5 Schwingungen

5.1 Grundbegriffe

In der Natur und in der Technik unterliegt häufig eine Zustandsgröße $x = x(t)$ – wie z.B. die Lage eines Körpers – mehr oder weniger regelmäßigen zeitlichen Schwankungen. Solche Vorgänge heißen *Schwingungen*. Als Beispiele seien der Wellengang der See, die Bewegung eines Kolbens in einem Motor und die Schwingung in einem elektrischen Stromkreis genannt. Entsprechende Erscheinungen treten in vielen Bereichen unserer Umwelt auf. Wir wollen im folgenden eine Einführung in die Schwingungslehre *mechanischer* Systeme geben. Solche Systeme bezeichnet man kurz auch als *Schwinger*.

Bei vielen Bewegungen wiederholt sich der Verlauf einer Größe $x(t)$ jeweils nach einer Zeit T (Abb. 5.1):

$$x(t+T) = x(t)\,. \tag{5.1}$$

Diese Vorgänge werden *periodische Schwingungen* genannt. Die Zeit T heißt *Periode* der Schwingung oder *Schwingungsdauer*. Ihr reziproker Wert

$$\boxed{f = \frac{1}{T}} \tag{5.2}$$

ist die *Frequenz* der Schwingung. Sie gibt die Zahl der Schwingungen pro Zeiteinheit an. Die Dimension der Frequenz ist 1/Zeit; ihre Einheit wird nach Hertz (1857–1894) benannt und mit Hz abgekürzt: $1\mathrm{Hz} = 1/\mathrm{s}$.

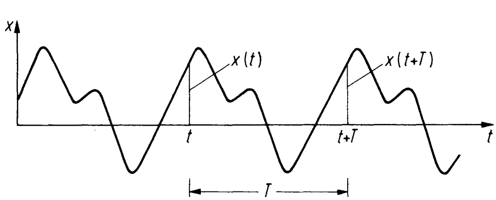

Abb. 5.1

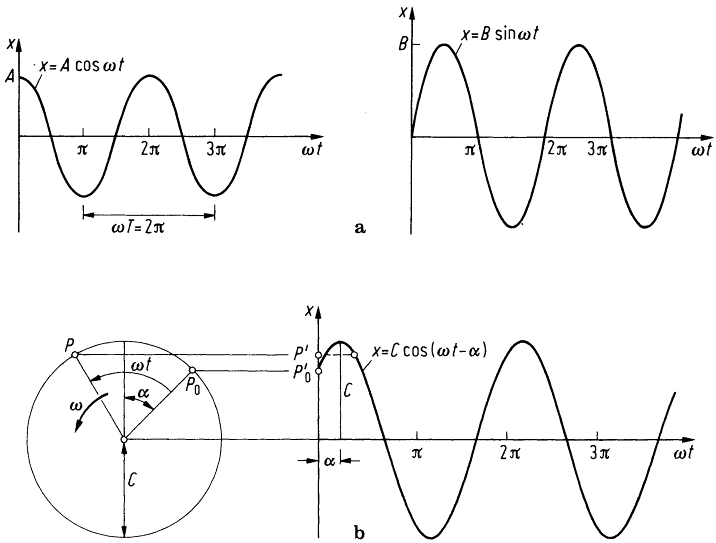

Abb. 5.2

Ein wichtiger Sonderfall der periodischen Schwingungen sind die *harmonischen Schwingungen*; bei ihnen ändert sich eine Größe $x(t)$ kosinus- bzw. sinusförmig (Abb. 5.2a):

$$x\,(t) = A\cos\omega t \quad \text{bzw.} \quad x\,(t) = B\sin\omega t\,. \tag{5.3}$$

Dabei nennt man A bzw. B die *Amplitude* der Schwingung und ω die *Kreisfrequenz*. Wegen $\omega T = 2\,\pi$ (vgl. Abb. 5.2a) und $f = 1/T$ besteht zwischen der Kreisfrequenz ω und der Frequenz f der Zusammenhang

$$\boxed{\omega = \frac{2\,\pi}{T} = 2\,\pi\,f}\,. \tag{5.4}$$

Der reinen Kosinus- bzw. der reinen Sinusschwingung sind spezielle *Anfangsbedingungen* zugeordnet. So gilt für $x\,(t) = A\cos\omega t$ zum Zeitpunkt $t = 0 : x\,(0) = A$; $\dot{x}\,(0) = 0$. Entsprechend sind bei einer reinen Sinusschwingung $x\,(0) = 0$ und $\dot{x}\,(0) = B\omega$. Harmonische Schwingungen bei *beliebigen* Anfangsbedingungen lassen sich immer durch

$$x\,(t) = C\cos\left(\omega t - \alpha\right) \tag{5.5}$$

darstellen. Darin sind C die *Amplitude* und α die *Phasenverschiebung* (vgl. Abb.5.2b).

Man kann die harmonischen Schwingungen (5.5) auch durch eine Überlagerung der beiden Schwingungen (5.3) erhalten. Mit der Umformung

$$x\,(t) = C\cos\,(\omega t - \alpha) = C\cos\omega t\cos\alpha + C\sin\omega t\sin\alpha \quad (5.6)$$

und den Abkürzungen

$$A = C\cos\alpha, \quad B = C\sin\alpha \quad (5.7)$$

folgt

$$x\,(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t\,. \quad (5.8)$$

Die beiden Darstellungen (5.5) und (5.8) sind demnach gleichwertig und lassen sich ineinander überführen. So erhält man A und B aus C und α nach (5.7). Andererseits liefert Auflösen dieser Gleichungen nach C und α

$$C = \sqrt{A^2 + B^2}, \quad \alpha = \arctan\frac{B}{A}\,. \quad (5.9)$$

Eine harmonische Schwingung lässt sich durch die Bewegung eines Punktes auf einer Kreisbahn erzeugen. Wenn ein Punkt P (Ausgangslage P_0) auf einem Kreis (Radius C) mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω umläuft (vgl. Abb. 5.2b), so führt seine Projektion P' auf die Vertikale eine harmonische Schwingung aus. Ihr zeitlicher Verlauf ist in der Abbildung dargestellt.

Schwingungen mit konstanter Amplitude heißen *ungedämpfte* Schwingungen. Nimmt die Amplitude mit der Zeit ab (Abb. 5.3a), so spricht man von einer *gedämpften* Schwingung, während eine Schwingung mit wachsender Amplitude *angefacht* genannt wird (Abb. 5.3b).

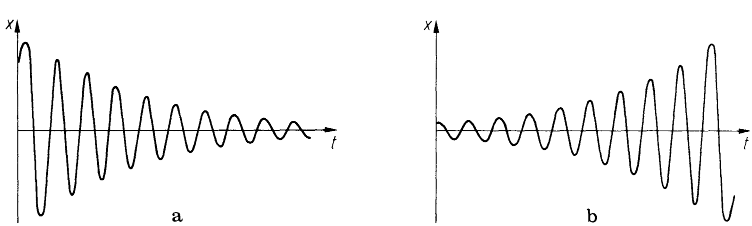

Abb. 5.3

Es gibt mehrere Möglichkeiten, Schwingungen zu klassifizieren. So kann man zum Beispiel die Zahl der Freiheitsgrade eines schwingenden Systems als typisches Kennzeichen wählen. Dies führt zu einer Einteilung in Schwinger mit einem, zwei ... (allgemein: n) Freiheitsgraden. Wir wollen uns auf Systeme mit einem bzw. mit zwei Freiheitsgraden beschränken. Damit lassen sich bereits die wesentlichen Erscheinungen bei Schwingungen beschreiben.

Man kann Schwingungen auch nach den Typen der Differentialgleichungen charakterisieren, welche die Bewegungen des Systems beschreiben. So spricht man bei linearen (nichtlinearen) Differentialgleichungen auch von linearen (nichtlinearen) Schwingungen.

Eine dritte Einteilung geht von dem Entstehungsmechanismus der Schwingung aus. Wir befassen uns nur mit zwei Fällen: den freien Schwingungen und den erzwungenen Schwingungen. *Freie Schwingungen* oder *Eigenschwingungen* sind die Bewegungen eines Schwingers, auf den keine äußeren Erregerkräfte wirken (der Schwinger wird sich selbst überlassen), während *erzwungene Schwingungen* gerade unter dem Einfluss äußerer Kräfte entstehen.

5.2 Freie Schwingungen

In den folgenden Abschnitten untersuchen wir lineare Schwingungen von Systemen mit *einem* Freiheitsgrad. Solche Systeme heißen auch *einfache Schwinger*.

5.2.1 Ungedämpfte freie Schwingungen

Wir wollen uns zunächst auf die Behandlung ungedämpfter Schwingungen beschränken. Als Beispiel betrachten wir eine reibungsfrei geführte Masse m mit einer Feder der Federsteifigkeit c (Abb. 5.4a). Zur Ermittlung der Bewegungsgleichung führen wir die von der Ruhelage (entspannte Feder) gezählte Koordinate x nach Abb. 5.4b ein. Die einzige in horizontaler Richtung wirkende Kraft ist die Federkraft $c\,x$. Sie ist eine

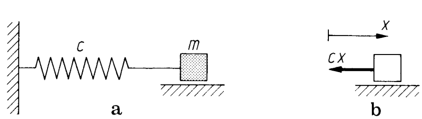

Abb. 5.4

Rückstellkraft, die der Auslenkung aus der Ruhelage entgegenwirkt. Damit liefert das Newtonsche Grundgesetz (1.38)

$$\rightarrow: \quad m\ddot{x} = -c\,x \quad \rightarrow \quad m\ddot{x} + c\,x = 0. \tag{5.10}$$

Mit der Abkürzung

$$\omega^2 = \frac{c}{m} \tag{5.11}$$

folgt daraus

$$\boxed{\ddot{x} + \omega^2\,x = 0}\,. \tag{5.12}$$

Dies ist eine lineare, homogene Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Ihre allgemeine Lösung lautet

$$x\,(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t \tag{5.13}$$

mit den Integrationskonstanten A und B. Sie können aus den Anfangsbedingungen $x\,(0) = x_0$ und $\dot{x}\,(0) = v_0$ ermittelt werden. Man erhält

$$A = x_0 \quad \text{und} \quad B = \frac{v_0}{\omega}, \tag{5.14}$$

und damit wird aus (5.13)

$$x\,(t) = x_0\cos\omega t + \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t\,. \tag{5.15}$$

Nach Abschnitt 5.1 ist die allgemeine Lösung (5.13) gleichwertig mit

$$x\,(t) = C\cos\,(\omega t - \alpha), \tag{5.16}$$

wobei nun C und α die Integrationskonstanten sind. Sie können ebenfalls aus den Anfangsbedingungen berechnet werden, ergeben sich mit (5.14) aber auch unmittelbar aus (5.9) zu

$$C = \sqrt{x_0^2 + (v_0/\omega)^2}, \quad \alpha = \arctan\frac{v_0}{\omega x_0}\,. \tag{5.17}$$