

Inhaltsverzeichnis

<i>Kapitel I. σ-Algebren und Borelsche Mengen</i>	1
§1. Das Inhaltsproblem und das Maßproblem	1
§2. Bezeichnungen und mengentheoretische Grundlagen	6
1. Bezeichnungen	6
2. Limes superior und Limes inferior	8
Aufgaben	10
§3. Ringe, Algebren, σ -Ringe und σ -Algebren	11
1. Ringstruktur von $\mathfrak{P}(X)$	11
2. Ringe und Algebren	12
3. σ -Ringe und σ -Algebren	13
Aufgaben	15
§4. Erzeuger und Borelsche Mengen	16
1. Erzeuger	16
2. Borelsche Mengen	17
3. Verhalten unter Abbildungen	19
Aufgaben	20
§5. Halbringe	20
1. Halbringe	20
2. Der von einem Halbring erzeugte Ring	22
Aufgaben	22
§6. Monotone Klassen und Dynkin-Systeme	23
1. Monotone Klassen	23
2. Dynkin-Systeme	24
Aufgaben	26
<i>Kapitel II. Inhalte und Maße</i>	27
§1. Inhalte, Prämaße und Maße	27
1. Definitionen und erste Folgerungen	27
2. Ein erster Fortsetzungssatz	30
3. Eigenschaften von Inhalten	31
4. Charakterisierung der σ -Additivität	32
5. Historische Anmerkungen	33
Aufgaben	34
§2. Inhalte und Prämaße auf \mathbb{R}	37
1. Endliche Inhalte auf \mathfrak{I}	37
2. Endliche Prämaße auf \mathfrak{I}	38
3. Kurzbiographie von É. BOREL	41
Aufgaben	42

§3.	Inhalte und Prämaße auf \mathbb{R}^p	43
1.	Das Lebesguesche Prämaß auf \mathcal{J}^p	43
2.	Differenzenoperatoren	44
3.	Inhalte auf \mathcal{J}^p	45
4.	Prämaße auf \mathcal{J}^p	47
5.	Kurzbiographie von J. RADON	48
	Aufgaben	49
§4.	Fortsetzung von Prämaßen zu Maßen	50
1.	Äußere Maße	50
2.	Der Fortsetzungssatz	53
3.	Die Lebesgue-meßbaren Teilmengen des \mathbb{R}^p	55
4.	Kurzbiographie von C. CARATHÉODORY	56
	Aufgaben	57
§5.	Eindeutigkeit der Fortsetzung	59
1.	σ -endliche Inhalte	59
2.	Der Eindeutigkeitssatz	60
3.	Wahrscheinlichkeitsmaße und Verteilungsfunktionen auf \mathbb{R}	61
	Aufgaben	62
§6.	Vollständige Maßräume	63
	Aufgaben	65
§7.	Das Lebesguesche Maß	66
1.	Approximationssätze	66
2.	Charakterisierung der Lebesgue-Meßbarkeit	67
3.	Der Satz von H. STEINHAUS	67
4.	Meßbarkeit konvexer Mengen	68
	Aufgaben	69
§8.	Das Cantorsche Diskontinuum	70
1.	Konstruktion von C	70
2.	Triadische Entwicklung	71
3.	Mächtigkeiten von \mathfrak{B}^p und \mathfrak{L}^p	73
4.	Die Cantorsche Funktion	73
	Aufgaben	74
§9.	Metrische äußere Maße und Hausdorff-Maße	76
1.	Metrische äußere Maße	76
2.	Hausdorff-Maße	77
3.	Rektifizierbare Kurven	78
4.	Kurzbiographie von F. HAUSDORFF	80
	Aufgaben	81

Inhaltsverzeichnis	xi
<i>Kapitel III. Meßbare Funktionen</i>	83
§1. Meßbare Abbildungen und Bildmaße	85
1. Meßbare Abbildungen	85
2. Bildmaße	87
Aufgaben	88
§2. Bewegungsinvarianz des Lebesgue-Maßes	89
1. Translationsinvarianz des Lebesgue-Maßes	89
2. Das Bildmaß des Lebesgue-Maßes unter bijektiven affinen Abbildungen	90
3. Bewegungsinvarianz des Lebesgue-Maßes	92
4. Das p -dimensionale äußere Hausdorff-Maß	94
Aufgaben	95
§3. Existenz nicht meßbarer Mengen	96
1. Nicht Lebesgue-meßbare Mengen und Unlösbarkeit des Maßproblems	96
2. Kurzbiographie von G. VITALI	99
3. Weitere Beispiele nicht Lebesgue-meßbarer Mengen	99
4. Existenz nicht meßbarer Mengen für Lebesgue–Stieltjessche Maße	100
Aufgaben	102
§4. Meßbare numerische Funktionen	103
1. Rechnen in $\overline{\mathbb{R}}$, Topologie von $\overline{\mathbb{R}}$	103
2. Meßbare numerische Funktionen	105
3. Approximation durch Treppenfunktionen	107
4. Abzählbar erzeugte Meßräume	108
5. Ein minimaler Erzeuger von \mathfrak{B}^1	109
Aufgaben	110
§5. Produkt- σ -Algebren	112
1. Initial- σ -Algebren und Produkt- σ -Algebren	112
2. Borel-Mengen topologischer Produkte	114
3. Meßbarkeit der Diagonalen	115
Aufgaben	116
<i>Kapitel IV. Das Lebesgue-Integral</i>	118
§1. Integration von Treppenfunktionen	119
Aufgaben	120
§2. Integration nicht-negativer meßbarer Funktionen	121
1. Definition des Integrals	121
2. Der Satz von der monotonen Konvergenz	124
3. Kurzbiographie von B. LEVI	125
4. Maße mit Dichten	125
Aufgaben	126

§3.	Integrierbare Funktionen	127
1.	Integrierbare Funktionen	127
2.	Linearität und Monotonie des Integrals	129
3.	Der Raum \mathcal{L}^1	131
4.	Stetige Funktionen mit kompaktem Träger	132
5.	Integration über meßbare Teilmengen	133
6.	Historische Anmerkungen	135
7.	Kurzbiographie von W.H. YOUNG	136
	Aufgaben	137
§4.	Fast überall bestehende Eigenschaften	138
	Aufgaben	141
§5.	Konvergenzsätze	142
1.	Das Lemma von FATOU	142
2.	Kurzbiographie von P. FATOU	143
3.	Der Satz von der majorisierten Konvergenz	143
4.	Von einem Parameter abhängige Integrale	145
5.	Der Satz von SCHEFFÉ	148
	Aufgaben	149
§6.	Riemann-Integral und Lebesgue-Integral	149
1.	Eigentliches Riemann-Integral und Lebesgue-Integral	150
2.	Uneigentliches Riemann-Integral und Lebesgue-Integral	151
3.	Mittelwertsätze der Integralrechnung	154
4.	Kurzbiographie von H. LEBESGUE	156
	Aufgaben	158
<i>Kapitel V. Produktmaße, Satz von FUBINI und Transformationsformel</i>		161
§1.	Produktmaße	161
1.	Produkt- σ -Algebren	162
2.	Produktmaße	162
3.	Das Cavalierische Prinzip	167
4.	Produkte endlich vieler Maßräume	168
5.	Das p -dimensionale äußere Hausdorff-Maß	169
	Aufgaben	171
§2.	Der Satz von FUBINI	173
1.	Der Satz von FUBINI	173
2.	Historische Anmerkungen	178
3.	Beispiele für Anwendungen des Satzes von FUBINI	179
4.	Der Gaußsche Integralsatz für die Ebene	182
5.	Kurzbiographien von G. FUBINI und L. TONELLI	185
	Aufgaben	186

§3.	Faltung und Fourier-Transformation	189
1.	Integration in bezug auf Bildmaße	189
2.	Transformation von Maßen mit Dichten	190
3.	Die Faltung auf $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^p, \mathfrak{B}^p, \beta^p)$	191
4.	Die Fourier-Transformation	193
	Aufgaben	198
§4.	Die Transformationsformel	199
1.	Die Transformationsformel	200
2.	Der Satz von SARD	207
3.	Verallgemeinerte Transformationsformel	209
4.	Transformation von Maßen mit Dichten bez. λ^p	209
5.	Der Brouwersche Fixpunktsatz	211
	Aufgaben	214
<i>Kapitel VI. Konvergenzbegriffe der Maß- und Integrationstheorie</i>		218
1.	Die Ungleichungen von JENSEN, HÖLDER und MINKOWSKI	218
1.	Die Jensensche Ungleichung	219
2.	Die Höldersche Ungleichung	221
3.	Die Minkowskische Ungleichung	223
4.	Historische Anmerkungen	224
	Aufgaben	225
§2.	Die Räume L^p und der Satz von RIESZ-FISCHER	227
1.	Die Räume \mathcal{L}^p und L^p	228
2.	Der Satz von RIESZ-FISCHER	229
3.	Die Banach-Algebra $L^1(\mathbb{R}^n, \mathfrak{B}^n, \beta^n)$	232
4.	Der Hilbert-Raum $L^2(\mu)$	233
5.	Der Banach-Verband $L^p_{\mathbb{R}}$	238
6.	Dichte Unterräume von L^p	240
7.	Der Satz von PLANCHEREL	242
8.	Der Satz von FATOU über Potenzreihen	242
9.	Historische Anmerkungen	243
10.	Kurzbiographien von F. RIESZ und E. FISCHER	244
	Aufgaben	246
§3.	Der Satz von JEGOROW	248
1.	Konvergenz μ -fast überall	248
2.	Fast gleichmäßige Konvergenz	249
3.	Kurzbiographie von D.F. JEGOROW	250
	Aufgaben	251

§4.	Konvergenz nach Maß	252
1.	Konvergenz nach Maß und lokal nach Maß	252
2.	Cauchy-Folgen für die Konvergenz nach Maß	253
3.	Vergleich der Konvergenzbegriffe	255
4.	Charakterisierung der Konvergenz n.M. und der Konvergenz lokal n.M.	256
	Aufgaben	257
§5.	Konvergenz in \mathcal{L}^p	258
1.	Der Satz von PRATT	258
2.	Konvergenz in \mathcal{L}^p	259
3.	Der Konvergenzsatz von VITALI	260
4.	Schwache Konvergenz in \mathcal{L}^p	261
	Aufgaben	265
	<i>Kapitel VII. Absolute Stetigkeit</i>	267
§1.	Signierte Maße; Hahnscher und Jordanscher Zerlegungssatz	267
1.	Signierte Maße	267
2.	Der Hahnsche Zerlegungssatz	269
3.	Positive Variation, negative Variation und Variation	270
4.	Jordanscher Zerlegungssatz	271
5.	Der Banach-Verband der endlichen signierten Maße	272
6.	Kurzbiographie von H. HAHN	273
	Aufgaben	274
2.	Der Satz von RADON-NIKODÝM und der Lebesguesche Zerlegungssatz	277
1.	Absolute Stetigkeit	277
2.	Der Satz von RADON-NIKODÝM	277
3.	Kurzbiographie von O. NIKODÝM	282
4.	Der Lebesguesche Zerlegungssatz	283
	Aufgaben	285
§3.	Der Dualraum von $L^p(1 \leq p < \infty)$	286
1.	Der Dualraum von $L^p(\mu)$ ($1 \leq p < \infty$)	286
2.	Die multiplikativen Linearformen auf der Banach-Algebra $L^1(\mu_m)$	291
	Aufgaben	292
§4.	Absolut stetige Funktionen auf \mathbb{R}	294
1.	Der Überdeckungssatz von VITALI	294
2.	Differenzierbarkeit monotoner Funktionen λ -f.ü.	296
3.	Der Dichtesatz	299
4.	Absolut stetige Funktionen auf \mathbb{R}	300
5.	Lebesguesche Zerlegung Lebesgue-Stieltjesscher Maße	304
6.	Rektifizierbare Kurven	306
	Aufgaben	307

<i>Kapitel VIII. Maße auf topologischen Räumen</i>	309
§1. Borel-Maße, Radon-Maße, Regularität	310
1. Grundbegriffe	310
2. Regularitätssätze	314
3. Moderate Borel-Maße	315
4. Regularität von Borel-Maßen	316
5. Regularität von Borel-Maßen auf polnischen Räumen	317
6. Der Satz von LUSIN	320
7. Kurzbiographie von N.N. LUSIN	321
Aufgaben	324
§2. Der Darstellungssatz von F. RIESZ	325
1. Problemstellung	325
2. Fortsetzungssatz	326
3. Der Darstellungssatz von F. RIESZ für lokal-kompakte Räume	331
4. Der Darstellungssatz von F. RIESZ für vollständig reguläre Räume	335
5. Träger von Maßen	339
6. Der Darstellungssatz von F. RIESZ für stetige Linearformen auf $C_0(X)$	342
Aufgaben	346
§3. Das Haarsche Maß	348
1. Topologische Gruppen	348
2. Linksinvariante Linearformen und Maße	351
3. Existenz und Eindeutigkeit des Haarschen Maßes	353
4. Anwendungen des Haar-Maßes	362
5. Invariante und relativ invariante Maße auf Restklassenräumen	365
6. Kurzbiographie von A. HAAR	372
Aufgaben	373
<i>Anhang A. Topologische Räume</i>	376
<i>Anhang B. Transfinite Induktion</i>	380
<i>Literaturverzeichnis</i>	383
<i>Namenverzeichnis</i>	389
<i>Symbolverzeichnis</i>	394
<i>Sachverzeichnis</i>	395