω_1 et où $r_k > 0$ avec $\sum_{k \geq 1} r_k^N < 1$ de telle sorte que Ω_2 soit distinct de Ω_1 . On a alors $\Omega_2 \subset \Omega_1$ et $\bar{\Omega}_1 = \bar{\Omega}_2$ et on voit que la boule $B_n := B(0, 1 + 1/n)$ appartient à tout voisinage de l'un ou l'autre dès que n est assez grand. Donc, B_n converge vers les **deux** ouverts ci-dessus au sens des compacts quand n tend vers l'infini. Comme de plus les choix des x_k et des r_k comme ci-dessus sont infinis, la suite B_n a en fait une infinité de limites différentes! Il est vrai qu'en dehors de Ω_1 , les autres limites sont plutôt pathologiques.

On se retrouve ainsi dans une situation un peu comparable à celle de la convergence au sens des fonctions caractéristiques: on a unicité de la limite à condition de travailler modulo une relation d'équivalence adéquate, en l'occurrence ici:

$$\Omega_1 \simeq \Omega_2 \iff \bar{\Omega}_1 = \bar{\Omega}_2. \quad (2.22)$$

Proposition 2.2.20 *La topologie quotient sur l'espace quotient de \mathcal{O} par cette relation d'équivalence est séparée (cf. exercice 2.8).*

Il existe d'autres notions de convergence pour les ouverts qu'on peut décrire assez simplement: convergence des frontières, convergence au sens de Kuratowski⁶, convergence au sens topologique, mais nous ne les utiliserons pas ici. En revanche, une notion de convergence beaucoup moins explicite mais très importante qu'on introduira au chapitre suivant est la γ -convergence. Dans le cas de suites d'ouverts réguliers, on utilise aussi la convergence au sens de C^k -difféomorphismes de \mathbb{R}^N dans lui-même avec $k \geq 1$: $\Theta_n(\Omega)$ est dit alors converger vers un ouvert régulier Ω lorsque Θ_n converge vers l'identité pour la norme de C^k .

2.2.5 Lien entre ces différentes notions de convergence

Comme on va le voir dans une série d'exemples, aucune des trois notions de convergence définies ci-dessus n'implique l'une des trois autres. Cependant, certaines relations entre elles sont intéressantes et vont être détaillées (cf aussi Exercices 2.6 et 2.7 à la fin de ce chapitre).

Premier contre-exemple: Soit Ω le disque unité de \mathbb{R}^2 privé de l'intervalle $[0, 1] \times \{0\}$ et $\Omega_n := B(0, 1 + 1/n)$. Alors il est facile de vérifier que $\Omega_n \xrightarrow{K} \Omega$

⁶ Kazimierz KURATOWSKI, 1896-1980, polonais, enseigne à Lwów puis Varsovie. Ses travaux portent sur les fonctions réelles, la topologie, la théorie des ensembles et les graphes.

tandis que Ω_n converge au sens de Hausdorff vers $B(0, 1)$ et donc pas vers Ω . En fait, nous exploitons seulement ici la non-unicité de la limite au sens des compacts: comme mentionné plus haut, Ω_n converge en fait vers tout ouvert inclus dans $B(0, 1)$ dont la fermeture est égale à celle de $B(0, 1)$, par exemple vers Ω_2 défini en (2.21) qui, de surcroît, n'a pas même mesure que $B(0, 1)$ et n'est donc pas non plus la limite de Ω_n au sens des fonctions caractéristiques.

Deuxième contre-exemple (cf. [218]): Toujours dans \mathbb{R}^2 , on prend $F = [0, 3]^2$ et on pose (voir Figure 2.4)

$$\Omega_n := \{(x, y) \in F, 0 < x < 3, 0 < y < 2 + \sin(nx)\}, \quad K_n = \Omega_n^c, \quad (2.23)$$

$$\Omega :=]0, 3[\times]0, 1[, \quad K = \Omega^c. \quad (2.24)$$

Alors Ω_n converge vers Ω au sens de Hausdorff puisque

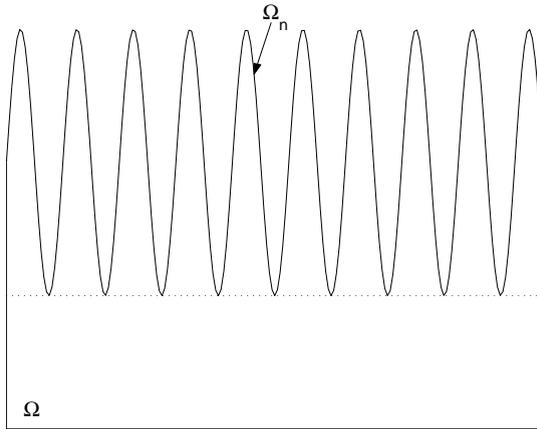


FIG. 2.4 – Ω_n converge vers Ω au sens de Hausdorff

- $\rho(K_n, K) = 0$ car $K_n \subset K$
- $\forall x \in K$, on a $d(x, K_n) \leq \pi/n$ et donc $\rho(K, K_n) \rightarrow 0$.

Cependant Ω_n ne converge pas vers Ω au sens des compacts, puisque tout compact du type $[a, b] \times [c, d]$ avec $0 < a < b < 3, 1 < c < d < 3$ qui est inclus dans Ω^c ne sera jamais, en revanche, inclus dans Ω_n^c pour n grand. De même, il est clair que Ω_n ne converge pas au sens des fonctions caractéristiques vers Ω car

$$\int_F |\chi_{\Omega_n} - \chi_{\Omega}| dx = \int_F \chi_{\Omega_n \setminus \Omega}(x) dx = \int_0^3 \int_1^{2+\sin(nx)} dy dx = 3 + \frac{1 - \cos(3n)}{n}$$

qui ne tend pas vers 0 quand n tend vers l'infini.

En fait, on vérifie que Ω_n ne converge ni au sens des compacts, ni au sens des fonctions caractéristiques (noter que, d'après l'exercice 2.6, si c'était le cas, la limite ω vérifierait alors $\bar{\omega} = \bar{\Omega}$).

Troisième contre-exemple: Dans \mathbb{R} posons

$$\Omega_n := \bigcup_{k=0}^{2^n-1}]\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}[= [0, 1] \setminus \bigcup_{k=0}^{2^n} \{\frac{k}{2^n}\}. \quad (2.25)$$

Alors il est facile de voir que $K_n := [0, 1] \setminus \Omega_n = \bigcup_{k=0}^{2^n} \{\frac{k}{2^n}\}$ converge au sens de Hausdorff vers l'intervalle $[0, 1]$. Ce qui signifie, en passant au complémentaire, que Ω_n converge au sens de Hausdorff vers l'ensemble vide. En revanche, il est clair que Ω_n ne converge pas au sens des compacts vers l'ensemble vide (ni vers tout autre ouvert d'ailleurs). Mais puisque $\chi_{\Omega_n} = \chi_{]0,1[}$ p.p., on a convergence de Ω_n vers $]0, 1[$ au sens des fonctions caractéristiques.

Selon l'exercice 2.1, on peut aussi choisir Ω_n de telle sorte que les fonctions caractéristiques ne convergent que faiblement.

Les exemples précédents montrent donc qu'il n'existe aucune implication complète entre les trois notions de convergence que nous avons définies. Néanmoins, nous pouvons mentionner quatre relations fortes entre elles:

- Nous avons vu dans la proposition 2.2.15, que la convergence au sens de Hausdorff impliquait "la moitié" de la convergence au sens des compacts.
- De même, la proposition qui va suivre, montre que cette même convergence au sens de Hausdorff entraîne une "moitié" de la convergence au sens des fonctions caractéristiques.
- L'exercice 2.6 prouve que si Ω_n converge au sens des compacts vers Ω et au sens de Hausdorff vers $\tilde{\Omega}$, alors $\Omega \subset \tilde{\Omega} \subset \bar{\Omega}$. En particulier $\bar{\Omega} = \bar{\tilde{\Omega}}$. Ainsi, $\tilde{\Omega} = \Omega$ si Ω coïncide avec l'intérieur de $\bar{\Omega}$, c'est-à-dire si Ω est "saturé" pour la relation d'équivalence (2.22) naturelle dans la convergence au sens des compacts. On dit aussi dans ce cas que Ω (qui vérifie aussi $\partial\Omega = \partial\bar{\Omega}$) est un ouvert de Carathéodory.
- La deuxième partie de l'exercice 2.6 met en évidence un lien analogue entre convergence au sens des compacts et convergence au sens des fonctions caractéristiques. Voir aussi l'exercice 2.7.

Proposition 2.2.21 *Soient Ω_n et Ω des ouverts inclus dans un fermé fixe B . Si $\Omega_n \xrightarrow{H} \Omega$ alors*

(i) $|\Omega \setminus \Omega_n| \rightarrow 0$

(ii) $\chi_\Omega \leq \liminf \chi_{\Omega_n}$ p.p.

(iii) Si, de plus, $\chi_{\Omega_n} \xrightarrow{\sigma(L^\infty, L^1)} \chi$, alors $\chi_\Omega \leq \chi$.

Remarque 2.2.22 Puisque

$$\|\chi_{\Omega_n} - \chi_{\Omega}\|_{L^1} = \int_B |\chi_{\Omega_n}(x) - \chi_{\Omega}(x)| dx = \int_{\Omega_n \setminus \Omega} \chi_{\Omega_n}(x) dx + \int_{\Omega \setminus \Omega_n} \chi_{\Omega}(x) dx = |\Omega_n \setminus \Omega| + |\Omega \setminus \Omega_n|,$$

on voit bien que, là aussi, la convergence au sens de Hausdorff implique "la moitié" de la convergence au sens des fonctions caractéristiques.

Démonstration de la proposition: On note, comme d'habitude $K = B \setminus \Omega$ et $K_n = B \setminus \Omega_n$. Fixons une suite de réels positifs ε_n décroissant vers 0 et telle que $\varepsilon_n \geq \rho(K_n, K)$. On a alors, puisque $d^H(K_n, K) \rightarrow 0$:

$$\chi_{\Omega \setminus \Omega_n} = \chi_{K_n \setminus K} \leq \chi_{\{x \in B; 0 < d(x, K) < \varepsilon_n\}}.$$

Mais, puisque $\{x \in B; 0 < d(x, K) < \varepsilon_n\}$ tend en décroissant vers \emptyset on a, par le lemme de Beppo Levi⁷,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_F \chi_{\Omega \setminus \Omega_n}(x) dx = 0$$

et donc $|\Omega \setminus \Omega_n| \rightarrow 0$. Comme, de plus,

$$\chi_{\Omega} = \chi_{\Omega \setminus \Omega_n} + \chi_{\Omega \cap \Omega_n} \leq \chi_{\Omega \setminus \Omega_n} + \chi_{\Omega_n} \tag{2.26}$$

et puisque $\chi_{\Omega \setminus \Omega_n} \rightarrow 0$ p.p. d'après la première partie de la preuve, on a bien

$$\chi_{\Omega} \leq \liminf \chi_{\Omega_n} \text{ p.p.}, \tag{2.27}$$

ainsi que,

$$\forall \psi \in L^1, \text{ avec } \psi \geq 0, \int \chi_{\Omega} \psi \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int \chi_{\Omega_n} \psi = \int \chi \psi, \tag{2.28}$$

ce qu'il fallait vérifier. \square

2.2.6 Résultats de compacité

Comme on l'a vu dans la proposition 2.1.1, il est important de pouvoir extraire d'une suite Ω_n d'ouverts une sous-suite convergente, c'est-à-dire de travailler avec une topologie ayant de bonnes propriétés de compacité. Nous allons voir que celle de Hausdorff est très favorable de ce point de vue.

⁷ Beppo LEVI, 1875-1961, italien, en Argentine après 1939. Travaux sur la théorie des fonctions intégrables et en mécanique quantique.

Cas de la convergence au sens de Hausdorff

Théorème 2.2.23 *Soit K_n une suite de compacts inclus dans un compact fixe B . Alors il existe K compact inclus dans B et une suite extraite K_{n_k} qui converge au sens de Hausdorff vers K quand $k \rightarrow \infty$.*

Corollaire 2.2.24 *Soit Ω_n une suite d'ouverts inclus dans un compact fixe B . Alors il existe Ω ouvert inclus dans B et une suite extraite Ω_{n_k} qui converge au sens de Hausdorff vers Ω quand $k \rightarrow \infty$. Autrement dit $\{\Omega; \Omega \subset B\}$ est compact pour la métrique de Hausdorff d_H .*

Pour tout compact K de \mathbb{R}^N , on notera $d_K(x)$ la fonction (continue) "distance euclidienne à K ", définie par $d_K(x) = d(x, K) = \min\{d(x, y), y \in K\}$. La proposition suivante donne une définition équivalente de la distance de Hausdorff.

Proposition 2.2.25 *Si K_1 et K_2 sont deux compacts alors*

$$d^H(K_1, K_2) = \|d_{K_1} - d_{K_2}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} = \|d_{K_1} - d_{K_2}\|_{L^\infty(K_1 \cup K_2)}. \quad (2.29)$$

En particulier,

$$K_n \xrightarrow{H} K \iff d_{K_n} - d_K \text{ converge uniformément vers } 0 \text{ dans } \mathbb{R}^N$$

Démonstration de la proposition:

Notons $\sigma(K_2, K_1) := \|d_{K_1} - d_{K_2}\|_{L^\infty(K_1 \cup K_2)}$. Pour $x \in K_2$, on a

$$d(x, K_1) = |d(x, K_1) - d(x, K_2)| \leq \sigma(K_2, K_1),$$

et donc, en passant à la borne supérieure, $\rho(K_2, K_1) \leq \sigma(K_2, K_1)$. Comme l'expression de droite est symétrique en K_1 et K_2 , on en déduit, en inversant le rôle de K_1 et K_2 que

$$d^H(K_1, K_2) \leq \sigma(K_2, K_1).$$

Inversement, pour $x \in \mathbb{R}^N$ fixé, notons k_1 et k_2 les éléments de K_1 et K_2 respectivement tels que

$$d(x, K_1) = d(x, k_1), \quad d(x, K_2) = d(x, k_2).$$

On a, pour tout $y \in K_1$, $d(x, y) \leq d(x, k_2) + d(k_2, y)$, d'où en prenant l'infimum pour $y \in K_1$, on obtient

$$d(x, K_1) \leq d(x, k_2) + d(k_2, K_1) = d(x, K_2) + d(k_2, K_1).$$

Ce qui entraîne

$$d(x, K_1) - d(x, K_2) \leq d(k_2, K_1) \leq \rho(K_2, K_1) \leq d^H(K_1, K_2).$$

Par symétrie, on en déduit

$$\forall x \in \mathbb{R}^N, |d(x, K_1) - d(x, K_2)| \leq d^H(K_1, K_2),$$

d'où, en prenant la borne supérieure pour $x \in \mathbb{R}^N$

$$\sigma(K_2, K_1) \leq \|d_{K_1} - d_{K_2}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq d^H(K_1, K_2),$$

ce qui termine la démonstration de la proposition. \square

Démonstration du théorème: Considérons la suite d_{K_n} dans l'espace de fonctions continues $\mathcal{C}(B)$ muni de la métrique uniforme.

- la suite d_{K_n} est bornée uniformément (par le diamètre de B par exemple).
- la suite d_{K_n} est équicontinue puisque

$$|d_{K_n}(x) - d_{K_n}(y)| = |d(x, K_n) - d(y, K_n)| \leq d(x, y).$$

Donc, d'après le théorème d'Ascoli⁸, la famille d_{K_n} est relativement compacte dans $\mathcal{C}(B)$: on peut en extraire une sous-suite, encore notée, d_{K_n} qui converge uniformément sur B vers une fonction continue f . Posons alors $K = \{x \in B; f(x) = 0\}$ qui est un compact de B . La fin de la démonstration va consister à montrer que $f = d_K$, ce qui terminera la preuve grâce à la proposition 2.2.25.

Tout d'abord, puisque $|d_{K_n}(x) - d_{K_n}(y)| \leq d(x, y)$, on a en passant à la limite $|f(x) - f(y)| \leq d(x, y)$ et donc, en particulier pour tout $y \in K$ $f(x) = |f(x)| \leq d(x, y)$, ce qui implique

$$f(x) \leq d_K(x) \tag{2.30}$$

en passant à l'infimum à droite.

Soit maintenant x fixé dans \mathbb{R}^N , et introduisons, pour tout n , un point $x_n \in K_n$ tel que $d(x, K_n) = d(x, x_n)$. Comme (x_n) est une suite de B , on peut extraire x_{n_k} qui converge vers un point $y \in B$. Donc

$$f(x) = \lim d_{K_{n_k}}(x) = \lim d(x, x_{n_k}) = d(x, y).$$

Mais puisque $f(y) = \lim d_{K_{n_k}}(y) \leq \lim d(y, x_{n_k}) = 0$, on en déduit, par définition de K que $y \in K$. Donc $f(x) = d(x, y) \geq d_K(x)$ d'où le résultat en utilisant (2.30). \square

Cas de la convergence au sens des fonctions caractéristiques

Comme annoncé plus haut, avec la topologie de la convergence au sens des fonctions caractéristiques, nous avons la propriété de compacité immédiate suivante:

Proposition 2.2.26 *Soit E_n une suite d'ensembles mesurables de \mathbb{R}^N . Alors on peut extraire de la suite χ_{E_n} une sous-suite qui converge *-faiblement dans $L^\infty(\mathbb{R}^N)$ (i.e. dans $\sigma(L^\infty, L^1)$) vers une fonction $\chi \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$. On a, de plus, $0 \leq \chi \leq 1$ p.p..*

⁸ Giulio ASCOLI, 1843-1896, italien; travaux en analyse fonctionnelle, souvent associé à Cesare ARZELA, 1847-1912, italien, un autre pionnier de l'analyse fonctionnelle.

Ceci résulte du théorème de compacité faible suivant appliqué avec $X = L^1(\mathbb{R}^N)$ et $X' = L^\infty(\mathbb{R}^N)$ (voir par exemple [45]).

Lemme 2.2.27 *La boule unité du dual X' d'un espace de Banach⁹ X est compacte pour la topologie *-faible $\sigma(X', X)$. Si, de plus, X est séparable, alors elle est séquentiellement compacte.*

Remarque 2.2.28 *A propos de $0 \leq \chi \leq 1$: La positivité est conservée par limite dans $\sigma(L^\infty, L^1)$: en effet, si χ est limite d'une suite $\chi_n \geq 0$, alors pour tout $\psi \in L^1$, avec $\psi \leq 0$, on a $\int \chi_n \psi \leq 0$ et donc à la limite $\int \chi \psi \leq 0$. Ceci implique bien $\chi \geq 0$ p.p.. En appliquant cette remarque à $1 - \chi_n$, on obtient que $\forall n, \chi_n \leq 1 \Rightarrow \chi \leq 1$.*

Si on travaille avec des ensembles de mesure uniformément bornée (ce qui est évidemment le cas quand les E_n sont tous inclus dans une boule fixe B), la suite χ_{E_n} est alors bornée dans tous les $L^p(\mathbb{R}^N)$. Puisque $L^p(\mathbb{R}^N)$ est réflexif pour $1 < p < \infty$, on a aussi compacité faible dans L^p de χ_{E_n} . Puisque $\mathcal{C}_0^\infty \subset L^{p'} \cap L^1$, la même sous-suite de la proposition 2.2.26 converge faiblement dans L^p vers la même limite χ . Cette limite n'est pas plus une fonction caractéristique que précédemment (cf. exercice 2.1). Pour montrer qu'elle prend ses valeurs entre 0 et 1, on peut aussi invoquer le théorème de Mazur¹⁰ qui exprime que si une suite converge faiblement dans un espace de Banach X (c'est-à-dire dans $\sigma(X, X')$), alors il existe une suite de combinaisons convexes qui converge fortement vers la même limite (cf. [45]). Ici, puisque les fonctions χ_{E_n} ne prennent que des valeurs comprises entre 0 et 1, il en est de même de toute combinaison convexe des χ_{E_n} , et comme de toute suite convergente fortement dans $L^p(\mathbb{R}^N)$ on peut extraire une sous-suite convergente presque partout, il en résulte bien $0 \leq \chi(x) \leq 1$, p.p.x.

Dans le cas où la fonction limite χ est tout de même une fonction caractéristique, nous avons déjà vu que la convergence était forte (cf. proposition 2.2.1).

Nous verrons plus tard (cf chapitre 4) que si les E_n sont de périmètre uniformément borné, alors la suite χ_{E_n} est compacte pour la convergence forte.

Cas de la convergence au sens des compacts

La situation est ici beaucoup moins favorable, nous allons comprendre pourquoi sur un exemple.

Considérons le cas, en dimension 2 pour fixer les idées, où Ω est défini comme étant la partie située en dessous du graphe d'une fonction f continue strictement positive de $[a, b]$ dans \mathbb{R} :

⁹ Stefan BANACH, 1892-1945, polonais, de la célèbre école de Lwów; contribution énorme en analyse fonctionnelle et autour des espaces qui portent son nom.

¹⁰ Stanislaw MAZUR, 1905-1981, polonais, enseignant à Lwów, Łódź, Cracovie; travaux en analyse fonctionnelle.

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad a < x < b, \quad 0 < y < f(x)\},$$

et de même pour Ω_n avec des fonctions f_n continues strictement positives sur $[a, b]$. Alors, on a

Proposition 2.2.29

$$\Omega_n \xrightarrow{K} \Omega \Rightarrow f_n \text{ converge uniformément vers } f \text{ sur tout compact de }]a, b[\quad (2.31)$$

$$f_n \text{ converge uniformément vers } f \text{ sur } [a, b] \Rightarrow \Omega_n \xrightarrow{K} \Omega. \quad (2.32)$$

Remarque 2.2.30 On n'a pas l'équivalence dans (2.31) comme le montre un exemple simple du type $f(x) = 1$ et $f_n(x) = 1 + x^n$ sur l'intervalle $]0, 1[$. D'autre part, $\Omega_n \xrightarrow{K} \Omega$ n'implique pas non plus la convergence uniforme comme le montre l'exemple $f(x) = 2, f_n(x) = 2 - x^n$.

Cette proposition montre bien que, contrairement au cas de la convergence au sens de Hausdorff, la compacité sera loin d'être automatique dans ce cas. En effet, même en supposant les fonctions f_n bornées uniformément, on sait bien (cf. théorème d'Ascoli), qu'il faut une hypothèse supplémentaire d'équicontinuité pour pouvoir extraire de la suite f_n une sous-suite uniformément convergente (même sur tout compact). L'équicontinuité peut être obtenue à l'aide d'un contrôle sur les pentes. Ce serait le cas, par exemple, si on supposait les fonctions f_n uniformément lipschitziennes (i.e. avec un rapport de Lipschitz¹¹ commun).

Démonstration de la proposition: Notons, pour tout ε positif

$$K_\varepsilon = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad a + \varepsilon \leq x \leq b - \varepsilon, \quad \varepsilon \leq y \leq f(x) - \varepsilon\}$$

Si l'on suppose alors que $\Omega_n \xrightarrow{K} \Omega$, par définition on va avoir $K_\varepsilon \subset \Omega_n$ pour n assez grand et donc

$$\forall x \in [a + \varepsilon, b - \varepsilon], \quad f_n(x) \geq f(x) - \varepsilon.$$

De même, avec le compact extérieur $L_\varepsilon := \{a \leq x \leq b; f(x) + \varepsilon \leq y \leq \varepsilon^{-1}\}$, on a $L_\varepsilon \subset \bar{\Omega}^c$ et donc $L_\varepsilon \subset \bar{\Omega}_n^c$ pour n assez grand, soit, en particulier:

$$\forall x \in [a, b], \quad f_n(x) \leq f(x) + \varepsilon.$$

Ceci prouve (2.31). L'assertion (2.32) ne pose, elle non plus, aucune difficulté puisque, si K est un compact quelconque inclus dans Ω , on a évidemment $K \subset K_\varepsilon$ pour un certain $\varepsilon > 0$ et la convergence uniforme de f_n vers f entraîne $K_\varepsilon \subset \Omega_n$ à partir d'un certain rang. On raisonne de façon similaire avec un compact L inclus dans l'extérieur de Ω : on voit qu'alors $L \cap [a, b] \times [0, \infty[$ est

¹¹ Rudolph LIPSCHITZ, 1832-1903, allemand, enseigne à Berlin, Breslau, Bonn; connu pour ses travaux sur les équations différentielles et la géométrie riemannienne.

inclus dans L_ε pour un certain ε puisque $f > 0$ (sinon, L pourrait traverser l'axe des x); et par convergence uniforme de f_n , $L_\varepsilon \subset \bar{\Omega}_n^c$ pour n assez grand. Puisque $\bar{\Omega}_n \subset [a, b] \times [0, \infty[$, pour le reste de L , l'inclusion dans $\bar{\Omega}_n^c$ est claire. \square

On peut trouver dans l'Exercice 2.9 une généralisation de l'exemple précédent où les ouverts sont définis comme ensembles de niveau de fonctions continues.

2.3 Suites d'ensembles à périmètre borné

Nous allons voir dans ce paragraphe que, pour une suite d'ouverts à périmètre borné, la suite des fonctions caractéristiques est relativement compacte *pour la convergence forte*. Ceci est particulièrement utile en optimisation de formes où le périmètre apparaît souvent dans les fonctionnelles à minimiser: c'est le cas chaque fois qu'il y a un terme de tension superficielle (voir exemples du chapitre 1); il peut aussi correspondre à une "mesure" particulière du coût de l'objet dont on cherche la forme idéale, comme peut l'être, dans d'autres cas, le volume.

Pour cela, il est nécessaire de définir le périmètre d'ensembles plus généraux que les seuls ouverts "rectifiables": nous adoptons la notion de périmètre généralisé introduite par De Giorgi¹².

2.3.1 Définition du périmètre, propriétés

Soit D un ouvert quelconque de \mathbb{R}^N . Notons $\mathcal{D}(D; \mathbb{R}^N)$ l'espace des fonctions de D dans \mathbb{R}^N qui sont C^∞ et à support compact, c'est-à-dire que

$$\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N) \in \mathcal{D}(D; \mathbb{R}^N) \text{ si } \varphi_i \in \mathcal{D}(D) \text{ pour tout } i = 1, \dots, N.$$

On munit $\mathcal{D}(D; \mathbb{R}^N)$ de la norme

$$\|\varphi\|_\infty := \sup_{x \in D} \left[\left(\sum_{i=1}^N \varphi_i(x)^2 \right) \right]^{1/2} = \sup_{x \in D} |\varphi(x)|.$$

Définition 2.3.1 Soit Ω un ensemble mesurable dans D . On appelle périmètre de Ω relatif à D (simplement périmètre si $D = \mathbb{R}^N$), le nombre

$$P_D(\Omega) = \sup \left\{ \int_\Omega \operatorname{div}(\varphi) dx; \quad \varphi \in \mathcal{D}(D; \mathbb{R}^N), \quad \|\varphi\|_\infty \leq 1 \right\}.$$

Si $D = \mathbb{R}^N$, on note simplement $P_{\mathbb{R}^N}(\Omega) = P(\Omega)$.

¹² Ennio DE GIORGI, 1928-1996, mathématicien italien; a fait presque toute sa carrière à l'Ecole Normale Supérieure de Pise où il a formé de nombreux élèves. Contributions importantes en calcul des variations (surfaces minimales et Γ -convergence qu'il introduit en 1975), théorie géométrique de la mesure, théorie des E.D.P. (en particulier, régularité).

Remarque 2.3.2 On peut aussi exprimer $\int_{\Omega} \operatorname{div}(\varphi) dx$ de la façon suivante (on s'en reservira un peu plus loin):

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \operatorname{div}(\varphi) dx &= \int_D \chi_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^N \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i} \right) dx = \langle \chi_{\Omega}, \sum_{i=1}^N \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i} \rangle_{\mathcal{D}' \times \mathcal{D}} \\ &= - \sum_{i=1}^N \langle \frac{\partial \chi_{\Omega}}{\partial x_i}, \varphi_i \rangle_{\mathcal{D}' \times \mathcal{D}} = - \langle \nabla \chi_{\Omega}, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(D; \mathbb{R}^N) \times \mathcal{D}(D; \mathbb{R}^N)}, \end{aligned}$$

où $\mathcal{D}'(D; \mathbb{R}^N) = \mathcal{D}'(D)^N$ est l'espace des distributions (T_1, \dots, T_N) avec $\forall i = 1 \dots N, T_i \in \mathcal{D}'(D)$.

Dans le cas où Ω est régulier, on retrouve bien sûr la notion usuelle de périmètre ou de "surface latérale" du bord de Ω dans D :

Proposition 2.3.3 *Si Ω est un ouvert borné de classe C^1 , alors $P_D(\Omega) = \int_{\partial\Omega \cap D} d\sigma$ (où $d\sigma$ est l'élément de surface sur $\partial\Omega$).*

Remarque Nous renvoyons à la page 188 du chapitre 5 pour les définitions et propriétés concernant la notion d'ouvert de classe C^1 .

Démonstration de la proposition 2.3.3: Si $\varphi \in \mathcal{D}(D; \mathbb{R}^N)$, par la formule de Green, on a

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(\varphi) dx = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i} dx = \int_{\partial\Omega} \varphi_i n_i d\sigma = \int_{\partial\Omega \cap D} \varphi \cdot \mathbf{n} d\sigma.$$

Or

$$\varphi(x) \cdot \mathbf{n}(x) \leq |\varphi(x)| \leq \|\varphi\|_{\infty} \leq 1,$$

d'où

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(\varphi) dx \leq \int_{\partial\Omega \cap D} d\sigma \quad \text{et} \quad P_D(\Omega) \leq \int_{\partial\Omega \cap D} d\sigma.$$

Pour obtenir l'inégalité dans l'autre sens, on aimerait pouvoir exhiber une fonction φ telle que $\varphi = \mathbf{n}$ sur $\partial\Omega$ ou au moins approcher \mathbf{n} par une telle suite de fonctions de $\varphi^q \in \mathcal{D}(D; \mathbb{R}^N)$. Ceci peut se faire de la façon suivante. D'abord, étant donné $\epsilon > 0$, soit $D_{\epsilon} \subset D$ compact tel que $\int_{\partial\Omega \cap D} d\sigma - \int_{\partial\Omega \cap D_{\epsilon}} d\sigma \leq \epsilon$. Par compacité, il existe une famille de C^1 -difféomorphismes $\psi_i, i = 1, \dots, p$ définissant $\partial\Omega \cap D_{\epsilon}$ comme indiqué en page 188. On peut toujours supposer les domaines de définition \mathcal{O}_i des ψ_i inclus dans D . A l'aide de la partition de l'unité (ξ_i) associée et telle que $\sum_i \xi_i \equiv 1$ sur un voisinage de $\partial\Omega \cap D_{\epsilon}$, on obtient un prolongement de \mathbf{n} selon la formule (5.39), soit

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^p \xi_i(x) \mathbf{n}(\psi_i \circ \pi_i \circ \psi_i^{-1}(x)),$$

où π_i est la projection orthogonale convenable et φ est continue. Ainsi, si $x \in \partial\Omega \cap D_{\epsilon}$, on a $\varphi(x) = \sum_1^p \xi_i(x) \mathbf{n}(x) = \mathbf{n}(x)$. Par régularisation, en posant

$\varphi^q := \varphi * \rho_q$ (où ρ_q est une suite régularisante), on fabrique une suite de fonctions de $\mathcal{D}(D; \mathbb{R}^N)$ qui converge uniformément vers φ et pour laquelle on a

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(\varphi^q) dx = \int_{\partial\Omega \cap D} \varphi^q \cdot \mathbf{n}(\sigma) d\sigma \longrightarrow \int_{\partial\Omega \cap D} \varphi \cdot \mathbf{n} d\sigma \geq \int_{\partial\Omega \cap D} d\sigma - 2\epsilon,$$

d'où le résultat. \square

Nous allons donner maintenant une autre interprétation, en terme de mesure de Radon¹³ du périmètre. Rappelons tout d'abord que si $f \in L^1(D; \mathbb{R}^N)$, la norme $\|f\|_1 = \int_D |f(x)| dx$, où $|\cdot|$ désigne la norme euclidienne, peut être définie par dualité par

$$\|f\|_1 = \sup \left\{ \int_D f(x) \cdot \varphi(x) dx; \quad \varphi \in \mathcal{D}(D; \mathbb{R}^N), \quad \|\varphi\|_{\infty} \leq 1 \right\}.$$

Plus généralement, la formule précédente est valable pour des mesures de Radon de masse totale finie. On rappelle qu'une mesure de Radon sur D à valeurs dans \mathbb{R}^N est une forme linéaire continue sur l'espace $C_0^0(D; \mathbb{R}^N)$ des fonctions continues à valeurs dans \mathbb{R}^N et à support compact dans D (c'est-à-dire une distribution d'ordre 0). Plus précisément, on a

Proposition 2.3.4 *Soit $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N) \in (\mathcal{D}'(D; \mathbb{R}))^N = \mathcal{D}'(D; \mathbb{R}^N)$. Alors, μ est une mesure de Radon de masse totale finie sur \mathbb{R}^N si et seulement si*

$$\|\mu\|_1 = \sup \{ \langle \mu, \varphi \rangle_{\mathcal{D}' \times \mathcal{D}}; \quad \varphi \in \mathcal{D}(D; \mathbb{R}^N), \quad \|\varphi\|_{\infty} \leq 1 \} < +\infty.$$

Pour la démonstration, cf [234]. On notera $\mathcal{M}_b(D)$ les mesures de Radon réelles sur D de masse totale finie et

$$\mathcal{M}_b(D; \mathbb{R}^N) = \{ \mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N) \quad \text{avec } \mu_i \in \mathcal{M}_b(D) \}$$

muni de la norme $\|\cdot\|_1$ définie ci-dessus. Le point important est que, si $\mu \in \mathcal{D}'(D, \mathbb{R}^N)$ est une distribution telle que, pour une certaine constante C

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(D, \mathbb{R}^N), \quad | \langle \mu, \varphi \rangle | \leq C \|\varphi\|_{\infty},$$

alors μ est une mesure de Radon de masse totale finie, de même que si,

$$| \langle \mu, \varphi \rangle | \leq C \|\varphi\|_2,$$

alors μ est une fonction de L^2 et de même que, plus généralement, si une distribution est continue pour une certaine norme sur $\mathcal{D}(D, \mathbb{R}^N)$ alors elle

¹³ Johann RADON, 1887-1956, mathématicien autrichien, a enseigné à Vienne, mais aussi dans plusieurs universités allemandes; ses travaux majeurs portent sur la théorie de la mesure et de l'intégration.

s'identifie généralement à un élément du dual du complété de $\mathcal{D}(D, \mathbb{R}^N)$ pour cette norme.

Corollaire 2.3.5 *Etant donné $\Omega \subset D$ mesurable, on a*

$$P_D(\Omega) < +\infty \iff \nabla \chi_\Omega \text{ est une mesure de masse totale finie}$$

avec

$$P_D(\Omega) = \|\nabla \chi_\Omega\|_1$$

(variation totale du gradient de la fonction caractéristique, calculé au sens des distributions dans D).

Remarque Parmi les autres propriétés utiles du périmètre, mentionnons que, pour tout ouvert $D \subset \mathbb{R}^N$,

$$\forall A, B \text{ mesurables, } P_D(A \cup B) + P_D(A \cap B) \leq P_D(A) + P_D(B).$$

Ceci est montré par exemple dans [129]. On utilise que $\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A \cap B}$ et donc, **formellement**,

$$\nabla \chi_{A \cup B} = (1 - \chi_B) \nabla \chi_A + (1 - \chi_A) \nabla \chi_B,$$

$$\Rightarrow |\nabla \chi_{A \cup B}| \leq (1 - \chi_B) |\nabla \chi_A| + (1 - \chi_A) |\nabla \chi_B| \leq |\nabla \chi_A| + |\nabla \chi_B| - |\nabla \chi_{A \cap B}|.$$

Ces expressions ne sont, bien sûr, valables que pour des approximations régulières f_A^n, f_B^n de χ_A, χ_B . Un lemme nécessaire pour le passage à la limite est qu'on peut les choisir de telle façon que $\|\nabla f_A^n\|_1$ converge vers $\|\nabla \chi_A\|_1$ (et de même pour B).

2.3.2 Continuité, compacité

Rappelons tout d'abord quelques résultats de continuité pour le volume et le périmètre, vis-à-vis de la convergence des fonctions caractéristiques. Ces résultats avaient été en partie annoncés plus haut.

Proposition 2.3.6 *Soient Ω_n et Ω des parties mesurables bornées de \mathbb{R}^N .*

- | | | |
|---|-------|--|
| 1) Si $\chi_{\Omega_n} \rightarrow \chi_\Omega$ dans $L^1_{loc}(D)$ | alors | $ \Omega \leq \liminf \Omega_n $ |
| | et | $P_D(\Omega) \leq \liminf P_D(\Omega_n)$. |
| 2) Si $\chi_{\Omega_n} \rightarrow \chi_\Omega$ dans $L^1(D)$ | alors | $ \Omega = \lim \Omega_n $ |
| | et | $P_D(\Omega) \leq \liminf P_D(\Omega_n)$. |

(Le périmètre est donc s.c.i. pour la convergence forte des fonctions caractéristiques).

Démonstration: Pour le volume, 1) résulte simplement du lemme de Fatou¹⁴: l'hypothèse entraîne que pour une suite extraite $\chi_{\Omega_{n_k}} \rightarrow \chi_\Omega$ simplement et donc,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \chi_\Omega = |\omega| \leq \liminf \int_{\mathbb{R}^N} \chi_{\Omega_{n_k}} = \liminf |\Omega_{n_k}|.$$

Quant au 2) il est évident.

Pour le périmètre, si $\varphi \in \mathcal{D}(D; \mathbb{R}^N)$, on a

$$\int_\Omega \operatorname{div}(\varphi) dx = \lim_n \int_{\Omega_n} \operatorname{div}(\varphi) dx \leq$$

$$\liminf_n \left(\sup \left\{ \int_{\Omega_n} \operatorname{div}(\varphi) dx; \|\varphi\|_\infty \leq 1 \right\} \right) = \liminf_n P_D(\Omega_n).$$

D'où l'inégalité en passant au sup à gauche. \square

Remarque 2.3.7 Si $\chi_{\Omega_n} \rightarrow \chi_\Omega$ dans L^1 (convergence faible), on a montré dans la proposition 2.2.1 qu'alors $\chi_{\Omega_n} \rightarrow \chi_\Omega$ dans $L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ et donc le 1) de la proposition 2.3.6 ci-dessus s'applique.

Remarque 2.3.8 Si $\chi_{\Omega_n} \rightarrow \chi_\Omega$ dans $L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$, l'inégalité peut être stricte pour le volume dans 1): prendre le cas d'une boule s'en allant à l'infini.

Enonçons maintenant quelques propriétés importantes de compacité. Rappelons que toute mesure de Radon de $\mathcal{M}_b(D)$ s'étend de façon unique en une forme linéaire continue sur $\mathcal{C}_0(D)$, l'espace des fonctions continues de D dans \mathbb{R}^N qui tendent vers 0 au bord de D au sens où:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists K_\varepsilon \text{ compact } \subset D \text{ tel que } |u| < \varepsilon \text{ en dehors de } K_\varepsilon.$$

Ainsi, $\mathcal{M}_b(D)$ s'identifie au dual de $\mathcal{C}_0(D)$ muni de la norme uniforme, qui est un espace séparable. Il en résulte la compacité séquentielle faible de la boule unité de $\mathcal{M}_b(D)$ pour la topologie faible-* (notée aussi $\sigma(\mathcal{M}_b(D), \mathcal{C}_0(D))$), soit:

Proposition 2.3.9 *Si μ_n est une suite de mesures de Radon sur D telle que $\|\mu_n\|_1 \leq C$, alors il existe une suite extraite μ_{n_k} et $\mu \in \mathcal{M}_b(D)$ telles que $\mu_{n_k} \xrightarrow{*} \mu$ pour la topologie $\sigma(\mathcal{M}_b(D), \mathcal{C}_0(D))$.*

Cette proposition a une application importante aux suites d'ensembles de périmètre borné:

Théorème 2.3.10 *Soit Ω_n une suite de parties mesurables d'un ouvert D de \mathbb{R}^N . On suppose que*

¹⁴ Pierre FATOU, 1878-1929, mathématicien et astronome français qui fait toute sa carrière à l'observatoire de Paris tout en laissant son nom à des travaux sur l'intégration, les séries de Taylor, les fonctions de variables complexes.

$$|\Omega_n| + P_D(\Omega_n) \leq C \quad \text{indépendant de } n.$$

Alors il existe $\Omega \subset D$ mesurable et une suite extraite Ω_{n_k} tels que

$$\chi_{\Omega_{n_k}} \longrightarrow \chi_\Omega \quad \text{dans } L^1_{loc}(D)$$

et

$$\nabla \chi_{\Omega_{n_k}} \xrightarrow{*} \nabla \chi_\Omega \quad \text{dans } \sigma(\mathcal{M}_b(D)^N, C_0(D)^N).$$

De plus, si D est de mesure finie, la convergence de $\chi_{\Omega_{n_k}}$ vers χ_Ω a lieu dans $L^1(D)$.

Pour la démonstration on va utiliser le résultat suivant.

Proposition 2.3.11 *Soit D un ouvert de \mathbb{R}^N et f_n une suite de fonctions de $L^1(D)$ telle que ∇f_n est un N -uplet de mesures de Radon de masse totale finie (i.e. $\nabla f_n \in \mathcal{M}_b(D)^N$) et*

$$\|f_n\|_{L^1} + \|\nabla f_n\|_1 \leq C.$$

Alors il existe $f \in L^1(D)$, avec $\nabla f \in \mathcal{M}_b(D)^N$ et une suite extraite f_{n_k} telle que $f_{n_k} \longrightarrow f$ dans $L^1_{loc}(D)$ et $\nabla f_{n_k} \xrightarrow{*} \nabla f$ pour la topologie faible- $*$ $\sigma(\mathcal{M}_b(D)^N, C_0(D)^N)$.

Remarque 2.3.12 Notons $BV(D) = \{f \in L^1(D); \nabla f \in \mathcal{M}_b(D)^N\}$ qui n'est autre que l'espace des fonctions à variation bornée sur D . Cette proposition exprime donc le fait que l'injection de $BV(D)$ dans $L^1_{loc}(D)$ est compacte.

Remarque 2.3.13 On n'a pas, en général, convergence dans L^1 mais seulement dans L^1_{loc} : si $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ et $f_n(x) = f(x+n)$ alors la suite f_n vérifie les hypothèses de la proposition et $f_n \longrightarrow 0$ dans $L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ mais pas dans $L^1(\mathbb{R}^N)$. De façon plus subtile, même si D est borné, mais à bord non régulier, la compacité n'a pas en général lieu dans L^1 . En revanche, si D est borné avec une frontière lipschitzienne (voir la définition 2.4.5), on peut montrer que l'injection de $BV(D)$ dans $L^1(D)$ est compacte.

Démonstration de la proposition 2.3.11: (cf aussi [257])

D'après la proposition 2.3.9, il existe une sous-suite f_{n_k} et $f \in \mathcal{M}_b(D)$, $\mu \in \mathcal{M}_b(D)^N$ tels que

$$f_{n_k} \xrightarrow{*} f \quad (\text{pour la topologie } \sigma(\mathcal{M}_b(D), C_0(D)))$$

et

$$\nabla f_{n_k} \xrightarrow{*} \mu \quad (\text{pour la topologie } \sigma(\mathcal{M}_b(D)^N, C_0(D)^N)).$$

De plus, puisque $\mathcal{D}(D) \hookrightarrow C_0(D)$, la convergence a lieu aussi au sens des distributions et la dérivation étant continue dans $\mathcal{D}'(D)$ on a $\mu = \nabla f$.

Il reste à montrer la convergence de f_{n_k} vers f dans $L^1_{loc}(D)$. Pour cela, on utilise le critère classique de compacité dans L^1_{loc} , à savoir la continuité uniforme des translations (cf [45]). On a

$$f_n(x+h) - f_n(x) = \int_0^1 \nabla f_n(x+th) \cdot h dt$$

donc sur $D_\varepsilon = \{x \in D / d(x, \partial D) > \varepsilon\}$ et pour $h, |h| < \varepsilon$:

$$\int_{D_\varepsilon} |f_n(x+h) - f_n(x)| dx \leq \int_0^1 dt |h| \int_{D_\varepsilon} |\nabla f_n(x+th)| dx \leq \|\nabla f_n\|_1 |h|,$$

ce qui implique, grâce à la majoration de l'hypothèse

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \sup_n \|f_n(x+h) - f_n(x)\|_{L^1(D_\varepsilon)} \right\} = 0$$

qui est le critère de compacité cherché. \square

Démonstration du théorème 2.3.10: On applique la proposition 2.3.11 avec $f_n = \chi_{\Omega_n}$: on obtient l'existence de $f \in L^1(D)$ telle que $\nabla f \in \mathcal{M}_b(D)^N$ et

$$\chi_{\Omega_{n_k}} \xrightarrow{L^1_{loc}} f$$

et

$$\nabla \chi_{\Omega_{n_k}} \xrightarrow{*} \nabla f.$$

Mais on sait alors que f est une fonction caractéristique, puisque par convergence p.p. d'une suite extraite, $f(1-f) = 0$ p.p. dans D , et donc en posant $\Omega := \{x \in D; f(x) = 1\}$, on a $f = \chi_\Omega$. De plus, comme $\chi_{\Omega_{n_k}} = 0$ en dehors de D , la convergence a lieu dans $L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ et donc si D est de mesure finie, par le théorème de convergence dominée, la convergence a lieu dans $L^1(D)$.

2.4 Suites d'ouverts uniformément réguliers

Les résultats "géométriques" que nous allons présenter ici ont historiquement joué un rôle important pour les théorèmes d'existence en optimisation de formes. Ils reposent sur l'idée que, souvent, on s'attend à ce que les formes optimales soient régulières. Il paraît donc peu restrictif d'imposer a priori des contraintes de régularité sur les ensembles admissibles. L'intérêt, et nous allons le voir ici, est que des hypothèses de régularité uniforme sur les ensembles admissibles assurent généralement une bonne compacité et une "bonne" convergence des suites de tels ensembles. Nous nous intéressons ici au cas d'ouverts uniformément lipschitziens ou, de façon équivalente -et nous allons précisément montrer cette équivalence ici- aux ouverts qui vérifient une condition de cône uniforme, ce qui, pour des questions d'optimisation de forme, est parfois plus commode à utiliser. Ce point de vue est dû, en optimisation de forme, à Denise Chenaïs, cf [77], [78] (voir aussi [6] pour la définition qui suit).

Définition 2.4.1 Soit y un point de \mathbb{R}^N , ξ un vecteur unitaire et ε un réel strictement positif, on appelle cône époinché de sommet y , de direction ξ et de dimensions ε , le cône noté $C(y, \xi, \varepsilon)$ (privé de son sommet) et défini par

$$C(y, \xi, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{R}^N, (z - y, \xi) \geq \cos(\varepsilon)|z - y| \text{ et } 0 < |z - y| < \varepsilon\}.$$

On dit qu'un ouvert Ω a la propriété du ε -cône si

$$\forall x \in \partial\Omega, \exists \xi_x \text{ vecteur unitaire tel que } \forall y \in \overline{\Omega} \cap B(x, \varepsilon) \quad C(y, \xi_x, \varepsilon) \subset \Omega.$$

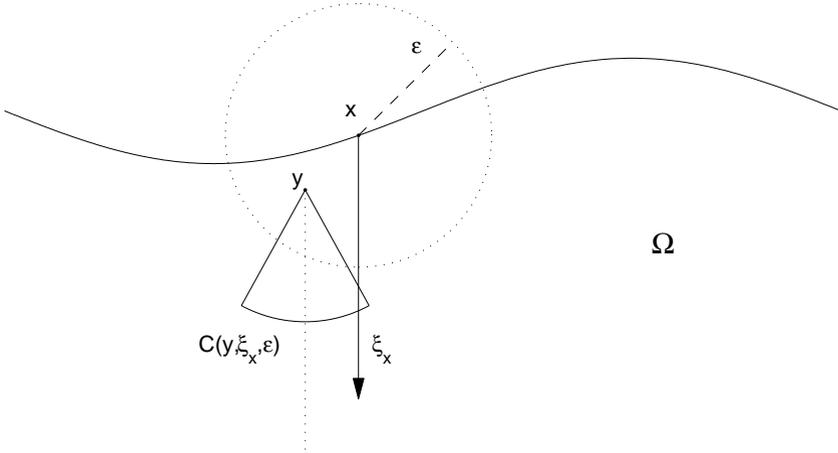


FIG. 2.5 — La propriété du ε -cône

Remarque 2.4.2 Notez dans la définition l'uniformité du choix du cône de direction ξ_x pour *tous* les points y variant dans la boule $B(x, \varepsilon)$. Ainsi, les ouverts suivants *n'ont pas* cette propriété:

- $\mathbb{R}^N \setminus 0, \mathbb{R}^N \setminus \{(x_1, x_2, \dots, x_{N-1}, 0)\}$,
- la réunion de deux boules extérieures l'une à l'autre et tangentes en un point, ou le domaine compris entre deux boules tangentes dont l'une est intérieure à l'autre,
- un ouvert de \mathbb{R}^2 dont la frontière a un point de rebroussement,
- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; xy > 0\}$.

On montre par contre que des ouverts convexes, ou plus généralement étoilés par rapport à une boule, ont la propriété du ε -cône.

Définition 2.4.3 On dit qu'un ouvert Ω est *étoilé* par rapport à un point $x_0 \in \Omega$ si $y \in \Omega$ implique $[x_0, y] \subset \Omega$.

Il est dit *étoilé par rapport à une boule ouverte* $B \subset \Omega$ s'il est étoilé par rapport à chaque point de B . Dans ce cas

$$\forall y \in \overline{\Omega}, \forall z \in B, \{ty + (1 - t)z, 0 \leq t < 1\} \subset \Omega. \tag{2.33}$$

En effet, si $y_n \in \Omega$ converge vers y , le point z_n tel que $ty + (1 - t)z = ty_n + (1 - t)z_n$, soit $z_n = z + t(y - y_n)/(1 - t)$, appartient à B pour n assez grand.

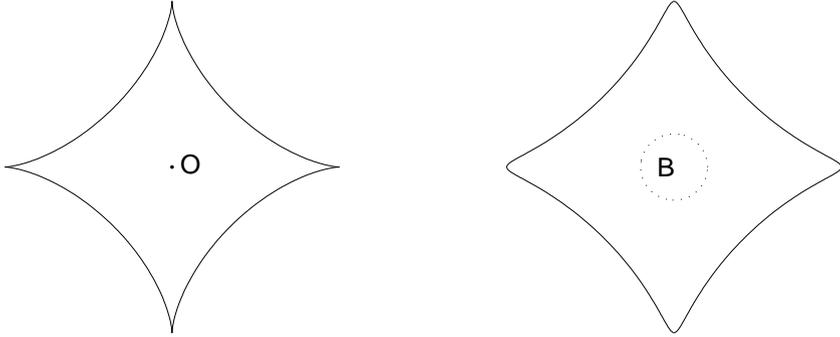


FIG. 2.6 — Un ouvert étoilé (à gauche), un ouvert étoilé par rapport à une boule (à droite)

Proposition 2.4.4 *Un ouvert convexe borné a la propriété du ε -cône. Plus généralement, c'est le cas pour un ouvert borné étoilé par rapport à une boule.*

Démonstration: Un ouvert convexe est clairement étoilé par rapport à toute boule qu'il contient. Il suffit donc de démontrer le 2ème point.

Soit Ω étoilé par rapport à $B(x_0, r) \subset \Omega$. Pour $x \in \partial\Omega$ et $y \in B(x, r/2) \cap \overline{\Omega}$, on introduit le point $z = z(y) = y + x_0 - x \in B(x_0, r/2)$. On a $B(z, r/2) \subset B(x_0, r)$ et donc l'ensemble

$$\mathcal{C} := \{ty + (1 - t)\hat{z}; 0 \leq t < 1, \hat{z} \in B(z, r/2)\},$$

est, d'après (2.33), entièrement contenu dans Ω . Ceci définit une portion de cône de sommet y , de direction $\xi_x = (z - y)/|z - y| = (x_0 - x)/|x_0 - x|$ et de "demi-angle" θ tel que $\sin \theta = r/(2|x_0 - x|)$. Il contient en particulier $C(y, \xi_x, \varepsilon)$ où on définit

$$\varepsilon := \min\{L, \text{Arcsin}(r/(2m))\}, \quad L := d(x_0, \partial\Omega)/2, \quad m := \sup_{x \in \partial\Omega} |x_0 - x|.$$

□

En fait, il s'avère que la propriété du ε -cône pour un ouvert Ω est équivalente au fait qu'il soit à bord lipschitzien. Ceci n'est pas complètement évident et mérite certainement une démonstration. Nous reprenons ici pour l'essentiel celle donnée par D. Chenais [77], [78]. Rappelons d'abord la définition d'un ouvert à bord lipschitzien.

Définition 2.4.5 On dit qu'un ouvert Ω de \mathbb{R}^N est à bord lipschitzien si, pour tout $x_0 \in \partial\Omega$, il existe dans un repère orthonormé local d'origine $x_0 = 0$, un cylindre $K = K' \times]-a, a[$ centré à l'origine, avec K' boule ouverte de $\mathbb{R}^{(N-1)}$ de rayon r , et une fonction $\varphi : K' \rightarrow]-a, a[$ lipschitzienne de rapport L avec $\varphi(0) = 0$ et

$$\begin{aligned} \partial\Omega \cap K &= \{(x', \varphi(x')) ; x' \in K'\}, \\ \Omega \cap K &= \{(x', x_N) \in K ; x_N > \varphi(x')\}. \end{aligned}$$

Remarque 2.4.6 Cette définition exprime que $\partial\Omega$ est, au voisinage de chacun de ses points, le graphe d'une application lipschitzienne et Ω est d'un seul côté de sa frontière. Ceci est à bien différencier de la notion de variété lipschitzienne qui consisterait à dire que, pour tout $x \in \partial\Omega$, il existe un voisinage V de x et une application $\psi : V \rightarrow \mathbb{R}^N$ telle que ψ est injective, ψ et ψ^{-1} sont lipschitziennes $\Omega \cap V = \{x \in V, \psi_N(x) > 0\}$ où on note $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_N)$. Il est facile de voir que la définition 2.4.5 implique celle-ci en posant

$$\psi(x) := (x_1, \dots, x_{N-1}, x_N - \varphi(x')).$$

Par contre la réciproque est fautive (voir un exemple dans [131] où le bord n'est même pas le graphe d'une fonction continue). Noter cependant que, dès que ψ est C^1 dans la définition ci-dessus, alors, d'après le théorème des fonctions implicites, on peut construire φ de classe C^1 satisfaisant aux propriétés de la définition 2.4.5).

Théorème 2.4.7 Un ouvert Ω de frontière bornée a la propriété du ε -cône si et seulement s'il est à bord lipschitzien.

Démonstration: Supposons tout d'abord Ω à bord lipschitzien. Pour $x_0 \in \partial\Omega$, on introduit dans les coordonnées locales de la définition 2.4.5 où $x_0 = 0$,

$$K = K' \times]-a, a[, \varphi : K' \rightarrow]-a, a[$$

avec les mêmes notations. Prenons pour direction du cône en $x_0 = 0$ la direction "verticale": $\xi := e_N$ (N ième vecteur d'une base orthonormée) et posons $\varepsilon = \min(a/2, r/2, \arctan(1/L))$.

Fixons nous un point $y \in \overline{\Omega} \cap B(0, \varepsilon)$, et montrons que le cône $C(y, \xi, \varepsilon)$ est inclus dans Ω . Tout d'abord, grâce au choix de ε , pour tout $z \in C(y, \xi, \varepsilon)$, on a aussi $z \in K$ puisque, si $z = (z', z_N)$

$$\max(|z'|, |z_N|) \leq |z| = |z - x_0| \leq |z - y| + |y - x_0| < 2\varepsilon \leq \min(a, r).$$

De plus, puisque

$$z_N - y_N = (z - y, \xi) > |z - y| \cos \varepsilon,$$

par définition du cône, on en déduit

$$(z_N - y_N)^2 > \cos^2 \varepsilon (|z' - y'|^2 + |z_N - y_N|^2)$$

d'où

$$z_N - y_N = |z_N - y_N| > \frac{1}{\tan \varepsilon} |z' - y'|.$$

On en déduit

$$z_N - \varphi(z') = z_N - y_N + y_N - \varphi(y') + \varphi(y') - \varphi(z') > \frac{1}{\tan \varepsilon} |z' - y'| - L |z' - y'| \geq 0$$

ce qui prouve bien que $z \in \Omega$. Maintenant, grâce à un argument habituel de compacité ($\partial\Omega$ est compact par hypothèse), il est clair qu'on peut choisir un $\varepsilon > 0$ qui convient pour tous les points du bord.

Réciproquement, on suppose maintenant que Ω a la propriété du ε_0 -cône pour un certain $\varepsilon_0 > 0$. Fixons ε tel que $2\varepsilon < \varepsilon_0$, $\tan^2 \varepsilon \leq 1$. Soit $x_0 \in \partial\Omega$ fixé et ξ le vecteur unitaire, direction du cône associé à x_0 . On travaille dans un système de coordonnées locales, avec $x_0 = 0$, $e_N = \xi$ de telle façon que (voir ci-dessus)

$$C(y, \xi, \varepsilon) = \{z \in B(y, \varepsilon), \quad z_N - y_N > \frac{1}{\tan \varepsilon} |z' - y'|\}.$$

Soit $K' := \{y' \in \mathbb{R}^{N-1}; \quad |y'| < \varepsilon \tan \varepsilon\}$ et K le cylindre $K' \times]-\varepsilon, \varepsilon[$. On veut définir le bord de Ω dans K comme un graphe d'une fonction lipschitzienne. Notons que $K \subset B(0, 2\varepsilon)$.

Vérifions tout d'abord que $\partial\Omega$ ne peut pas sortir par la base du cylindre K . Pour cela on va montrer que $C(0, -\xi, 2\varepsilon) \subset \Omega^c$. En effet, soit $z \in C(0, -\xi, 2\varepsilon)$; si on avait $z \in \Omega$, par propriété du 2ε -cône on aurait, puisque $z \in B(0, 2\varepsilon)$, $C(z, \xi, 2\varepsilon) \subset \Omega$; mais comme le point 0 appartient à la fois à ce cône et à Ω^c , on a une contradiction et donc z n'appartient pas à Ω .

Comme aussi le cône $C(0, \xi, 2\varepsilon) \subset \Omega$ (cf Figure 2.7), $\partial\Omega$ est "contraint" de sortir par les bords latéraux du cylindre K . Définissons alors la fonction $\varphi : K' \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$\varphi(y') = \inf\{y_N \in [-\varepsilon, \varepsilon]; (y', y_N) \in \Omega\}$$

(l'ensemble ci-dessus est non vide car $(y', \varepsilon) \in \Omega$ pour tout $y' \in K'$). On vérifie facilement que, pour tout $y' \in K'$

- $-\varepsilon < \varphi(y') < \varepsilon$,
- $(y', \varphi(y')) \in \partial\Omega$,
- $(y', y_N) \in \Omega \cap K \implies \varphi(y') \leq y_N$ par définition, et donc $\varphi(y') < y_N$ d'après la ligne précédente,
- $\varphi(y') < y_N < \varepsilon \implies y = (y', y_N) \in \Omega$: en effet, par la propriété du 2ε -cône appliquée à $(y', \varphi(y')) \in B(0, 2\varepsilon)$, le point (y', y_N) appartient au cône $C((y', \varphi(y')), \xi, 2\varepsilon) \subset \Omega$.

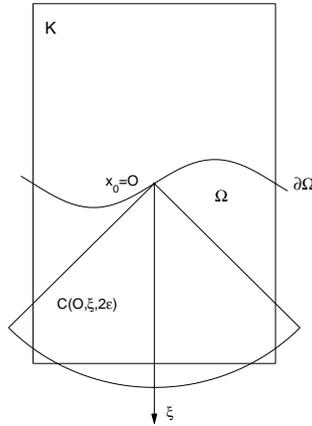


FIG. 2.7 — La propriété du ε -cône

On a donc bien

$$\Omega \cap K = \{(y', y_N) \in K; \quad y_N > \varphi(y')\}.$$

De même, on vérifie que

$$\partial\Omega \cap K = \{(y', \varphi(y'), y' \in K'\},$$

où il reste seulement à vérifier l'inclusion de gauche à droite. Or si $(y', \eta) \in \partial\Omega \cap K$, d'après le 4ème point ci-dessus, on a $\eta \leq \varphi(y')$; mais, $\eta < \varphi(y')$ est impossible, car alors, $(y', \varphi(y')) \in C((y', \eta), \xi, \varepsilon) \subset \Omega$ ce qui est une contradiction.

Il reste à vérifier que φ est lipschitzienne. Soit $y', z' \in K'$. Puisque le point $(z', \varphi(z'))$ appartient à $\partial\Omega$ et n'est donc pas dans Ω , $(z', \varphi(z'))$ ne peut pas appartenir au cône $C((y', \varphi(y')), \xi, \varepsilon)$ qui est inclus dans Ω . Donc

$$\varphi(z') - \varphi(y') \leq \frac{1}{\tan \varepsilon} |z' - y'|$$

et de même symétriquement en échangeant les rôles de y', z' . D'où

$$|\varphi(z') - \varphi(y')| \leq \frac{1}{\tan \varepsilon} |z' - y'|,$$

ce qui prouve que φ est lipschitzienne de rapport $\frac{1}{\tan \varepsilon}$. \square

Remarque 2.4.8 Uniformité des constantes géométriques: Il résulte de la démonstration ci-dessus que, si Ω a la propriété du ε -cône, sa frontière est lipschitzienne au sens de la définition 2.4.5 avec des constantes L, a, r qui ne dépendent que de ε . Inversement, si Ω est à bord lipschitzien avec des constantes L, a, r qui sont uniformes (ce qui est le cas du théorème), alors il a la propriété du ε -cône avec un ε qui ne dépend que de L, a, r .

Remarque 2.4.9 Si Ω est un ouvert à bord lipschitzien, il en est de même de l'extérieur de Ω : $\overline{\Omega}^c$ qui a même bord. On déduit donc du théorème que si Ω est un ouvert à frontière bornée et qui possède la propriété du ε -cône, il en est de même de $\overline{\Omega}^c$.

On se fixe dans toute la suite de ce paragraphe une boule D et un réel $\varepsilon > 0$ et on introduit la classe d'ouverts:

$$\mathcal{O}_\varepsilon = \{ \Omega \text{ ouvert, } \Omega \subset D, \Omega \text{ a la propriété du } \varepsilon\text{-cône} \}. \quad (2.34)$$

Le résultat suivant exprime la compacité de la classe \mathcal{O}_ε pour les différents types de convergence rencontrés précédemment. De plus, les convergences ont lieu de façon "très sympathiques".

Théorème 2.4.10 *Soit Ω_n une suite d'ouverts dans la classe \mathcal{O}_ε . Alors il existe un ouvert $\Omega \in \mathcal{O}_\varepsilon$ et une suite extraite Ω_{n_k} qui converge vers Ω à la fois au sens de Hausdorff, au sens des fonctions caractéristiques et au sens des compacts. De plus, $\overline{\Omega_{n_k}}$ et $\partial\Omega_{n_k}$ convergent au sens de Hausdorff respectivement vers $\overline{\Omega}$ et $\partial\Omega$.*

Démonstration: On sait déjà, d'après les résultats des paragraphes précédents, qu'il existe une suite extraite Ω_{n_k} , un ouvert Ω et $\chi \in L^\infty(D)$ tels que Ω_{n_k} converge au sens de Hausdorff vers Ω et $\chi_{\Omega_{n_k}} \rightharpoonup \chi$ dans L^∞ faible-* avec $\chi_\Omega \leq \chi \leq 1$.

Introduisons à présent, comme d'habitude, les compacts complémentaires $F_n = \overline{D} \setminus \Omega_n$ et $F = \overline{D} \setminus \Omega$. On va supposer que $\rho(\partial D, \partial\Omega) \geq \varepsilon$, ce qui est toujours possible quitte à prendre une boule D de rayon un peu plus gros. On va commencer par montrer que F a la propriété du ε -cône.

Soit $x \in \partial\Omega$, on sait, d'après la proposition 2.2.14, qu'il existe une suite de points $x_n \in \partial\Omega_n$ convergeant vers x . Soit, pour chaque n , ξ_n la direction du cône associé à x_n . Par compacité de la sphère unité et quitte à extraire une nouvelle suite, on peut supposer que ξ_n converge vers un vecteur unitaire ξ . Soit alors $y \in B(x, \varepsilon) \cap F$; par définition de la convergence au sens de Hausdorff, il existe $y_n \in F_n$ convergeant vers y . Comme $|y_n - x_n| \rightarrow |y - x| < \varepsilon$ on a $|y_n - x_n| < \varepsilon$ à partir d'un certain rang. En appliquant alors la propriété du ε -cône à F_n pour y_n , on en déduit

$$C(y_n, \xi_n, \varepsilon) \subset F_n.$$

Mais on sait que l'inclusion est continue pour la convergence de Hausdorff des fermés et comme il est facile de vérifier que $\overline{C}(y_n, \xi_n, \varepsilon)$ converge, à la fois au sens de Hausdorff et au sens des fonctions caractéristiques vers $\overline{C}(y, \xi, \varepsilon)$ on en déduit que

$$C(y, \xi, \varepsilon) \subset \overline{C}(y, \xi, \varepsilon) \subset F$$

ce qui prouve que F (et donc que Ω) possède la propriété du ε -cône.

On va maintenant étudier de plus près χ et montrer que $\chi = 0$ p.p. sur F . Ceci, joint au fait que $\chi = 1$ p.p. sur Ω , prouvera que $\chi = \chi_\Omega$ et on conclura alors à $\chi_{\Omega_{n_k}} \rightarrow \chi_\Omega$ grâce à la proposition 2.2.1.

Soit $x \in \partial\Omega$ et $y \in B(x, \varepsilon) \cap F$. Fixons $\phi \in L^1(D)$ et notons $C_n = C(y_n, \xi_n, \varepsilon)$ et $C = C(y, \xi, \varepsilon)$. Puisque $C_n \subset F_n$ par propriété du ε -cône appliquée à F_n pour n assez grand, on a

$$\int_{C_n} \phi = \int_{C_n} \chi_{F_n} \phi = \int_{C_n} \chi_D \phi - \int_{C_n} \chi_{\Omega_n} \phi.$$

Mais χ_{C_n} converge fortement vers χ_C et $\chi_{\Omega_{n_k}} \rightarrow \chi$ dans L^∞ faible-*. Passant à la limite quand n_k tend vers l'infini dans l'égalité ci-dessus, on obtient:

$$\int_C \phi = \int_C \chi_D \phi - \int_C \chi \phi = \int_C \phi - \int_C \chi \phi$$

c'est-à-dire que, $\forall \phi \in L^1(B)$, $\int_C \chi \phi = 0$ ce qui implique que $\chi = 0$ p.p. sur C , et ceci pour tout $x \in \partial\Omega$ et tout cône $C(y, \xi, \varepsilon)$. En conséquence, $\chi = 0$ p.p. sur $\{y \in F / d(y, \partial\Omega) < \varepsilon\}$.

Pour les autres points y : on considère toujours une suite $y_n \in F_n$ qui converge vers y , et alors

- ou bien il existe une suite extraite y_{n_k} telle que $d(y_{n_k}, \partial\Omega_{n_k}) \geq \varepsilon$ (i.e. $B(y_{n_k}, \varepsilon) \subset F_{n_k}$) et alors on répète l'argument précédent en remplaçant partout C_n par $B(y_{n_k}, \varepsilon)$ pour conclure que $\chi = 0$ p.p. sur $B(y, \varepsilon)$,
- ou bien on a $d(y_n, \partial\Omega_n) < \varepsilon$ pour tout $n \geq n_0$; alors par propriété du ε -cône, il existe $C(y_n, \xi_n, \varepsilon) \subset F_n$ et $C(y_n, \xi_n, \varepsilon) \rightarrow C(y, \xi, \varepsilon)$ (à une suite extraite près). On recommence alors la même démonstration en remplaçant C_n par $C_n \cap \overline{B}$ (puisque $C \cap \overline{B} \subset \overline{B} \setminus \Omega$) pour prouver que $\chi = 0$ p.p. dans un voisinage de y . On en déduit donc que $\chi = 0$ p.p. sur $\{y \in F / d(y, \partial\Omega) \geq \varepsilon\}$.

Pour la convergence au sens des compacts, on procède comme suit (il faut simplement prouver la propriété pour des compacts situés à l'extérieur en vertu de la proposition 2.2.15. Soit L un compact, qu'on peut supposer d'intérieur non vide, inclus dans l'extérieur de Ω et supposons, pour un raisonnement par l'absurde, qu'il existe une suite extraite Ω_{n_k} telle que $L \cap \overline{\Omega}_{n_k} \neq \emptyset$. Alors, il y a deux possibilités:

- ou bien (pour une suite extraite) $L \subset \Omega_{n_k}$, mais alors $|\Omega_{n_k} \setminus \Omega| \geq |L| > 0$, ce qui contredit la convergence au sens des fonctions caractéristiques,
- ou bien $L \cap \partial\Omega_{n_k} \neq \emptyset$. Soit alors une suite de points $x_{n_k} \in L \cap \partial\Omega_{n_k}$ dont on peut supposer qu'elle converge (quitte à extraire une nouvelle sous-suite) vers un point $x \in L$. Par propriété du ε -cône appliqué à chaque x_{n_k} , on a existence d'un cône $C(x_{n_k}, \xi_k, \varepsilon)$ inclus dans Ω_{n_k} . Comme ci-dessus on peut supposer de plus que $C(x_{n_k}, \xi_k, \varepsilon)$ converge au sens de Hausdorff vers $C(x, \xi, \varepsilon)$ qui, par continuité de l'inclusion pour la convergence de Hausdorff, est donc un cône inclus dans Ω , ce qui est une contradiction avec le fait que $x \in L \subset \overline{\Omega}^c$.

Exercices

Exercice 2.1 Dans \mathbb{R} on considère la suite d'ouverts définis par

$$\Omega_n := \bigcup_{k=0}^{2^n-1} \left] \frac{2k}{2^n}, \frac{2k+1}{2^n} \right[.$$

Montrer que la suite $f_n = \chi_{\Omega_n}$ converge faiblement dans $L^p(0,1)$, pour tout $1 \leq p \leq \infty$, vers la fonction constante égale à $1/2$. Quelle est la limite de Ω_n au sens de Hausdorff et au sens des compacts?

Exercice 2.2 La fonction volume est-elle continue pour les trois types de convergence vus dans ce chapitre? Même question pour le diamètre.

Exercice 2.3 On suppose qu'une suite d'ouverts Ω_n converge au sens des compacts vers un ouvert Ω . Cela entraîne-t-il que:

$$\forall x \in \partial\Omega \quad d(x, \partial\Omega_n) \rightarrow 0?$$

Même question pour la convergence au sens des fonctions caractéristiques et la convergence de Hausdorff.

Exercice 2.4 Cet exercice est inspiré de [170].

1) Montrer par un exemple que la convergence de Hausdorff d'une suite d'ouverts Ω_n (resp. de fermés F_n) vers un ouvert Ω (resp. un fermé F) n'entraîne pas en général la convergence au sens de Hausdorff du bord de Ω_n vers le bord de Ω .

2) Soit K_n une suite de compacts qui converge au sens de Hausdorff vers un compact K . Montrer que ∂K_n possède au moins un point d'accumulation (au sens de la convergence de Hausdorff) et que tout point d'accumulation F satisfait

$$\partial K \subset F \subset K.$$

3) Soit K un compact et Γ son bord. On note, pour tout réel positif δ , $B_\delta(K)$ l'ensemble des points de \mathbb{R}^N situés à une distance strictement inférieure à δ de K . On introduit alors les fonctions:

$$g_K(x, \delta) := d(x, \mathbb{R}^N \setminus B_\delta(K)), \quad g_K(\delta) := \sup_{x \in \Gamma} g_K(x, \delta).$$

Montrer les propriétés suivantes:

A : $g_K(0) = 0$; B : g_K est une fonction strictement croissante; C : $g_K(\delta) \geq \delta$,

D : $g_K(\delta)$ est égal à la distance de Hausdorff de Γ au bord de l'ensemble $B_\delta(K)$. Soit \mathcal{K} une famille de compacts de \mathbb{R}^N , on définit la fonction $g_{\mathcal{K}}$ par

$$g_{\mathcal{K}} = \sup_{K \in \mathcal{K}} g_K(\delta).$$

4) Montrer que $g_{\mathcal{K}}$ est continue à droite en 0 si et seulement si, pour toute suite de compacts K_n de compacts dans \mathcal{K} , on a

$$K_n \xrightarrow{H} K \implies \Gamma_n \xrightarrow{H} \Gamma.$$

Exercice 2.5 Montrer que l'enveloppe convexe d'un compact est compact. Soit K_n une suite de compacts convergeant au sens de Hausdorff vers le compact K . Prouver que l'enveloppe convexe de K_n converge au sens de Hausdorff vers l'enveloppe convexe de K .

Exercice 2.6 Montrer que, si Ω_n est une suite d'ouverts qui converge au sens des compacts vers un ouvert Ω et au sens de Hausdorff vers $\tilde{\Omega}$, alors $\Omega \subset \tilde{\Omega} \subset \overline{\Omega}$. En déduire que, si Ω_n est une suite d'ouverts confinés qui converge au sens des compacts vers un ouvert Ω de Carathéodory (i.e. $\partial\Omega = \partial\overline{\Omega}$), alors Ω_n converge au sens de Hausdorff vers Ω .

De même, montrer que, si Ω_n est une suite d'ouverts confinés qui converge au sens des compacts vers un ouvert Ω et au sens des fonctions caractéristiques vers $\tilde{\Omega}$, alors $\Omega \subset \overline{\tilde{\Omega}}$ et $\tilde{\Omega} \subset \overline{\Omega}$.

Exercice 2.7 Montrer que, si la suite Ω_n converge au sens des compacts vers Ω et si le bord de Ω est de mesure nulle, alors la suite Ω_n converge aussi au sens des fonctions caractéristiques.

Exercice 2.8 On désigne par \mathcal{O} l'ensemble des ouverts de \mathbb{R}^N . Pour chaque couple de compacts (K, L) de \mathbb{R}^N , on note

$$\mathcal{V}_{K,L} := \{\omega \in \mathcal{O}; K \subset \omega, L \subset \omega^c\}.$$

1. Montrer que la famille $\{\mathcal{V}_{K,L}; K, L \text{ compacts de } \mathbb{R}^N\}$, est stable par intersection finie et est donc une base d'ouverts sur \mathcal{O} : on note τ la topologie engendrée.
2. Montrer que la convergence d'une suite d'ouverts pour cette topologie coïncide avec la convergence au sens des compacts.
3. Etant donné un ouvert Ω de \mathbb{R}^N , déterminer l'intersection de tous les $\mathcal{V}_{K,L}$ contenant Ω . En déduire que la topologie τ n'est pas séparée.
4. Soient Ω et $\tilde{\Omega}$ deux ouverts qui sont limites d'une même suite d'ouverts au sens de τ : montrer qu'alors ils ont même adhérence.
5. Soient Ω_1, Ω_2 deux ouverts tels que $\overline{\Omega}_1 \neq \overline{\Omega}_2$. Montrer qu'il existe deux τ -ouverts $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2$ tels que

$$\Omega_1 \in \mathcal{V}_1, \Omega_2 \in \mathcal{V}_2, \mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2 = \emptyset.$$

6. Soit $\mathcal{O}_{\mathcal{Q}}$ l'espace quotient de \mathcal{O} par la relation d'équivalence

$$\Omega_1 \simeq \Omega_2 \iff \overline{\Omega}_1 = \overline{\Omega}_2.$$

Montrer que $\mathcal{O}_{\mathcal{Q}}$ muni de la topologie quotient de τ est séparé.

Exercice 2.9 Soit f_n et f des fonctions continues sur \mathbb{R}^N et considérons les ouverts, inclus dans une grande boule fermée B et définis par

$$\Omega_n = \{x \in B, f_n(x) > 0\} \quad \text{et} \quad \Omega = \{x \in B, f(x) > 0\}.$$

Nous supposons dans la suite que les ouverts Ω_n sont non vides. On veut démontrer le résultat de compacité suivant:

Proposition 2.4.11 *On suppose les fonctions f_n de classe C^2 sur B avec, de plus*

- (i) $\forall x \in B, \forall n \in \mathbb{N}, \forall i, j \quad \left| \frac{\partial f_n}{\partial x_i}(x) \right| \leq M$ et $\left| \frac{\partial^2 f_n}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right| \leq M$
(ii) $\forall x \in B, \forall n \in \mathbb{N}, \quad |f_n(x)| + |\nabla f_n(x)| \geq \alpha.$

Alors on peut extraire de la suite Ω_n une sous-suite qui converge au sens des compacts vers un ouvert $\Omega \subset B$.

- 1) Montrer tout d'abord le lemme: On suppose que $\partial\Omega = \{x \in \mathbb{R}^N / f(x) = 0\}$ alors, si f_n converge uniformément vers f sur B , on a $\Omega_n \xrightarrow{K} \Omega$.
2) En déduire la proposition.

Exercice 2.10 On note Σ l'espace quotient de l'ensemble des parties (Lebesgue)-mesurables de \mathbb{R}^N par la relation d'équivalence:

$$E_1 \sim E_2 \iff \chi_{E_1} = \chi_{E_2} \text{ p.p.}$$

1. Vérifier que

$$\delta(E_1, E_2) := \text{Arctg}\left(|E_1 \Delta E_2|\right)$$

définit bien une distance sur Σ .

2. Etant donné $(E_n)_{n \geq 1}, E$ des ensembles mesurables de \mathbb{R}^N , montrer l'équivalence des trois propriétés suivantes:

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta(E_n, E) \rightarrow 0 \\ \chi_{\Omega_n} - \chi_E \xrightarrow{\sigma(L^1(\mathbb{R}^N), L^\infty(\mathbb{R}^N))} 0 \\ \chi_{E_n} - \chi_E \xrightarrow{L^1(\mathbb{R}^N)} 0. \end{array} \right. \quad (2.35)$$

3. Prouver que Σ muni de cette distance est complet.
4. Soit $(f_n)_{n \geq 1}$ une suite de fonctions intégrables de \mathbb{R}^N dans \mathbb{R} telles que, pour tout ensemble mesurable E de \mathbb{R}^N

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n \text{ existe.} \quad (2.36)$$

Montrer qu'alors (uniforme intégrabilité locale des f_n)

$$\sup_n \int_E |f_n| \rightarrow 0 \text{ quand } |E| \rightarrow 0. \quad (2.37)$$

Indication: utiliser la propriété de Baire de (Σ, δ) .

5. Si la suite f_n converge faiblement dans $L^1(\mathbb{R}^N)$, la propriété (2.36) est satisfaite. Montrer que (2.37) reste satisfaite si f_n est une suite relativement faiblement compacte dans $L^1(\mathbb{R}^N)$.

6. Vérifier que toutes ces propriétés sont encore vraies si on remplace \mathbb{R}^N muni de la mesure de Lebesgue par un espace mesuré σ -fini quelconque.

Exercice 2.11 Avec les notations du paragraphe 2.4, prouver que, si y_n converge vers y et si ξ_n converge vers ξ sur la sphère unité, alors $C(y_n, \xi_n, \varepsilon)$ converge, à la fois au sens de Hausdorff et au sens des fonctions caractéristiques vers $C(y, \xi, \varepsilon)$.

Exercice 2.12 Soit Ω_n une suite d'ouverts possédant la propriété du ε -cône qui converge vers Ω . Montrer que

$$\overline{\Omega_n} \xrightarrow{H} \overline{\Omega} \text{ et } \partial\Omega_n \xrightarrow{H} \partial\Omega.$$