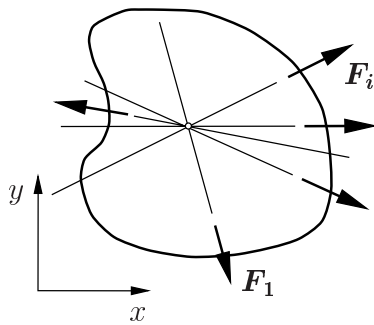


1 Gleichgewicht

Zentrale Kräftegruppen in der Ebene



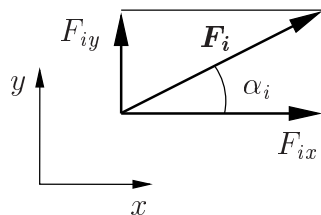
Eine zentrale Kräftegruppe kann durch die Resultierende $\mathbf{R} = \sum \mathbf{F}_i$ ersetzt werden. Es herrscht Gleichgewicht, wenn

$$\boxed{\sum \mathbf{F}_i = \mathbf{0}}$$

oder in Komponenten

$$\boxed{\sum F_{ix} = 0, \quad \sum F_{iy} = 0}$$

Darin sind



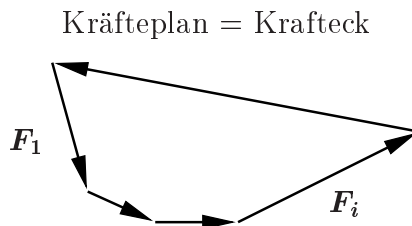
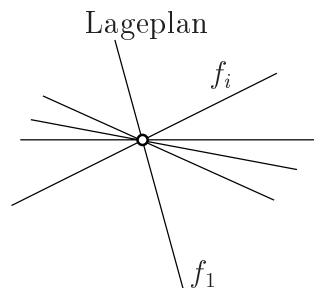
$$\mathbf{F}_i = F_{ix} \mathbf{e}_x + F_{iy} \mathbf{e}_y,$$

$$F_{ix} = F_i \cos \alpha_i,$$

$$F_{iy} = F_i \sin \alpha_i,$$

$$|\mathbf{F}_i| = F_i = \sqrt{F_{ix}^2 + F_{iy}^2}.$$

Bei der *grafischen Lösung* verlangt die Gleichgewichtsbedingung, daß das Kräfteck „geschlossen“ ist.

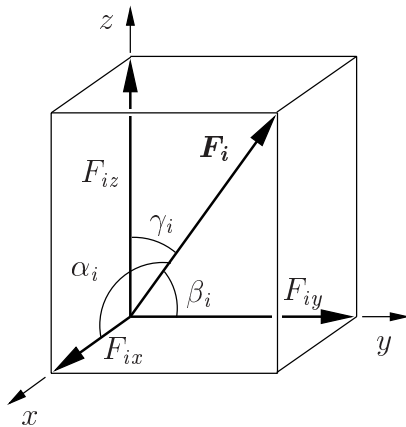


Zentrale Kräftegruppen im Raum

Gleichgewicht herrscht, wenn die Resultierende $\mathbf{R} = \sum \mathbf{F}_i$ verschwindet, d.h. wenn $\sum \mathbf{F}_i = \mathbf{0}$ oder in Komponenten

$$\boxed{\sum F_{ix} = 0, \quad \sum F_{iy} = 0, \quad \sum F_{iz} = 0}$$

Darin sind



$$\mathbf{F}_i = F_{ix} \mathbf{e}_x + F_{iy} \mathbf{e}_y + F_{iz} \mathbf{e}_z ,$$

$$F_{ix} = F_i \cos \alpha_i ,$$

$$F_{iy} = F_i \cos \beta_i ,$$

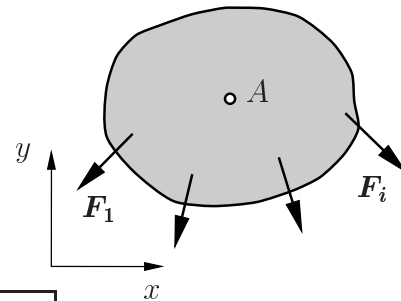
$$F_{iz} = F_i \cos \gamma_i ,$$

$$\cos^2 \alpha_i + \cos^2 \beta_i + \cos^2 \gamma_i = 1 ,$$

$$|\mathbf{F}_i| = F_i = \sqrt{F_{ix}^2 + F_{iy}^2 + F_{iz}^2} .$$

Allgemeine Kräftegruppen in der Ebene

Die Kräftegruppe läßt sich ersetzen durch die Resultierende $\mathbf{R} = \sum \mathbf{F}_i$ und ein resultierendes Moment $M_R^{(A)}$ um einen beliebig gewählten Bezugspunkt A . Es herrscht Gleichgewicht, wenn

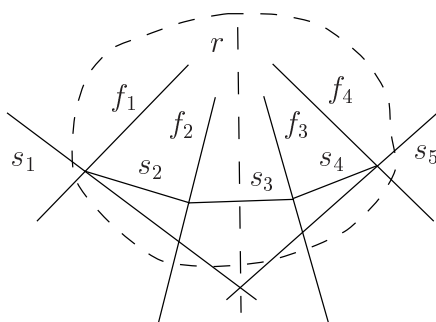


$$\sum F_{ix} = 0 , \quad \sum F_{iy} = 0 , \quad \sum M_i^{(A)} = 0 .$$

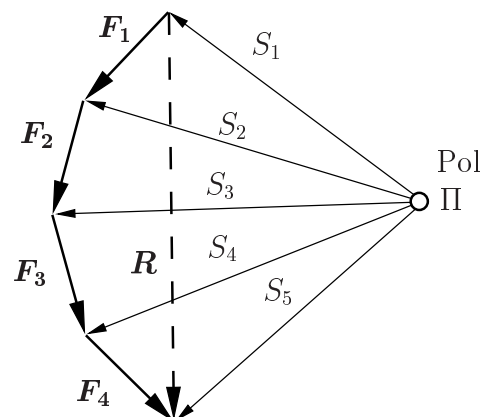
Anstelle der beiden Kräftegleichgewichtsbedingungen können zwei weitere Momentenbedingungen um andere Bezugspunkte (z.B. B und C) verwendet werden. Dabei dürfen A , B und C nicht auf einer Geraden liegen.

Grafisch erhält man die Resultierende mit Hilfe des Seilecks und des Kräftecks.

Seileck im Lageplan



Kräfteck



- Die Seilstrahlen s_i sind parallel zu den Polstrahlen S_i im Krafteck.
- Die Wirkungslinie r der Resultierenden \mathbf{R} (Größe und Richtung folgt aus dem Krafteck) verläuft im Seileck durch den Schnittpunkt der äußeren Seilstrahlen s_1 und s_5 .
- Damit Gleichgewicht herrscht, müssen Seileck und Krafteck „geschlossen“ sein.

Allgemeine Kräftegruppen im Raum

Es herrscht Gleichgewicht, wenn die Resultierende $\mathbf{R} = \sum \mathbf{F}_i$ und das resultierende Moment $\mathbf{M}_R^{(A)} = \sum \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i$ um einen beliebigen Bezugspunkt A verschwinden:

$$\boxed{\sum \mathbf{F}_i = \mathbf{0}} \quad , \quad \boxed{\sum \mathbf{M}_i^{(A)} = \mathbf{0}}$$

oder in Komponenten

$$\boxed{\begin{array}{l} \sum F_{ix} = 0 \quad , \quad \sum F_{iy} = 0 \quad , \quad \sum F_{iz} = 0 \quad , \\ \sum M_{ix}^{(A)} = 0 \quad , \quad \sum M_{iy}^{(A)} = 0 \quad , \quad \sum M_{iz}^{(A)} = 0 \end{array}}$$

mit

$$M_{ix}^{(A)} = y_i F_{iz} - z_i F_{iy} \quad , \quad M_{iy}^{(A)} = z_i F_{ix} - x_i F_{iz} \quad , \quad M_{iz}^{(A)} = x_i F_{iy} - y_i F_{ix} \quad .$$

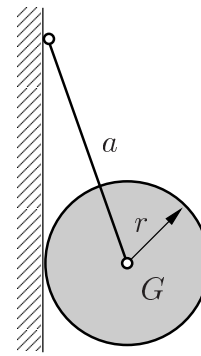
Darin sind x_i , y_i und z_i die Komponenten des Ortsvektors \mathbf{r}_i vom Bezugspunkt A zu einem beliebigen Punkt auf der Wirkungslinie der Kraft \mathbf{F}_i (z.B. zum Angriffspunkt).

Anmerkung: Wie im ebenen Fall können die Kräftegleichgewichtsbedingungen durch zusätzliche Momentengleichgewichtsbedingungen um geeignete Achsen ersetzt werden.

Aufgabe 1.1: Eine Kugel vom Gewicht G hängt an einem Seil an einer glatten Wand. Das Seil ist im Kugelmittelpunkt befestigt.

Gesucht ist die Seilkraft.

Gegeben: $a = 60$ cm, $r = 20$ cm.



a) *Analytische Lösung:* Um alle auf die Kugel wirkenden Kräfte angeben zu können, denken wir uns das Seil geschnitten und die Kugel von der Wand getrennt. An den Trennstellen führen wir die Seilkraft S und die Normalkraft N der Wand auf die Kugel als äußere Kräfte ein und erhalten so das dargestellte Freikörperbild.

Die Gleichgewichtsbedingungen lauten mit dem Hilfswinkel α :

$$\rightarrow: N - S \cos \alpha = 0 ,$$

$$\uparrow: S \sin \alpha - G = 0 .$$

Hieraus folgen

$$S = \frac{G}{\sin \alpha} ,$$

$$N = S \cos \alpha = G \cot \alpha .$$

Aus der Geometrie liest man ab:

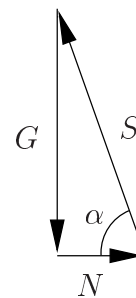
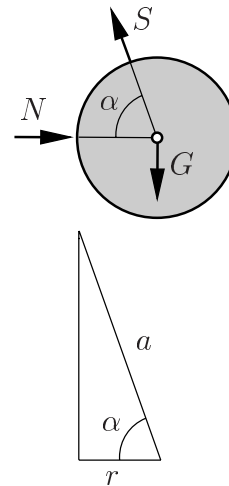
$$\cos \alpha = \frac{r}{a} = \frac{20}{60} = \frac{1}{3} \quad \text{und} \quad \sin \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{1}{3}\sqrt{8} .$$

Damit ergibt sich

$$\underline{\underline{S}} = \frac{3}{\sqrt{8}} G \approx \underline{\underline{1,06 G}} .$$

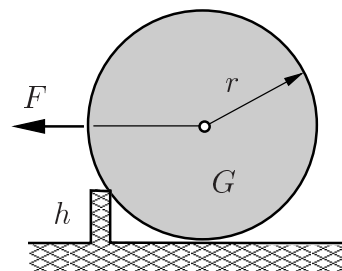
b) *Grafische Lösung:* Wir zeichnen ein geschlossenes Krafteck aus der nach *Größe* und *Richtung* bekannten Kraft G und den zwei Kräften S und N , deren Richtungen bekannt sind. Am Dreieck liest man ab:

$$\underline{\underline{S}} = \frac{G}{\sin \alpha} , \quad N = G \cot \alpha .$$

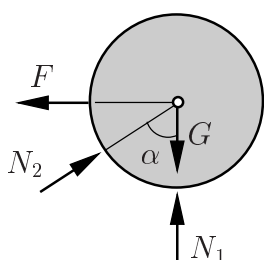


Aufgabe 1.2: Eine glatte Straßenwalze (Gewicht G , Radius r) stößt an ein Hindernis der Höhe h .

Welche Kraft F muß im Mittelpunkt angreifen, um die Walze über das Hindernis zu ziehen?



a) *Analytische Lösung:* Das Freikörperbild zeigt die auf die Walze wirkenden Kräfte. Dementsprechend lauten die Gleichgewichtsbedingungen



$$\rightarrow: N_2 \sin \alpha - F = 0 ,$$

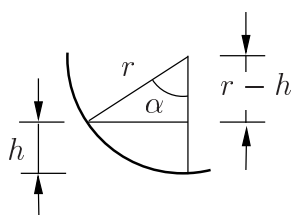
$$\uparrow: N_1 + N_2 \cos \alpha - G = 0 ,$$

wobei der Winkel α aus der gegebenen Geometrie folgt:

$$\cos \alpha = \frac{r - h}{r} .$$

Die zwei Gleichgewichtsbedingungen enthalten noch drei Unbekannte:

N_1 , N_2 und F .



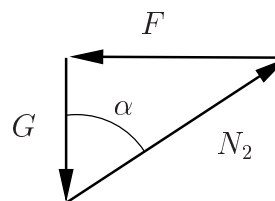
Die Kraft, welche die Walze über das Hindernis zieht, bewirkt ein Abheben der Walze vom Boden. Dann verschwindet die Normalkraft N_1 :

$$N_1 = 0 \quad \rightsquigarrow \quad N_2 = \frac{G}{\cos \alpha} .$$

Damit folgt

$$\underline{\underline{F}} = N_2 \sin \alpha = \underline{\underline{G \tan \alpha}} .$$

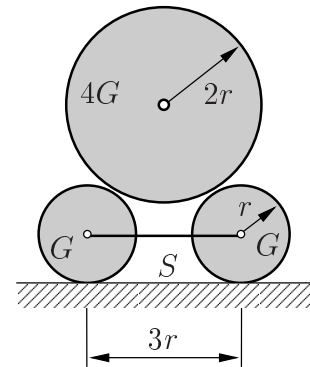
b) *Grafische Lösung:* Wegen $N_1 = 0$ kann das Kräfteck aus dem gegebenen Gewicht G und den bekannten Richtungen von N_2 und F gezeichnet werden. Am Dreieck liest man ab:



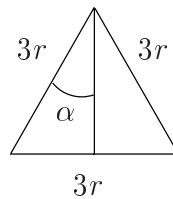
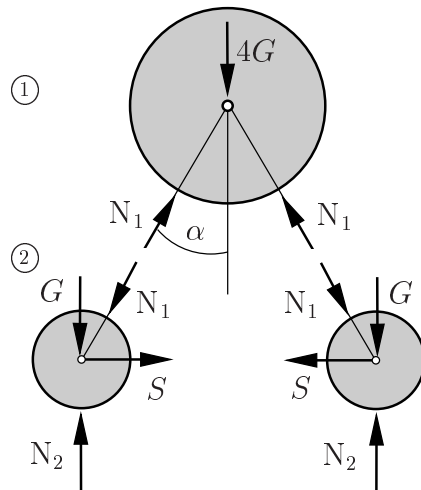
$$N_2 = \frac{G}{\cos \alpha} , \quad \underline{\underline{F = G \tan \alpha}} .$$

Aufgabe 1.3: Eine große zylindrische Walze (Gewicht $4G$, Radius $2r$) liegt auf zwei zylindrischen Walzen (Gewicht jeweils G , Radius r), die durch ein Seil S (Länge $3r$) miteinander verbunden sind. Alle Walzen sind glatt.

Gesucht sind alle Reaktionskräfte.



Lösung: Im Freikörperbild trennen wir die Körper und tragen die wirkenden Kräfte an. An jedem Körper (Teilsystem) gehen die Kräfte durch einen Punkt. Wegen der im Freikörperbild berücksichtigten Symmetrie haben wir für die obere Walze eine und für eine untere Walze zwei Gleichgewichtsbedingungen für die drei unbekannt Kräfte N_1 , N_2 und S :



$$\textcircled{1} \quad \uparrow: \quad 2N_1 \cos \alpha - 4G = 0 ,$$

$$\textcircled{2} \quad \rightarrow: \quad S - N_1 \sin \alpha = 0 ,$$

$$\uparrow: \quad N_2 - N_1 \cos \alpha - G = 0 .$$

Für den Winkel α folgt aus der gegebenen Geometrie

$$\sin \alpha = \frac{3r/2}{3r} = \frac{1}{2} \quad \leadsto \quad \alpha = 30^\circ$$

$$\leadsto \quad \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} , \quad \tan \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} .$$

Damit erhält man

$$\underline{\underline{N_1 = \frac{2G}{\cos \alpha} = \frac{4\sqrt{3}}{3} G}}, \quad \underline{\underline{S = 2G \tan \alpha = \frac{2\sqrt{3}}{3} G}}, \quad \underline{\underline{N_2 = 2G + G = 3G}} .$$

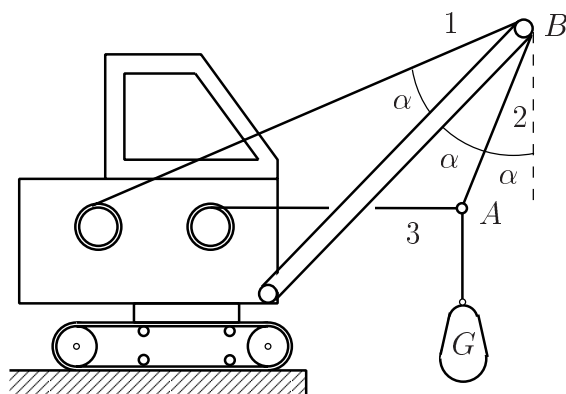
Anmerkung: Die Reaktionskraft N_2 hätte auch aus dem Gleichgewicht am Gesamtsystem ermittelt werden können:

$$\uparrow: \quad 2N_2 - 2G - 4G = 0 \quad \leadsto \quad \underline{\underline{N_2 = 3G}} .$$

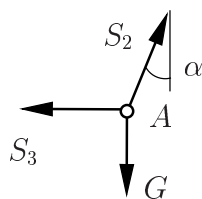
Aufgabe 1.4: Ein Bagger wurde zu einem Abbruchgerät umgerüstet.

Man bestimme die Kräfte in den Seilen 1, 2 und 3 sowie im Ausleger infolge des Gewichtes G .

Hinweis: Der Ausleger nimmt nur eine Kraft in Längsrichtung auf (Pendelstütze).



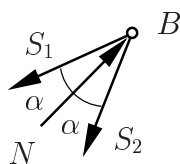
Lösung: Wir schneiden die Punkte A und B frei. Dann liefert Gleichgewicht in Punkt A



$$\begin{cases} \uparrow: & S_2 \cos \alpha - G = 0 \\ \rightarrow: & S_2 \sin \alpha - S_3 = 0 \end{cases} \quad \left. \begin{array}{l} S_2 = \frac{G}{\cos \alpha} \\ S_3 = G \tan \alpha \end{array} \right\}$$

und in Punkt B : (N ist die Kraft im Ausleger)

$$\begin{aligned} \rightarrow: & \quad -S_2 \sin \alpha + N \sin 2\alpha - S_1 \sin 3\alpha = 0, \\ \uparrow: & \quad -S_2 \cos \alpha + N \cos 2\alpha - S_1 \cos 3\alpha = 0. \end{aligned}$$



Alternativ ergibt sich für den Punkt B bei geschickterer Wahl der Koordinatenrichtungen

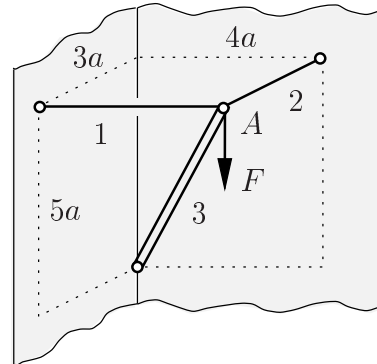
$$\begin{aligned} \nearrow: & \quad N - S_2 \cos \alpha - S_1 \cos \alpha = 0, \\ \nwarrow: & \quad S_1 \sin \alpha - S_2 \sin \alpha = 0. \end{aligned}$$

Aus den $2 \times 2 = 4$ Gleichgewichtsbedingungen erhält man für die 4 Unbekannten S_1, S_2, S_3, N zusammenfassend die Ergebnisse

$$\underline{\underline{S_1 = S_2 = \frac{G}{\cos \alpha}}}, \quad \underline{\underline{S_3 = G \tan \alpha}}, \quad \underline{\underline{N = 2S_2 \cos \alpha = \underline{\underline{2G}}}}.$$

Aufgabe 1.5: Der durch die Kraft F belastete Stab 3 wird in einer räumlichen Ecke durch zwei waagrechte Seile 1 und 2 gehalten.

Gesucht sind die Stab- und die Seilkräfte.

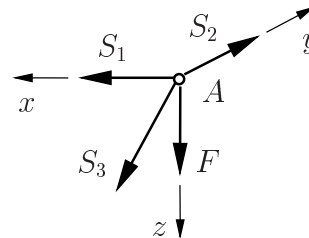


Lösung: Wir schneiden den Punkt A frei und tragen alle Schnittkräfte an (Zugkraft positiv). Ein zweckmäßig gewähltes Koordinatensystem, dessen Richtungen mit den Seilen 1, 2 und der Kraft F übereinstimmen, erleichtert die Rechenarbeit. Damit lauten die Gleichgewichtsbedingungen

$$\sum F_x = 0 : \quad S_1 + S_{3x} = 0 ,$$

$$\sum F_y = 0 : \quad S_2 + S_{3y} = 0 ,$$

$$\sum F_z = 0 : \quad S_{3z} + F = 0 .$$



Die Komponenten von S_3 verhalten sich zu S_3 wie die analogen geometrischen Längen ($L =$ Länge von Stab 3).

$$\frac{S_{3x}}{S_3} = \frac{4a}{L} , \quad \frac{S_{3y}}{S_3} = \frac{3a}{L} , \quad \frac{S_{3z}}{S_3} = \frac{5a}{L}$$

oder

$$S_{3x} : S_{3y} : S_{3z} = 4 : 3 : 5 .$$

Einsetzen in die Gleichgewichtsbedingungen liefert

$$S_{3z} = -F , \quad \underline{\underline{S_2}} = -S_{3y} = -\frac{3}{5}S_{3z} = \underline{\underline{\frac{3}{5}F}} ,$$

$$\underline{\underline{S_1}} = -S_{3x} = -\frac{4}{5}S_{3z} = \underline{\underline{\frac{4}{5}F}} ,$$

$$\underline{\underline{S_3}} = S_{3z} \sqrt{\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2 + 1^2} = \underline{\underline{-\sqrt{2}F}} .$$

Hinweis: Das Minuszeichen bei S_3 zeigt an, daß im Stab Druck herrscht.

Alternative Lösungsvariante: Wir können die Aufgabe auch lösen, indem wir direkt die Gleichgewichtsbedingung in Vektorform verwenden:

$$\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2 + \mathbf{S}_3 + \mathbf{F} = \mathbf{0} .$$

Jede Kraft drücken wir durch den Betrag und den Richtungsvektor (Einheitsvektor) aus. Letzterer lautet zum Beispiel für die Stabkraft S_3 :

$$\mathbf{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{4^2 + 3^2 + 5^2}} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{5\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} .$$

Auf diese Weise folgt für die Kräfte

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_1 &= S_1 \mathbf{e}_1 = S_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} , & \mathbf{S}_2 &= S_2 \mathbf{e}_2 = S_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \\ \mathbf{S}_3 &= S_3 \mathbf{e}_3 = S_3 \frac{1}{5\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} , & \mathbf{F} &= F \mathbf{e}_F = F \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} , \end{aligned}$$

und die Gleichgewichtsbedingung liefert

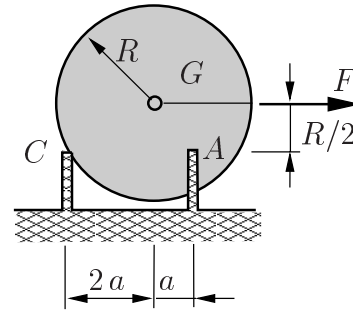
$$\begin{aligned} S_1 + \frac{4}{5\sqrt{2}} S_3 &= 0 , \\ S_2 + \frac{3}{5\sqrt{2}} S_3 &= 0 , \\ \frac{5}{5\sqrt{2}} S_3 + F &= 0 . \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich

$$\underline{\underline{S_3 = -\sqrt{2} F}} , \quad \underline{\underline{S_2 = \frac{3}{5} F}} , \quad \underline{\underline{S_1 = \frac{4}{5} F}} .$$

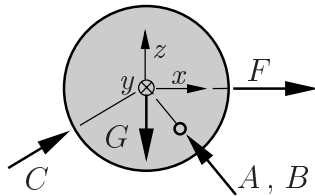
Aufgabe 1.6: Eine glatte Kugel (Gewicht G) liegt auf drei Stützpunkten A , B , C auf und wird durch eine Kraft F belastet. Die Stützpunkte bilden in einer waagrecht Ebene die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks mit der Höhe $3a = \frac{3}{4}\sqrt{3}R$.

Wie groß sind die Kontaktkräfte in den Stützpunkten und bei welcher Kraft F hebt die Kugel vom Stützpunkt C ab?



Lösung: Die Kontaktkräfte A , B und C stehen senkrecht zur *glatten* Kugeloberfläche und bilden mit G und F eine zentrale Kräftegruppe. Die Gleichgewichtsbedingung lautet daher in Vektorform

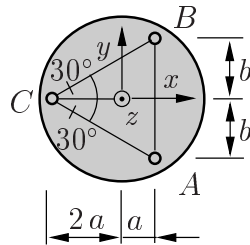
$$\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} + \mathbf{G} + \mathbf{F} = \mathbf{0}.$$



Wir wählen zweckmäßig ein Koordinatensystem mit dem Ursprung im Kugelmittelpunkt und drücken jeden Kraftvektor durch Betrag und Richtungsvektor aus. Letzteren bestimmen wir bei den Kontaktkräften mit den Koordinaten der Stützpunkte. Zu diesem Zweck führen wir die Hilfslänge b ein, für die wir aus der Geometrie ablesen:

$$b = 3a \tan 30^\circ = \frac{3}{4}R.$$

Damit ergibt sich zum Beispiel für den Richtungsvektor der Kraft A (als Druckkraft angenommen!)



$$\mathbf{e}_A = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + (R/2)^2}} \begin{pmatrix} -a \\ b \\ -(R/2) \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Für \mathbf{A} folgt die Darstellung

$$\mathbf{A} = A \mathbf{e}_A = \frac{A}{4} \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix},$$

und analog für die restlichen Kräfte

$$\mathbf{B} = \frac{B}{4} \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \frac{C}{4} \begin{pmatrix} 2\sqrt{3} \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{G} = G \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = F \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Einsetzen in die Gleichgewichtsbedingung liefert die drei Gleichungen

$$-\sqrt{3}A - \sqrt{3}B + 2\sqrt{3}C = -4F,$$

$$3A - 3B = 0,$$

$$2A + 2B + 2C = 4G.$$

Hieraus erhält man die gesuchten Kontaktkräfte:

$$\underline{\underline{A = B = \frac{2}{3} \left(G + \frac{1}{\sqrt{3}} F \right)}}, \quad \underline{\underline{C = \frac{2}{3} \left(G - \frac{2}{\sqrt{3}} F \right)}}.$$

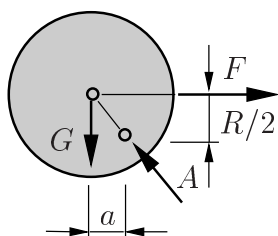
Wenn die Kugel vom Stützpunkt C abhebt, verschwindet dort die Kontaktkraft:

$$C = 0.$$

Aus dieser Bedingung ergibt sich für die notwendige Kraft F

$$G - \frac{2}{\sqrt{3}} F = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \underline{\underline{F = \frac{\sqrt{3}}{2} G}}.$$

Anmerkung: Die für ein Abheben bei C erforderliche Kraft F kann man einfacher aus der Momentengleichgewichtsbedingung um eine Achse durch A und B bestimmen:



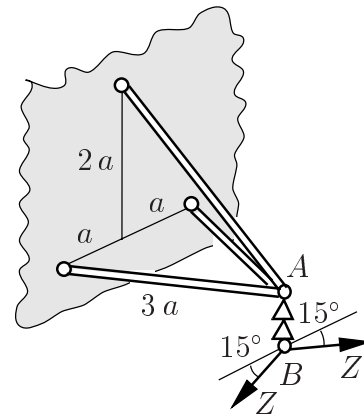
$$\sum M^{(\overline{AB})} = 0 : \quad aG - \frac{R}{2} F = 0.$$

Hieraus folgt

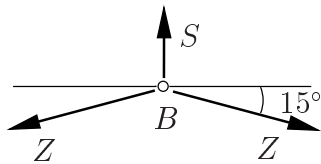
$$\underline{\underline{F = \frac{2a}{R} G = \frac{\sqrt{3}}{2} G}}.$$

Aufgabe 1.7: Eine Hochspannungsleitung wird über einen Isolator durch drei Stäbe gehalten. Die Zugkraft Z in der durchhängenden Leitung am Isolator beträgt 1000 N.

Wie groß sind die Kräfte in den 3 Stäben?



Lösung: Gleichgewicht am Isolator B liefert (ebenes Teilproblem):



$$\uparrow: S - 2Z \sin 15^\circ = 0,$$

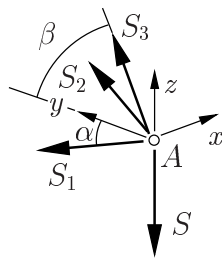
$$\rightsquigarrow S = 2Z \sin 15^\circ = 517 \text{ N}.$$

Mit dem nun bekannten S folgen die 3 Stabkräfte aus den 3 Gleichgewichtsbedingungen am Punkt A :

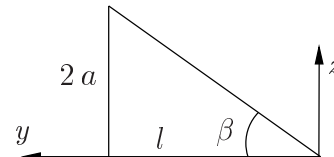
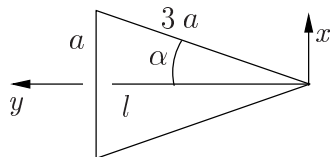
$$\sum F_x = 0: S_2 \sin \alpha - S_1 \sin \alpha = 0,$$

$$\sum F_y = 0: S_1 \cos \alpha + S_2 \cos \alpha + S_3 \cos \beta = 0,$$

$$\sum F_z = 0: S_3 \sin \beta - S = 0.$$



Die dabei verwendeten Hilfwinkel α und β ergeben sich aus der Geometrie:



$$\sin \alpha = \frac{a}{3a} = \frac{1}{3} \rightsquigarrow \alpha = 19,5^\circ, \quad \tan \beta = \frac{2a}{l} = \frac{2}{\sqrt{3^2 - 1^2}} \rightsquigarrow \beta = 35,3^\circ.$$

Damit erhält man die Ergebnisse

$$\underline{\underline{S_3}} = \frac{S}{\sin \beta} = \underline{\underline{1,73 S}} = \underline{\underline{895 \text{ N}}},$$

$$\underline{\underline{S_1}} = \underline{\underline{S_2}} = -S_3 \frac{\cos \beta}{2 \cos \alpha} = -\frac{S}{2 \tan \beta \cos \alpha} = \underline{\underline{-0,75 S}} = \underline{\underline{-388 \text{ N}}}.$$

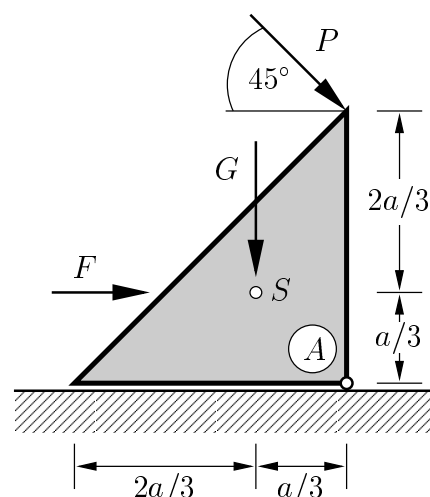
Hinweis: Aufgrund der Symmetrie (Geometrie und Belastung) gilt $S_2 = S_1$.

Aufgabe 1.8: An einem gleichschenkligen Dreieck greifen die Kräfte F , P und die Gewichtskraft G an.

Das angreifende Kräftesystem soll zunächst durch eine resultierende Kraft und ein resultierendes Moment im Punkt A ersetzt werden (Reduktion im Punkt A).

Wie groß muß der Betrag der Kraft F sein, damit das Moment um den Punkt A verschwindet, der Körper also nicht kippt?

Gegeben: $G = 6 \text{ kN}$, $P = \sqrt{2} \text{ kN}$, $a = 1 \text{ m}$.

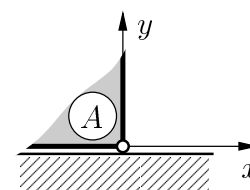


Lösung: Die Reduktion eines Kräftesystems auf eine Kraft \mathbf{R} und ein Moment \mathbf{M}_A bezüglich eines beliebigen Bezugspunkts A wird auch als Reduktion auf eine *Dyname* in A bezeichnet. Die *Dyname* wird dabei durch \mathbf{R} und \mathbf{M}_A charakterisiert.

Wir lösen die Aufgabe vektoriell. Führen wir ein Koordinatensystem mit Ursprung in A ein, so ergibt sich die resultierende Kraft \mathbf{R} aus der Addition der Einzelkräfte

$$\mathbf{G} = -G \mathbf{e}_y, \quad \mathbf{F} = F \mathbf{e}_x \quad \text{und} \quad \mathbf{P} = \frac{\sqrt{2}}{2} P (\mathbf{e}_x - \mathbf{e}_y):$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{G} + \mathbf{F} + \mathbf{P} = (F + \frac{\sqrt{2}}{2} P) \mathbf{e}_x - (G + \frac{\sqrt{2}}{2} P) \mathbf{e}_y.$$



Das resultierende Moment \mathbf{M}_A berechnet sich mit den Hebelarmen

$$\mathbf{r}_{AG} = -\frac{a}{3} \mathbf{e}_x + \frac{a}{3} \mathbf{e}_y, \quad \mathbf{r}_{AF} = -\frac{2a}{3} \mathbf{e}_x + \frac{a}{3} \mathbf{e}_y \quad \text{und} \quad \mathbf{r}_{AP} = a \mathbf{e}_y$$

der jeweiligen Kräfte bezüglich A zu

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_A &= \mathbf{r}_{AG} \times \mathbf{G} + \mathbf{r}_{AF} \times \mathbf{F} + \mathbf{r}_{AP} \times \mathbf{P} = \\ &= \frac{Ga}{3} \mathbf{e}_z - \frac{Fa}{3} \mathbf{e}_z - \frac{\sqrt{2}Pa}{2} \mathbf{e}_z. \end{aligned}$$

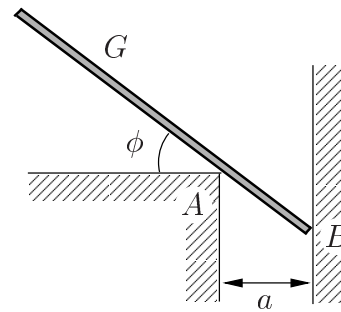
Mit den gegebenen Werten für G , P und a kann der Betrag der Kraft \mathbf{F} so gewählt werden, daß das Moment \mathbf{M}_A verschwindet. Aus der geforderten Bedingung $\mathbf{M}_A \stackrel{!}{=} \mathbf{0}$ folgt:

$$\frac{Ga}{3} - \frac{Fa}{3} - \frac{\sqrt{2}Pa}{2} \stackrel{!}{=} 0 \quad \leadsto \quad \underline{\underline{F}} = G - \frac{3\sqrt{2}P}{2} = 6 \text{ kN} - 3 \text{ kN} = \underline{\underline{3 \text{ kN}}}.$$

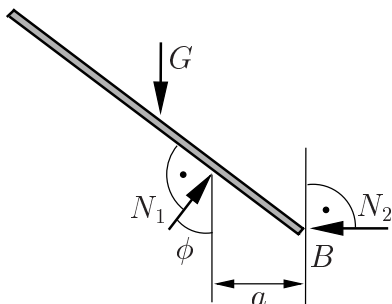
Anmerkung: Das resultierende Moment ist im Gegensatz zur resultierenden Kraft abhängig vom Bezugspunkt und läßt sich im 2-dimensionalen Fall mit „senkrechter Abstand zwischen Bezugspunkt und Wirkungslinie der Kraft mal Betrag der Kraft“ schneller berechnen als durch Auswertung des Kreuzprodukts.

Aufgabe 1.9: Ein homogener glatter Stab (Gewicht G , Länge $4a$) stützt sich bei A an eine Ecke und bei B an eine glatte Wand.

Für welchen Winkel ϕ ist der Stab im Gleichgewicht?



Lösung: Wir zeichnen das Freikörperbild. Aus der Bedingung „glatt“ folgen die Richtungen der unbekannt Kräfte N_1 und N_2 ; sie stehen senkrecht zur jeweiligen Berührungsebene. Damit lauten die Gleichgewichtsbedingungen:



$$\rightarrow : N_1 \sin \phi - N_2 = 0 ,$$

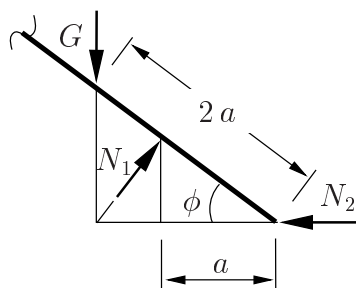
$$\uparrow : N_1 \cos \phi - G = 0 ,$$

$$\widehat{B} : \frac{a}{\cos \phi} N_1 - 2a \cos \phi G = 0 .$$

Aus ihnen lassen sich die 3 Unbekannten N_1 , N_2 und ϕ ermitteln. Die gesuchte Lösung für ϕ erhält man durch Einsetzen der 2. Gleichung in die 3. Gleichung:

$$\frac{aG}{\cos^2 \phi} - 2a \cos \phi G = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \underline{\underline{\cos^3 \phi = \frac{1}{2}}} .$$

Einfacher findet man das Ergebnis aus der Aussage: „Drei Kräfte sind nur dann im Gleichgewicht, wenn ihre Wirkungslinien durch **einen** Punkt gehen“. Dann folgt aus der Geometrie:



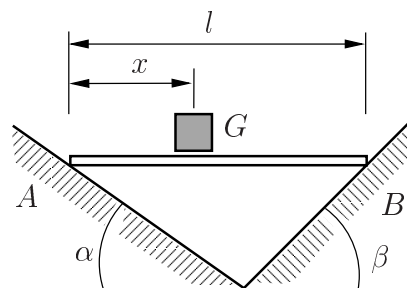
$$2a \cos \phi = \frac{a / \cos \phi}{\cos \phi} ,$$

$$\rightsquigarrow \quad \underline{\underline{\cos^3 \phi = \frac{1}{2}}} .$$

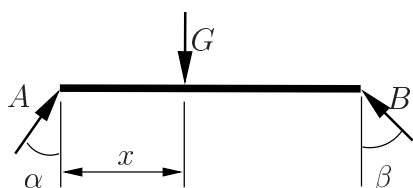
Aufgabe 1.10: Ein gewichtsloser Stab der Länge l wird horizontal zwischen zwei glatte schiefe Ebenen gelegt. Auf dem Stab liegt ein Klotz vom Gewicht G .

In welchem Abstand x muß G liegen, damit Gleichgewicht herrscht?

Wie groß sind die Lagerkräfte?



a) *Analytische Lösung:* Wir zeichnen das Freikörperbild und stellen die Gleichgewichtsbedingungen auf:



$$\uparrow : A \cos \alpha + B \cos \beta - G = 0 ,$$

$$\rightarrow : A \sin \alpha - B \sin \beta = 0 ,$$

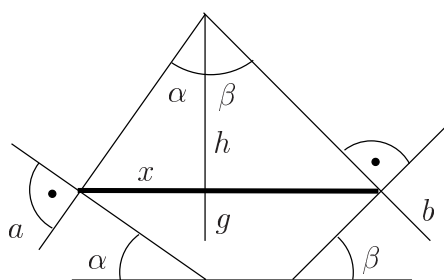
$$\widehat{A} : xG - lB \cos \beta = 0 .$$

Daraus folgen

$$\underline{\underline{A = G \frac{\sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}}} , \quad \underline{\underline{B = G \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}}} ,$$

$$\underline{\underline{x = l \frac{\sin \alpha \cos \beta}{\sin(\alpha + \beta)}}} = \underline{\underline{\frac{l}{1 + (\tan \beta / \tan \alpha)}}} .$$

b) *Grafische Lösung:* Drei Kräfte sind nur dann im Gleichgewicht, wenn sie durch einen Punkt gehen. Demnach folgt die Wirkungslinie g von G unmittelbar aus dem Schnittpunkt der Wirkungslinien a und b der Lagerkräfte A und B . Aus der Skizze kann abgelesen werden:



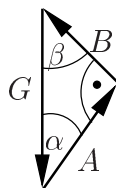
$$\left. \begin{aligned} h \tan \alpha + h \tan \beta &= l \\ h \tan \alpha &= x \end{aligned} \right\}$$

$$\leadsto \underline{\underline{x = \frac{l}{1 + \tan \beta / \tan \alpha}}} .$$

Die Lagerkräfte (z. B. Kraft A) folgen aus dem Krafteck (Sinussatz):

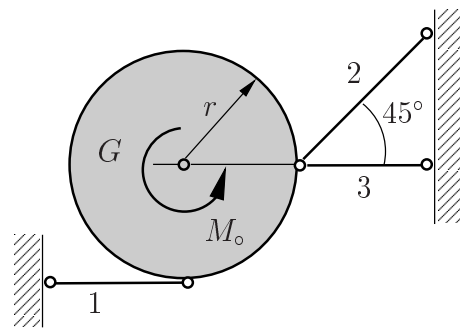
$$\frac{A}{\sin \beta} = \frac{G}{\sin [\pi - (\alpha + \beta)]} ,$$

$$\underline{\underline{A = G \frac{\sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}}} .$$

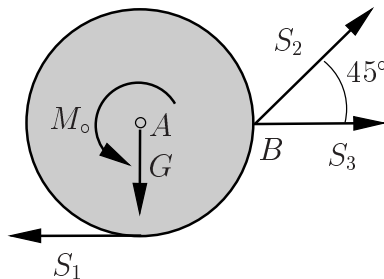


Aufgabe 1.11: Eine homogene Kreisscheibe (Gewicht G , Radius r) wird durch drei Stäbe gehalten und durch ein äußeres Moment M_o belastet.

Man bestimme die Kräfte in den Stäben. Bei welchem Moment wird die Kraft im Stab 1 gerade Null?



Lösung: Wir schneiden die Kreisscheibe frei und zeichnen in das Freikörperbild alle Kräfte ein. Dann lauten die Gleichgewichtsbedingungen



$$\rightarrow : \quad \frac{\sqrt{2}}{2} S_2 + S_3 - S_1 = 0 ,$$

$$\uparrow : \quad \frac{\sqrt{2}}{2} S_2 - G = 0 ,$$

$$\hat{A} : \quad r \frac{\sqrt{2}}{2} S_2 - r S_1 + M_o = 0 .$$

Aus ihnen erhält man

$$\underline{\underline{S_1 = \frac{M_o}{r} + G}}, \quad \underline{\underline{S_2 = \sqrt{2} G}}, \quad \underline{\underline{S_3 = \frac{M_o}{r}}} .$$

Das gesuchte Moment folgt durch Nullsetzen von S_1 :

$$S_1 = 0 \quad \leadsto \quad \underline{\underline{M_o = -rG}} .$$

Anmerkungen:

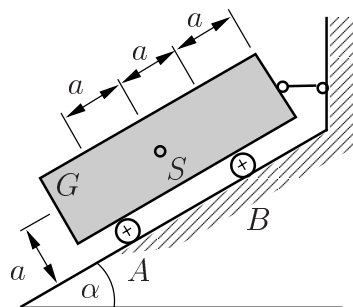
- Anstelle des Bezugspunktes A ist es günstiger den Bezugspunkt B für die Momentengleichgewichtsbedingung zu verwenden, da dann nur eine einzige Unbekannte auftritt:

$$\hat{B} : \quad rG - rS_1 + M_o = 0 \quad \leadsto \quad S_1 = \frac{M_o}{r} + G .$$

- Alle Stabkräfte sind Zugkräfte.
- Die Stabkraft S_2 ist unabhängig von M_o .
- Dem Moment M_o wird durch die beiden Stabkräfte S_1 und S_3 das Gleichgewicht gehalten.

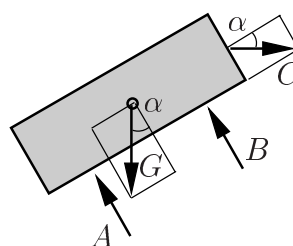
Aufgabe 1.12: Ein Wagen vom Gewicht $G = 10 \text{ kN}$ und bekannter Schwerpunktslage S wird auf einer schiefen, glatten Ebene ($\alpha = 30^\circ$) durch ein horizontal gespanntes Seil gehalten.

Gesucht sind die Raddruckkräfte.



Lösung: Wir schneiden das Seil und trennen den Wagen von der Ebene. Dann erhalten wir das dargestellte Freikörperbild.

Als Gleichgewichtsbedingungen verwenden wir das Kräftegleichgewicht in Richtung der schiefen Ebene und die zwei Momentenbedingungen um A und um B . Für letztere zerlegen wir zweckmäßig die Kräfte G und C in ihre Komponenten in Richtung und senkrecht zur schiefen Ebene. Damit folgen



$$\nearrow : \quad C \cos \alpha - G \sin \alpha = 0 ,$$

$$\hat{A} : \quad 2aB + aG \sin \alpha - aG \cos \alpha - aC \cos \alpha - 3aC \sin \alpha = 0 ,$$

$$\hat{B} : \quad -2aA + aG \sin \alpha + aG \cos \alpha - aC \cos \alpha - aC \sin \alpha = 0 .$$

Hieraus erhält man

$$C = G \tan \alpha = \frac{G}{\sqrt{3}} = 5,77 \text{ kN} ,$$

$$\underline{\underline{B}} = \frac{G}{2}(\cos \alpha - \sin \alpha) + \frac{C}{2}(\cos \alpha + 3 \sin \alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2} G = \underline{\underline{8,66 \text{ kN}}} ,$$

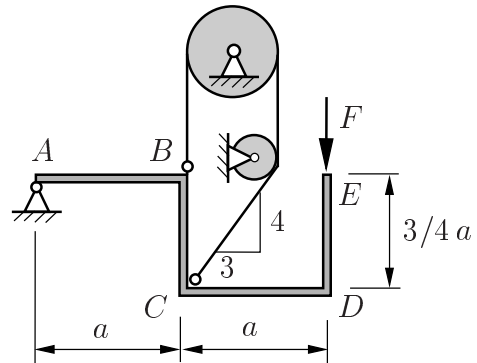
$$\underline{\underline{A}} = \frac{G}{2}(\sin \alpha + \cos \alpha) - \frac{C}{2}(\cos \alpha + \sin \alpha) = \frac{G}{2\sqrt{3}} = \underline{\underline{2,89 \text{ kN}}} .$$

Zur Kontrolle können wir eine zusätzliche Gleichgewichtsaussage verwenden:

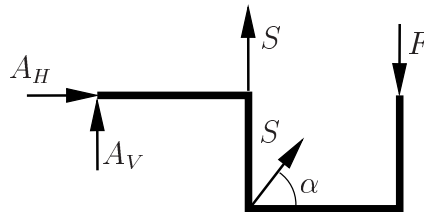
$$\nwarrow : \quad A + B - G \cos \alpha - C \sin \alpha = 0 , \quad \rightsquigarrow \quad \frac{G}{2\sqrt{3}} + G \frac{\sqrt{3}}{2} - G \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{G}{2\sqrt{3}} = 0 .$$

Aufgabe 1.13: Der Balkenzug A bis E ist bei A drehbar gelagert und bei B und C über ein Seil gehalten, das reibungsfrei über zwei feststehende Rollen läuft.

Wie groß ist die Seilkraft bei einer Belastung durch F ?



Lösung: Wir schneiden das System auf und berücksichtigen beim Antragen der Kräfte, daß an den reibungsfreien Rollen die Seilkräfte an beiden Seiten gleich sind (die Radien der Rollen gehen daher in die Lösung nicht ein!):



Damit der Balkenzug im Gleichgewicht ist, muß gelten:

$$\uparrow : \quad A_V + S + S \sin \alpha - F = 0 ,$$

$$\rightarrow : \quad A_H + S \cos \alpha = 0 ,$$

$$\hat{A} : \quad 2aF - aS - a(S \sin \alpha) - \frac{3}{4}a(S \cos \alpha) = 0 .$$

Mit

$$\cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{3}{5} , \quad \sin \alpha = \frac{4}{5}$$

folgen

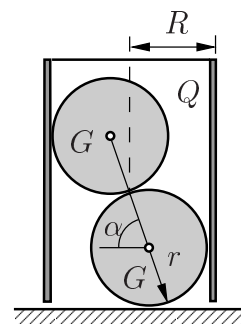
$$\underline{\underline{S = \frac{8}{9} F}} , \quad A_H = -\frac{8}{15} F , \quad A_V = -\frac{3}{5} F .$$

Zur Probe bilden wir das Momentengleichgewicht um C :

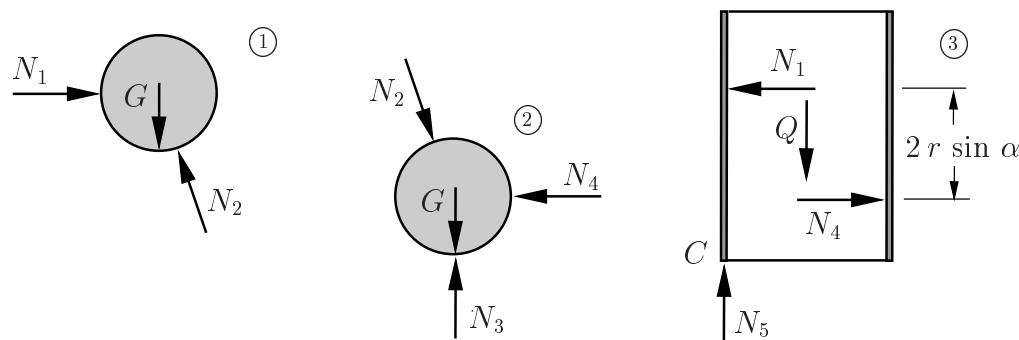
$$\hat{C} : \quad aA_V + \frac{3}{4}aA_H + aF = 0 \quad \rightsquigarrow \quad -\frac{3}{5}aF - \frac{3}{4}a\frac{8}{15}F + aF = 0 .$$

Aufgabe 1.14: Zwei glatte Kugeln (Gewicht jeweils G , Radius r) liegen in einem dünnwandigen Kreisrohr (Gewicht Q , Radius R), das senkrecht auf dem Boden steht ($r = \frac{3}{4}R$).

Wie groß muß Q sein, damit das Rohr nicht kippt?



Lösung: Wir trennen die Kugeln und das Rohr und zeichnen die Kräfte für den Fall ein, bei dem Kippen gerade eintritt. Dann liegt das Rohr nur noch im Punkt C auf, und dort wirkt die Einzelkraft N_5 . (Wenn das Rohr dagegen nicht kippt, so ist die Kontaktkraft über den gesamten Rohrumfang verteilt.)



Die Gleichgewichtsbedingungen an den Kugeln und am Zylinder lauten:

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad \uparrow: \quad N_2 \sin \alpha - G &= 0, & \textcircled{2} \quad \uparrow: \quad N_3 - N_2 \sin \alpha - G &= 0, \\ \rightarrow: \quad N_1 - N_2 \cos \alpha &= 0, & \rightarrow: \quad N_2 \cos \alpha - N_4 &= 0, \end{aligned}$$

$$\textcircled{3} \quad \rightarrow: \quad N_4 - N_1 = 0, \quad \uparrow: \quad N_5 - Q = 0,$$

$$\widehat{C} : (r + 2r \sin \alpha)N_1 - rN_4 - RQ = 0.$$

Aus ihnen folgt

$$N_1 = N_4 = \frac{G}{\tan \alpha}, \quad N_2 = \frac{G}{\sin \alpha}, \quad N_3 = 2G, \quad Q = N_5 = \frac{3}{2}G \cos \alpha.$$

Mit der geometrischen Beziehung

$$\cos \alpha = (R - r)/r = 1/3$$

erhält man daraus für das Gewicht, bei dem Kippen gerade eintritt

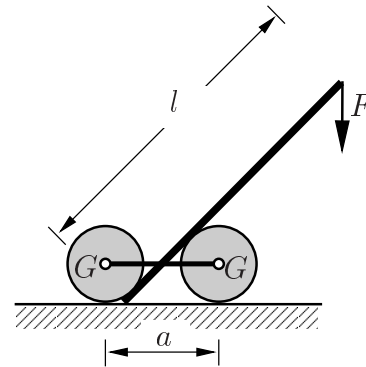
$$Q_{\text{Kippen}} = G/2.$$

Damit das Rohr nicht kippt, muß also gelten:

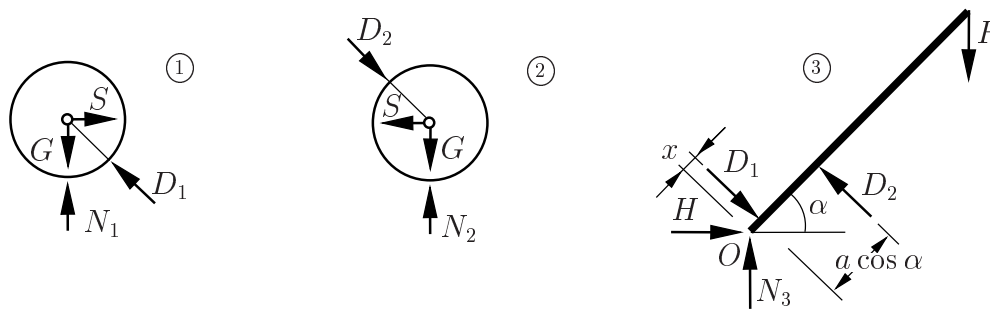
$$\underline{\underline{Q > Q_{\text{Kippen}} = \frac{G}{2}}}.$$

Aufgabe 1.15: Zwei glatte Walzen (Gewicht G , Radius r) sind durch ein dehnstarres Seil der Länge a miteinander verbunden. Über einen Hebel (Länge l) greift eine Kraft F an.

Wie groß sind die Kräfte zwischen Walzen und Boden?



Lösung: Wir schneiden die Walzen und den Hebel frei:

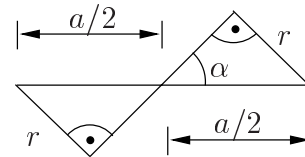


An den 3 Teilsystemen stehen $2 \times 2 + 1 \times 3 = 7$ Gleichungen für die 7 Unbekannten ($D_1, D_2, N_1, N_2, N_3, H, S$) zur Verfügung:

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad \rightarrow : & S - D_1 \sin \alpha = 0, & \uparrow : & N_1 - G + D_1 \cos \alpha = 0, \\ \textcircled{2} \quad \rightarrow : & D_2 \sin \alpha - S = 0, & \uparrow : & N_2 - G - D_2 \cos \alpha = 0, \\ \textcircled{3} \quad \rightarrow : & H + D_1 \sin \alpha - D_2 \sin \alpha = 0, \\ & \uparrow : & N_3 - D_1 \cos \alpha + D_2 \cos \alpha - F = 0, \\ & \hat{O} : & l \cos \alpha F - (a \cos \alpha + x)D_2 + xD_1 = 0. \end{aligned}$$

Der Winkel α folgt aus der Geometrie:

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{r}{a/2}, \\ \cos \alpha &= \sqrt{1 - 4(r/a)^2}. \end{aligned}$$

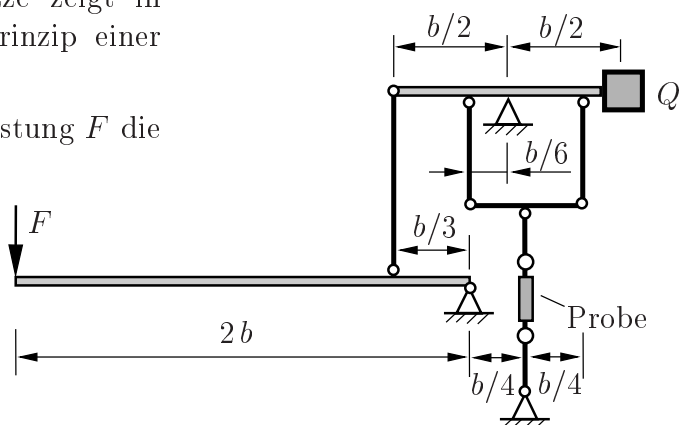


Addition der 1. und 3. Gleichung liefert $D_1 = D_2$. Damit folgt $H = 0$, $N_3 = F$ und aus der 7. Gleichung fällt der unbekannte Abstand x heraus. Auflösung ergibt

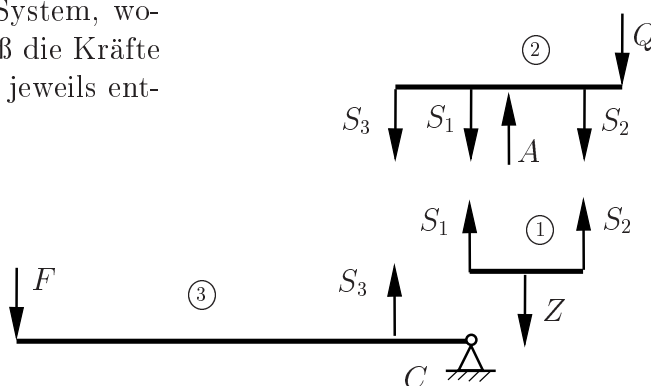
$$\underline{\underline{N_1 = G - F \frac{l}{a} \sqrt{1 - 4\left(\frac{r}{a}\right)^2}}}, \quad \underline{\underline{N_2 = G + F \frac{l}{a} \sqrt{1 - 4\left(\frac{r}{a}\right)^2}}}.$$

Aufgabe 1.16: Die Skizze zeigt in vereinfachter Form das Prinzip einer Werkstoffprüfmaschine.

Wie groß ist bei einer Belastung F die Zugkraft Z in der Probe?



Lösung: Wir trennen das System, wobei wir berücksichtigen, daß die Kräfte an den Enden eines Stabes jeweils entgegengesetzt gleich sind:



$$\begin{aligned}
 \textcircled{1} \quad & S_1 = S_2, \quad (\text{Symmetrie bzw. Momentengleichgewicht}) \\
 & \uparrow: S_1 + S_2 = Z, \\
 \textcircled{2} \quad & \hat{A}: \frac{b}{2}Q + \left(\frac{b}{2} - \frac{b}{6}\right)S_2 - \frac{b}{6}S_1 - \frac{b}{2}S_3 = 0, \\
 & \quad \quad \quad \rightsquigarrow S_1 = 3S_3 - 3Q, \\
 \textcircled{3} \quad & \hat{C}: \frac{b}{3}S_3 - 2bF = 0 \quad \rightsquigarrow S_3 = 6F.
 \end{aligned}$$

Damit erhält man

$$\underline{Z} = S_1 + S_2 = 6S_3 - 6Q = \underline{\underline{36F - 6Q}}.$$

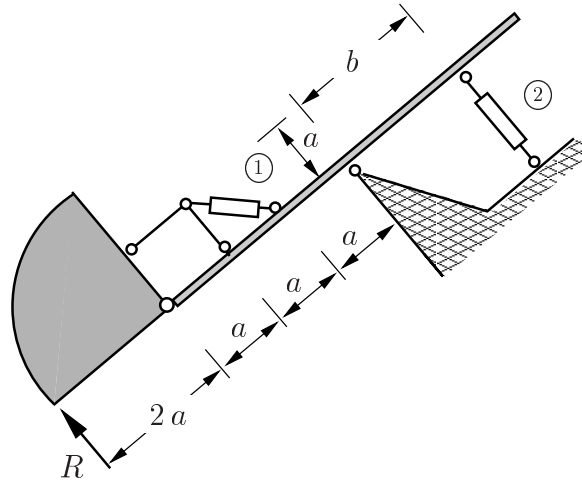
Anmerkungen:

- Durch die Wahl geeigneter Momentenbezugspunkte treten die Lagerkräfte von A und C in der Rechnung nicht auf.
- Die Last Q dient bei der Prüfmaschine als Gegengewicht zu den hier vernachlässigten Eigengewichten der Hebel und Stangen.
- Durch den Hebelmechanismus wird die auf die Probe übertragene Kraft 36 mal so groß wie die aufgebracht Belastung F .

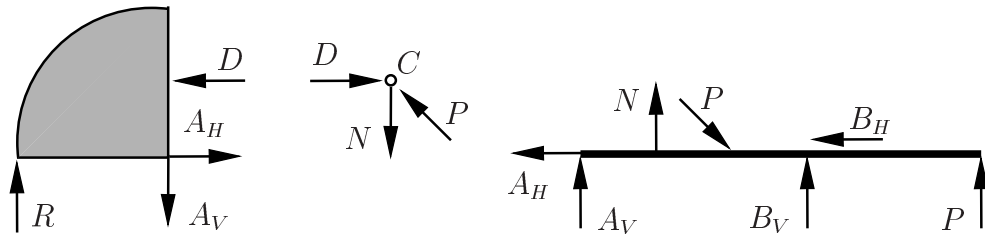
Aufgabe 1.17 Ein hydraulisch angetriebener Baggerarm soll so bemessen werden, daß er in der skizzierten Lage an der Schneide eine Reißkraft R ausübt.

Wie groß ist dann die Kraft P im Hydraulikzylinder ① ?

Wie groß muß der Hebelarm b des Zylinders ② sein, damit dieser mit der gleichen Druckkraft wie der Zylinder ① betrieben werden kann?



Lösung: Wir trennen das System und zeichnen das Freikörperbild. Dabei setzen wir von vornherein gleiche Druckkräfte P in den Zylindern voraus.



Dann lauten die Gleichgewichtsbedingungen für die Schaufel

$$\begin{aligned} \widehat{A} : \quad 2aR - aD &= 0 \quad \rightsquigarrow \quad D = 2R, \\ \rightarrow : \quad A_H - D &= 0 \quad \rightsquigarrow \quad A_H = 2R, \\ \uparrow : \quad R - A_V &= 0 \quad \rightsquigarrow \quad A_V = R \end{aligned}$$

und für den Punkt C

$$\begin{aligned} \rightarrow : \quad D - P \cos 45^\circ &= 0 \quad \rightsquigarrow \quad \underline{\underline{P}} = D\sqrt{2} = \underline{\underline{2\sqrt{2}R}}, \\ \uparrow : \quad P \sin 45^\circ - N &= 0 \quad \rightsquigarrow \quad N = 2R \end{aligned}$$

sowie das Momentengleichgewicht für den Baggerarm

$$\widehat{B} : \quad 3aA_V + 2aN - aP \cos 45^\circ - bP = 0.$$

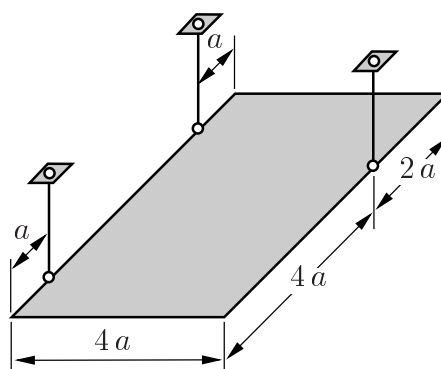
Auflösen liefert den gesuchten Hebelarm:

$$\underline{\underline{b = \frac{5}{4}\sqrt{2} a.}}$$

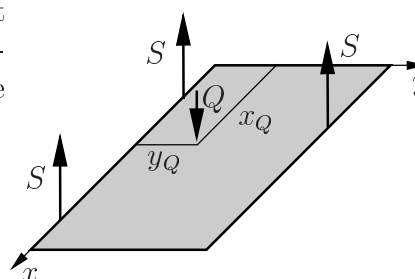
Anmerkung: Die weiteren Lagerkräfte B_V und B_H folgen aus dem *Kräftegleichgewicht* am Baggerarm.

Aufgabe 1.18: Eine rechteckige, gewichtslose Platte wird durch 3 Seile gehalten.

- a) An welche Stelle muß eine Last Q gelegt werden, damit alle drei Seile gleich beansprucht werden?
 b) Wie groß sind die Seilkräfte, wenn die Platte durch eine konstante Flächenlast p belastet wird?



Lösung: zu a) Wir führen ein Koordinatensystem ein und bezeichnen den noch unbekanntes Angriffspunkt von Q mit x_Q und y_Q . Dann lauten die Gleichgewichtsbedingungen für die Gruppe paralleler Kräfte



$$\sum F_z = 0 \quad : \quad 3S - Q = 0 ,$$

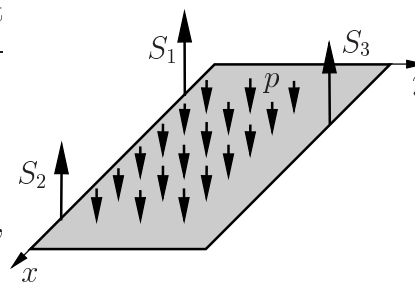
$$\sum M_x^{(0)} = 0 \quad : \quad 2aS - y_Q Q = 0 ,$$

$$\sum M_y^{(0)} = 0 \quad : \quad -5aS - aS - 2aS + x_Q Q = 0 .$$

Hieraus folgen

$$S = \frac{Q}{3} , \quad \underline{\underline{y_Q = \frac{4}{3}a}} , \quad \underline{\underline{x_Q = \frac{8}{3}a}} .$$

zu b) Die Flächenlast kann durch die Einzelast $F = 4 \cdot 6a^2 p = 24pa^2$ im Schwerpunkt ersetzt werden. Damit lauten die Gleichgewichtsbedingungen nun:



$$\sum F_z = 0 \quad : \quad S_1 + S_2 + S_3 - 24pa^2 = 0 ,$$

$$\sum M_x^{(0)} = 0 \quad : \quad 2a \cdot 24pa^2 - 4aS_3 = 0 ,$$

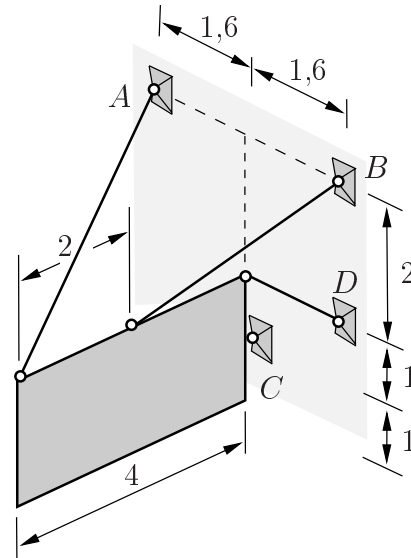
$$\sum M_y^{(0)} = 0 \quad : \quad 3a \cdot 24pa^2 - 5aS_2 - aS_1 - 2aS_3 = 0 .$$

Hieraus erhält man

$$\underline{\underline{S_3 = 12pa^2}} , \quad \underline{\underline{S_1 = 3pa^2}} , \quad \underline{\underline{S_2 = 9pa^2}} .$$

Aufgabe 1.19: Ein rechteckiges Verkehrsschild vom Gewicht G ist an einer Wand mit zwei Seilen in A und B befestigt. Es wird in C durch ein Gelenk und in D durch einen Stab senkrecht zur Ebene des Schildes gehalten. Alle Maße in Meter (m).

Gesucht sind die Kräfte im Gelenk, in den Seilen und im Stab.



Lösung: Wir schneiden das Schild frei und tragen im Freikörperbild die Komponenten aller Kräfte ein. Damit lauten die 6 Gleichgewichtsbedingungen im Raum:

$$\sum F_x = 0 \quad : \quad -A_x - B_x - C_x = 0 ,$$

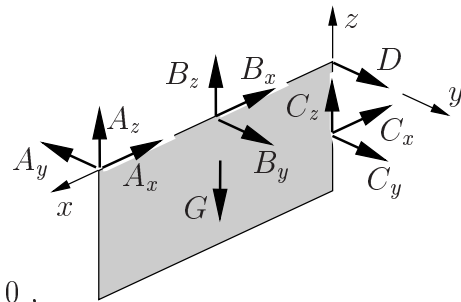
$$\sum F_y = 0 \quad : \quad -A_y + B_y + C_y + D = 0 ,$$

$$\sum F_z = 0 \quad : \quad A_z + B_z + C_z - G = 0 ,$$

$$\sum M_x^{(0)} = 0 \quad : \quad 1 C_y = 0 ,$$

$$\sum M_y^{(0)} = 0 \quad : \quad -4A_z - 2B_z + 2G + 1 C_x = 0 ,$$

$$\sum M_z^{(0)} = 0 \quad : \quad -4A_y + 2B_y = 0 .$$



Dies sind 6 Gleichungen für zunächst noch 10 Unbekannte. Weitere $2 \times 2 = 4$ Gleichungen folgen aus der Komponentenzerlegung der Seilkräfte A und B (Kraftkomponenten verhalten sich wie entsprechende Längen!):

$$\frac{A_x}{A_y} = \frac{4}{1,6} , \quad \frac{A_x}{A_z} = \frac{4}{2} , \quad \frac{B_x}{B_y} = \frac{2}{1,6} , \quad \frac{B_x}{B_z} = \frac{2}{2} .$$

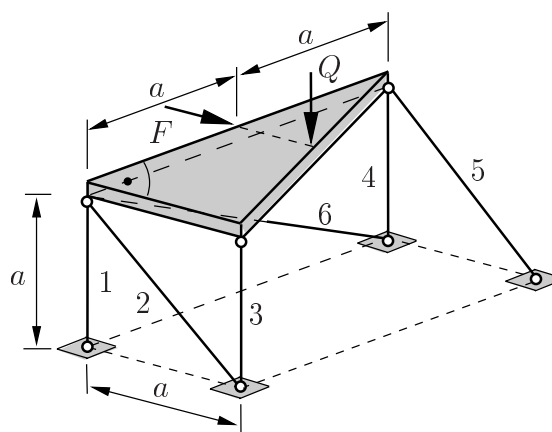
Die Auflösung ergibt schließlich:

$$\underline{\underline{A_x = B_x = \frac{G}{3}}} , \quad \underline{\underline{C_x = -\frac{2}{3}G}} , \quad \underline{\underline{A_y = -\frac{2}{15}G}} , \quad \underline{\underline{B_y = -\frac{4}{15}G}} ,$$

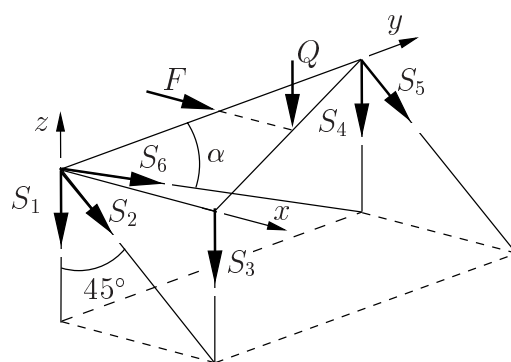
$$\underline{\underline{C_y = 0}} , \quad \underline{\underline{A_z = \frac{G}{6}}} , \quad \underline{\underline{B_z = \frac{G}{3}}} , \quad \underline{\underline{C_z = \frac{G}{2}}} , \quad \underline{\underline{D = -\frac{2}{15}G}} .$$

Aufgabe 1.20: Eine gewichtslose Platte in Form eines rechtwinkligen Dreiecks wird durch 6 Stäbe gehalten und durch die Kräfte F und Q belastet.

Man bestimme die Kräfte in den Stäben.



Lösung: Wir zeichnen das Freikörperbild und wählen ein Koordinatensystem:



Damit erhält man die folgenden Gleichgewichtsbedingungen:

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 & : & \frac{\sqrt{2}}{2} S_2 + \frac{\sqrt{2}}{2} S_5 + F &= 0 , \\ \sum F_y = 0 & : & S_6 \cos \alpha &= 0 , \\ \sum F_z = 0 & : & -S_1 - \frac{\sqrt{2}}{2} S_2 - S_3 - S_6 \sin \alpha - S_4 - \frac{\sqrt{2}}{2} S_5 - Q &= 0 , \\ \sum M_x^{(0)} = 0 & : & -2aS_4 - 2a \frac{\sqrt{2}}{2} S_5 - aQ &= 0 , \\ \sum M_y^{(0)} = 0 & : & aS_3 + \frac{a}{2} Q &= 0 , \\ \sum M_z^{(0)} = 0 & : & -2a \frac{\sqrt{2}}{2} S_5 - aF &= 0 . \end{aligned}$$

Auflösen liefert die gesuchten Stabkräfte:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{S_1}} &= \underline{\underline{\frac{F}{2}}} , & \underline{\underline{S_2}} &= \underline{\underline{-\frac{\sqrt{2}}{2} F}} , & \underline{\underline{S_3}} &= \underline{\underline{-\frac{Q}{2}}} , \\ \underline{\underline{S_4}} &= \underline{\underline{\frac{1}{2} (F - Q)}} , & \underline{\underline{S_5}} &= \underline{\underline{-\frac{\sqrt{2}}{2} F}} , & \underline{\underline{S_6}} &= \underline{\underline{0}} . \end{aligned}$$

Aufgabe 1.21: An der Plattform eines Fernsehturms greifen infolge der Aufbauten und der Windlasten die in der Abbildung dargestellten Kräfte an.

Das angreifende Kräftesystem soll zunächst durch eine resultierende Kraft und ein resultierendes Moment im Lagerpunkt A der Plattform ersetzt werden.

Danach ist das Moment am Fußpunkt B des Turms mit Hilfe des *Versatzmoments* zu ermitteln.

Gegeben: $\alpha = 45^\circ$.

Lösung: Um die angreifenden Kräfte im Lagerpunkt der Plattform zu berechnen, werden zunächst die Kräfte und die zugehörigen Hebelarme bezüglich des angegebenen Bezugssystems benötigt. Diese folgen für die vertikalen Einzelkräfte \mathbf{F}_1 , \mathbf{F}_2 und \mathbf{F}_3 unmittelbar:

$$\text{Kräfte:} \quad \mathbf{F}_1 = -2P \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{F}_2 = -P \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{F}_3 = -P \mathbf{e}_z,$$

$$\text{Hebelarme:} \quad \mathbf{r}_{AF_1} = -r \mathbf{e}_y, \quad \mathbf{r}_{AF_2} = -r \mathbf{e}_x, \quad \mathbf{r}_{AF_3} = \frac{\sqrt{2}}{2} r (\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y).$$

Für die Windbelastung, die die kreisförmige Plattform an jeder Stelle senkrecht anströmt, erkennt man, daß die Wirkungslinie der Resultierenden durch den Lagerpunkt der Plattform verläuft ($\leadsto \mathbf{r}_{AF_w} = \mathbf{0}$). Für die Kraftresultierende von q_w folgt

$$\mathbf{F}_w = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\pi}{2} r q_w (-\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y).$$

Aus der Summe der Einzelkräfte berechnet sich dann die resultierende Kraft

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \mathbf{F}_w = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\pi}{2} r q_w (-\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y) - 4P \mathbf{e}_z.$$

Für das resultierende Moment folgt bezüglich des Koordinatenursprungs

$$\mathbf{M}_A = \sum_{i=1}^3 \mathbf{r}_{AF_i} \times \mathbf{F}_i = Pr \left(2 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \mathbf{e}_x + Pr \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \right) \mathbf{e}_y.$$

Bezieht man anschließend das berechnete Moment auf den Fußpunkt des Masts, muß zu \mathbf{M}_A das *Versatzmoment* $\mathbf{M}_V = \mathbf{r}_{BA} \times \mathbf{R}$ addiert werden. Dieses berechnet sich mit dem Hebelarm $\mathbf{r}_{BA} = h \mathbf{e}_z$ zu

$$\mathbf{M}_V = \mathbf{r}_{BA} \times \mathbf{R} = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\pi}{2} r q_w h (-\mathbf{e}_x - \mathbf{e}_y).$$

Damit kann das Moment im Fußpunkt des Masts angegeben werden:

$$\mathbf{M}_B = \mathbf{M}_A + \mathbf{M}_V.$$

