

Vorwort

Die Mechanik ist nicht nur das älteste Teilgebiet der Physik, sie stellt bis heute die Grundlage für die ganze theoretische Physik dar. So ist z. B. die Quantenmechanik ohne die klassische Mechanik kaum verständlich, vielleicht sogar nicht einmal formulierbar. Aber auch jede klassische Feldtheorie, wie etwa die Elektrodynamik, baut auf dem von der Mechanik vorgegebenen Fundament auf. Dabei geht es nicht nur um die physikalischen Grundbegriffe, die man hier kennen und anwenden lernt, sondern auch um den formalen Rahmen der Mechanik, ihre mathematisch-geometrische Struktur als Prototyp einer physikalischen Theorie. Diese Leitfunktion zieht sich bis hinein in Fragen der modernen Forschung, wo man immer wieder – wenn auch oft in ganz anderen Zusammenhängen – auf die Mechanik zurückkommt.

Es ist daher nicht verwunderlich, wenn ihre *Darstellung* stets auch Entwicklungen der modernen Physik widerspiegelt. Wir setzen heute die Akzente in diesem klassischen Gebiet wesentlich anders als zu Zeiten von Arnold Sommerfeld oder in den fünfziger Jahren. Z. B. spielen *Symmetrien* und *Invarianzprinzipien* eine wichtige Rolle, ebenso die *Struktur des Raum-Zeitkontinuums* und die *geometrische Natur* der Mechanik, während die Anwendungen der Theorie der Differentialgleichungen etwas mehr in den Hintergrund gerückt sind. Anhand der Mechanik lernt man das Aufstellen von allgemeinen Prinzipien, aus denen physikalische Bewegungsgleichungen folgen und die sich über die Mechanik hinaus verallgemeinern lassen; man gewinnt die Erkenntnis, welche Bedeutung Symmetrien für die Behandlung physikalischer Systeme haben und, nicht zuletzt, die Übung, wie man ein präzises Begriffssystem aufstellt, mit dem sich ein physikalisches Teilgebiet verstehen und klar formulieren läßt. Das sind grundsätzliche Bezüge, die man anhand der noch weitgehend anschaulichen klassischen Mechanik lernt, dann aber soweit abstrahieren soll, daß sie in anderen Bereichen der Physik erkennbar und anwendbar werden.

Über ihrer Bedeutung als Fundament der ganzen theoretischen Physik und als erstes, noch weitgehend anschauliches Übungsfeld für physikalische Begriffsbildungen wollen wir aber nicht vergessen, daß die Mechanik für sich genommen ein wunderschönes Gebiet ist. Sie ist für Anfänger und Anfängerinnen im allgemeinen zunächst schwer zu lernen, weil sie vielschichtig und in ihrem Aufbau heterogener ist als etwa die Elektrodynamik. Man wird dieses reizvolle, aber etwas spröde Gebiet in der Regel nicht im ersten Anlauf meistern, sondern wird im Laufe der Zeit immer wieder auf Teilaspekte der Mechanik zurückkommen und dabei – vielleicht mit Überraschung – feststellen, daß man sie dabei noch einmal und ein Stück tiefer versteht.

Es ist auch ein Irrtum zu glauben, die Mechanik sei ein abgeschlossenes und längst archiviertes Gebiet. Spätestens im 6. Kapitel wird man lernen, daß sie auch heute noch ein interessantes Forschungsgebiet ist und daß die moderne, qualitative Mechanik noch viele interessante Forschungsthemen bereithält.

Ziele und Aufbau

Einige allgemeine Leitlinien für den Aufbau dieses Buches waren die folgenden:

I) Dieser Kurs über Mechanik ist so konzipiert, daß er als Einstieg in die theoretische Physik im modernen Sinne dienen kann. Anhand von Systemen der makroskopischen, „vorstellbaren“ Mechanik werden Konzepte und Methoden eingeführt, die in allen Bereichen der Physik vorkommen. Dabei werden diejenigen betont und besonders motiviert, deren Tragfähigkeit über die klassische Mechanik hinausreicht. So hat die Theorie des Kreisels, um nur ein Beispiel zu nennen, unter anderem auch deshalb besondere Bedeutung, weil man in ihr ein erstes anschauliches Beispiel für eine Liegruppe in der Physik, der Drehgruppe im dreidimensionalen Raum, kennenlernt.

II) So wichtig die (wenigen) integrablen Fälle für das Verständnis sind, es bleibt unbefriedigend, wenn man sich auf diese und auf lokale Existenzaussagen für Lösungen von nichtintegrablen Systemen beschränkt. Im fortlaufenden Text und in den *Praktischen Übungen* habe ich daher eine Reihe einfacher, aber nichttrivialer, Beispiele ausgearbeitet oder beschrieben, die jeder Leser auf einem Kleinrechner nachvollziehen, erweitern und variieren kann. Diese Beispiele dienen der Vertiefung, sind aber einfach genug, daß man kaum Gefahr läuft, über der Beschäftigung mit dem Rechner die Physik zu vergessen, die man vertiefen wollte.

III) Schon die Mechanik trägt deutliche geometrische Züge. Im 5. Kapitel wird der geometrische Charakter dieses Gebietes klar herausgearbeitet. Gleichzeitig wird damit eine Einführung in die strenge, differentialgeometrische Formulierung gegeben, die man unbedingt kennen muß, wenn man die moderne mathematische Literatur zur Mechanik lesen möchte. Ich hoffe hier ein wenig dazu beizutragen, daß die Kluft zwischen den „physikalischen“ Büchern über Mechanik und der modernen, mathematischen Literatur etwas kleiner und leichter überwindbar wird.

IV) Auch wenn man die Mechanik nicht in ihrem vollen Umfang lernen möchte, sollte man doch eine Vorstellung über globale und qualitative Fragestellungen der Mechanik haben, die Gegenstand der modernen Forschung auf diesem Gebiet sind. Das 6. Kapitel gibt daher einen Überblick über die notwendigen Begriffsbildungen und die wichtigsten Fragen der qualitativen Dynamik, die in so faszinierende Phänomene wie das deterministische Chaos überleiten.

Der Schwierigkeitsgrad der einzelnen Kapitel ist unterschiedlich. Das vierte ist aus physikalischer Sicht vermutlich das schwierigste, das fünfte ist sicher das mathematisch anspruchsvollste Kapitel. Dabei ist mir natürlich klar, daß diese Bewertung subjektiv ist und daß verschiedene Leser je nach persönlichen Neigungen und Vorkenntnissen an ganz unterschiedlichen Stellen ihren ersten Schwierigkeiten begegnen werden. Auf das vierte Kapitel wird man in der Elektrodynamik zurückkommen und die physikalische Bedeutung der Speziellen Relativitätstheorie aus einem anderen Blickwinkel erkennen. Wenn man möchte, kann man das fünfte Kapitel (Geometrische Aspekte) beim ersten Durchgang auslassen und erst auf der Basis einer gründlichen Kenntnis des zweiten und des sechsten studieren. Ich habe mich bemüht, den Text weitgehend „selbsttragend“ zu konzipieren, d.h. unter anderem, daß man fast alle Herleitungen nachrechnen und nachvollziehen kann. Das mag an manchen Stellen nicht einfach sein und einige Zeit des Grübelns erfordern. Man sollte aber nicht zu rasch aufgeben, denn was man nicht selbst einmal „durchspielt“, versteht man nicht wirklich.

Zum Umfang dieses Buches

Das Buch enthält wesentlich mehr Stoff als man in einer vierstündigen Vorlesung in einem Semester bewältigen kann. In diesem Fall wird man also eine Auswahl treffen müssen und den übrigen Text als ergänzende Lektüre verwenden. Das erste Kapitel, das noch keinen Gebrauch von Variationsprinzipien und Begriffen der kanonischen Mechanik macht, habe ich so angelegt, daß man es als Begleittext zu einer Vorlesung über Experimentalphysik (bzw. einem integrierten Kursus) oder zu einer Einführung in die theoretische Physik verwenden kann. In diesem Fall kann die eigentliche Mechanikvorlesung im wesentlichen mit dem zweiten Kapitel beginnen und dann auch bis in das 6. oder 7. Kapitel vordringen.

Neben den Praktischen Übungen enthält das Buch zahlreiche Aufgaben und deren Lösungen. Ein kurzer historischer Exkurs gibt die Lebensdaten einiger Forscherpersönlichkeiten, die zur Entwicklung der Mechanik beigetragen haben.

Mathematische Hilfsmittel

Als Physiker oder Physikerin muß man eine gewisse Flexibilität im Gebrauch der Mathematik lernen: Einerseits kann man unmöglich alle deduktiven Schritte bis in alle Einzelheiten und in aller Strenge durchführen, da man auf diese Weise erst sehr spät zu den physikalisch wesentlichen Aussagen kommt. Andererseits muß man wenigstens einige der Grundlagen in ihrer mathematischen Gestalt kennen und im übrigen wenigstens „wissen, wie es geht“, d.h. man sollte immer in der Lage sein, Einzelheiten der Argumentation mit den Hilfsmitteln zu ergänzen, die man in den Kursen über Mathematik gelernt hat. Für die Mechanik ist charakteristisch, daß sie Begriffe, Methoden und Sätze aus ganz unterschiedlichen mathematischen Gebieten verwendet. Diesen etwas großzügigen Umgang mit den mathematischen Grundlagen wird man auch in diesem Buch finden. Einige mathematische Aspekte sind weitgehend ausgearbeitet, bei anderen wird auf Kenntnisse aus der Analysis und der Linearen Algebra verwiesen. Man kann auch hier nicht erwarten, daß man alle Begriffe aus der Mathematik schon parat hat, wenn sie in der Physik verwendet werden. Im Einzelfall ist es ratsam, die Dinge punktuell nachzulesen oder – im Idealfall – sich aus den Grundlagen selbst abzuleiten.

Im Anhang A habe ich einige generelle Aussagen zusammengestellt, die für den Text hilfreich sein mögen.

Danksagung

Dieses Buch ist aus Vorlesungen im Rahmen des Mainzer Theoriekursus entstanden, angereichert durch ein Seminar über geometrische Aspekte der Mechanik. Daher möchte ich an erster Stelle den Studierenden und meinen Mitarbeitern danken, die durch ihr Interesse, ihre Begeisterung und durch ihre kritischen Fragen viel zu seiner Gestaltung beigetragen haben.

In meinen Zürcher Jahren habe ich viel Anregung durch Diskussionen und Gespräche mit Res Jost, Klaus Hepp und Norbert Straumann erfahren, die mein Interesse an diesem wunderschönen Gebiet vertieft haben. Klaus Hepp danke ich besonders für freundschaftlichen und hilfreichen Rat bei der Gestaltung dieses Buches. Ebenso möchte ich Nikolaos Papadopoulos, mit dem ich besonders gerne die geometrischen Aspekte der Mechanik diskutiere, und Manfred Stingl für konstruktive Kritik und Verbesserungsvorschläge danken.

Rainer Schöpf danke ich für die Mitarbeit bei den Lösungen der Aufgaben, die wir ursprünglich als eigenes Bändchen publiziert hatten. Peter Beckmann hat mir freundlicherweise die schönen Figuren zur logistischen Gleichung (Kap. 6) zur Verfügung gestellt und mir einige Hinweise zur Auswahl von Beispielen zum deterministischen Chaos gegeben.

Die Zusammenarbeit mit den Mitarbeitern des Springer-Verlags war ausgezeichnet, wofür ich besonders Herrn Dr. Kölsch und Herrn C.-D. Bachem danke.

Dieses Buch widme ich allen Studierenden, die sich mit der Mechanik intensiv auseinandersetzen möchten. Wenn ich ihre Begeisterung wecken und sie für die Faszination der Physik empfänglich machen konnte, dann ist ein wesentliches Ziel dieses Buches erreicht.

Mainz, April 1996

Florian Scheck

die sich elementar integrieren läßt. Zum Beispiel gilt für die Lösung die zur Zeit $\tau = 0$ bei $z_1 = 0$ losläuft

$$\int_0^u \frac{du'}{\sqrt{u'^2 + 1}} = \int_0^\tau d\tau', \quad \text{bzw.} \quad \ln(u + \sqrt{u^2 + 1}) = \tau,$$

woraus man die Lösung $u = \frac{1}{2}(e^\tau - e^{-\tau})$ und die Lösung für z_1 erhält

$$z_1(\tau) = 2 \operatorname{arctg}(\sinh \tau).$$

Setzt man wieder $z_1 = \pi - \varepsilon$, d. h. $u = \operatorname{ctg}(\varepsilon/2) \simeq (2/\varepsilon)$, so ist $u + \sqrt{u^2 + 1} \simeq (4/3)$ und $\tau(\varepsilon) \simeq \ln(4/\varepsilon)$. Die Laufzeit von $z_1 = 0$ nach $z_1 = \pi$ divergiert logarithmisch.

1.23 Beispiel: Zweiteilchensystem mit Zentralkraft

Als weiteres und wichtiges Beispiel betrachten wir das Zweiteilchensystem (im \mathbb{R}^3) mit Zentralkraft, das sich mit sehr ähnlichen Methoden wie das eindimensionale Problem des Abschn. 1.21 behandeln läßt.

Das Zweiteilchensystem haben wir allgemein im Abschn. 1.6 analysiert. Da es sich um eine *Zentralkraft* handeln soll, die wir als stetig voraussetzen, kann man für diese ein kugelsymmetrisches Potential $U(r)$ angeben und es gilt

$$\mu \ddot{\mathbf{r}} = -\nabla U(r) \quad \text{mit} \quad \mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2), \quad (1.60)$$

wo $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ die Relativkoordinate ist, $r = |\mathbf{r}|$. Lautet die Zentralkraft $\mathbf{F} = F(r)\hat{\mathbf{r}}$, so ist das zugehörige Potential $U(r) = -\int_{r_0}^r F(r') dr'$. Die Bewegung findet in der Ebene statt, die auf dem erhaltenen Relativdrehimpuls $\mathbf{l}_{\text{rel}} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ senkrecht steht. In dieser Ebene kann man z. B. Polarkoordinaten einführen, $x = r \cos \varphi$ und $y = r \sin \varphi$ und es ist $\dot{\mathbf{r}}^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2$

Die Energie E der Relativbewegung ist erhalten, da der Schwerpunkt sich kräftefrei bewegt und somit der Gesamtimpuls erhalten ist,

$$T_S + E = \frac{\mathbf{P}^2}{2M} + \frac{\mu}{2}(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) + U(r) = \text{const.} \quad (1.61)$$

Es gilt also mit $l \equiv |\mathbf{l}| = \mu r^2 \dot{\varphi}$,

$$E = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + \frac{l^2}{2\mu r^2} + U(r) = \text{const.} \quad (1.62)$$

$T_r := \mu \dot{r}^2 / 2$ ist die kinetische Energie der Radialbewegung. Der Term $l^2 / 2\mu r^2 = \mu r^2 \dot{\varphi}^2 / 2$ läßt sich sowohl als kinetische Energie der Rotationsbewegung lesen als auch, dazu äquivalent, als potentielle Energie der Zentrifugalkraft,

$$\mathbf{Z} = -\nabla \left(\frac{1}{2} \mu r \dot{\varphi}^2 \right) = -\hat{\mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{2} \mu r^2 \dot{\varphi}^2 \right) = -\mu r \dot{\varphi}^2 \hat{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{r} \mathbf{v}_r^2 \hat{\mathbf{r}}.$$

Aus dem Drehimpulssatz

$$l = \mu r^2 \dot{\varphi} = \text{const} \quad (1.63)$$

und dem Energiesatz (1.62) folgen die Differentialgleichungen für $r(t)$ und $\varphi(t)$

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{\mu}(E - U(r)) - \frac{l^2}{\mu^2 r^2}} \equiv \sqrt{\frac{2}{\mu}[E - U_{\text{eff}}(r)]} \quad (1.64)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{l}{\mu r^2}, \quad \text{wo} \quad (1.65)$$

$$U_{\text{eff}}(r) := U(r) + \frac{l^2}{2\mu r^2} \quad (1.66)$$

als effektives Potential betrachtet werden kann. Man sieht dann besonders deutlich die nahe Verwandtschaft zu (1.51), der eindimensionalen Bewegung. Wie dort ist auch (1.64) eine Differentialgleichung mit trennbaren Variablen. Diese kann man weiter behandeln wie dort, man kann aber auch die aus (1.64) und (1.65) folgende Differentialgleichung

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{l}{r^2 \sqrt{2\mu(E - U_{\text{eff}})}} \quad (1.67)$$

diskutieren, aus der folgt, daß

$$\varphi - \varphi_0 = l \int_{r_0}^{r(\varphi)} \frac{dr}{r^2 \sqrt{2\mu[E - U_{\text{eff}}]}}. \quad (1.68)$$

Wir schreiben $E = T_r + U_{\text{eff}}(r)$. Da $T_r \geq 0$ ist, folgt wiederum, daß $E \geq U_{\text{eff}}(r)$ sein muß. Wenn also $r(t)$ einen Punkt r_1 erreicht, für den $E = U_{\text{eff}}(r_1)$ ist, so ist dort $\dot{r}(r_1) = 0$. Hier heißt das aber (im Fall $l \neq 0$) nicht, daß der Massenpunkt wie bei einer eindimensionalen Bewegung wirklich zur Ruhe kommt und dann umkehrt. Vielmehr hat er einen Punkt größter Ferne (*Aphel*) oder einen Punkt größter Nähe (*Perihel*) vom Kraftzentrum erreicht. Solange $l \neq 0$, hat das Teilchen im Punkt r_1 zwar keine radiale Geschwindigkeit mehr, wohl aber eine Winkelgeschwindigkeit.

Es sind verschiedene Fälle möglich:

i) Es ist $r(t) \geq r_{\min} \equiv r_P$ (von *Perihel*). Dies ist eine infinite Bewegung. Das Teilchen kommt aus dem Unendlichen, erreicht sein Perihel und verschwindet wieder im Unendlichen. Bei *attraktivem* Potential kann das so aussehen wie in Abb. 1.14 skizziert.

Bei *repulsivem* Potential kann das etwa wie in Abb. 1.15 skizziert aussehen. Im ersten Fall umläuft das Teilchen das Kraftzentrum einmal oder mehrmals. Im zweiten Fall wird es vom Kraftzentrum abgestoßen und somit abgelenkt.

ii) $r_{\min} \equiv r_P \leq r(t) \leq r_{\max} \equiv r_A$ (von *Aphel*). Hier liegt die ganze Bahn des Teilchens im Kreisring zwischen den beiden Kreisen mit Radius r_P bzw. r_A . Der Teil der Bahn, der zwischen einem Apheldurchgang und dem darauf folgenden Periheldurchgang liegt, und den wir in Abb. 1.16 skizziert haben, reicht aus, um die ganze Bahn zu konstruieren. Man kann sich nämlich überlegen, daß die Bahn symmetrisch sowohl bezüg-

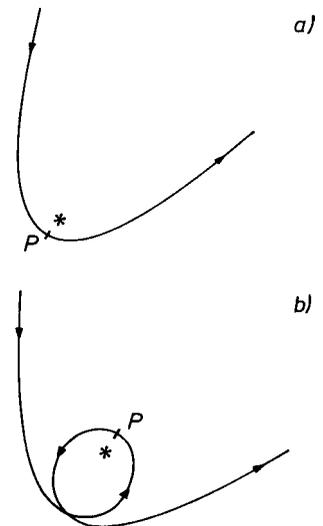


Abb. 1.14. Verschiedene, infinite Bahntypen bei attraktiver, potentieller Energie. P ist der Punkt größter Annäherung an das Kraftzentrum

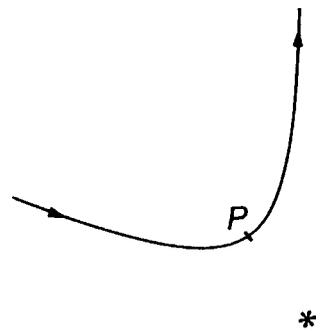


Abb. 1.15. Typische infinite Bahnkurve bei repulsivem Zentralpotential

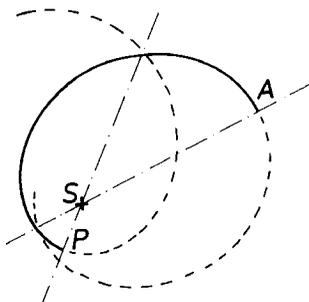


Abb. 1.16. Gebundene oder finite Bahnkurve bei attraktivem Zentralpotential. Die Bahn hat als Symmetrieachsen die Linien SA , vom Kraftzentrum S zum Punkt A größter Ferne, und SP , wo P der Punkt größter Annäherung ist. Daher kann man aus dem Zweig PA der Bahn die ganze Rosettenkurve konstruieren. (Die gezeigte Kurve gehört zu $\alpha = 1,3$, $b = 1,5$, des weiter unten diskutierten Beispiels)

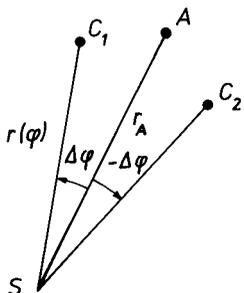


Abb. 1.17. Zwei symmetrische Positionen vor und nach Durchlaufen des Aphels

lich der Achse SA als auch bezüglich der Achse SP sein muß. Man betrachte dazu zwei zu A symmetrische Polarwinkel $-\Delta\varphi$ und $\Delta\varphi$, mit $\Delta\varphi = \varphi - \varphi_A$ und (Abb. 1.17)

$$\Delta\varphi = l \int_{r_A}^{r(\varphi)} \frac{dr}{r^2 \sqrt{2\mu[E - U_{\text{eff}}]}}$$

Es ist

$$U_{\text{eff}}(r) = U_{\text{eff}}(r_A) + [U_{\text{eff}}(r) - U_{\text{eff}}(r_A)] = E + [U_{\text{eff}}(r) - U_{\text{eff}}(r_A)]$$

und somit

$$\Delta\varphi = l \int_{r_A}^{r(\varphi)} \frac{dr}{r^2 \sqrt{2\mu[U_{\text{eff}}(r_A) - U_{\text{eff}}(r)]}} \quad (1.69)$$

Man sieht aber, daß man genauso gut von A nach C_2 , statt C_1 , laufen kann, indem in dieser Gleichung für $\Delta\varphi$ das andere Vorzeichen der Wurzel wählt. Nach (1.67) heißt das, daß man die Durchlaufrichtung ändert, oder, nach (1.64) und (1.65), daß man die Zeitrichtung umkehrt. Da für $\Delta\varphi$ und $-\Delta\varphi$ jedesmal $r(\varphi)$ dasselbe ist, ist mit jedem Bahnpunkt $C_1 = \{r(\varphi), \varphi = \varphi_A + \Delta\varphi\}$ auch $C_2 = \{r(\varphi), \varphi = \varphi_A - \Delta\varphi\}$ ein Bahnpunkt. Dieselbe Überlegung gilt bei P . Die behauptete Symmetrie ist somit bewiesen.

Wir illustrieren diese Ergebnisse am Beispiel eines Zentralpotentials vom Typus $U(r) = -a/r^\alpha$.

Zentralpotential vom Typus $U(r) = -a/r^\alpha$. Seien (r, φ) Polarkoordinaten in der Bahnebene. Es gilt

$$\frac{dr}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2E}{\mu} - \frac{2U(r)}{\mu} - \frac{l^2}{\mu^2 r^2}} \quad (1.70)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d}{\mu r^2} \quad (1.71)$$

Wir betrachten hier speziell die Bahnen mit $E < 0$ und setzen daher $B := -E$. Außerdem führen wir dimensionale Variable ein, die wie folgt definiert seien:

$$\varrho(\tau) := \frac{\sqrt{\mu B}}{l} r(t)$$

$$\tau := \frac{B}{l} t.$$

Dann lauten die Bewegungsgleichungen (1.70) und (1.71)

$$\frac{d\varrho}{d\tau} = \pm \sqrt{\frac{2b}{\varrho^\alpha} - \frac{1}{\varrho^2} - 2} \quad (1.70')$$

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{1}{\varrho^2}. \quad (1.71')$$

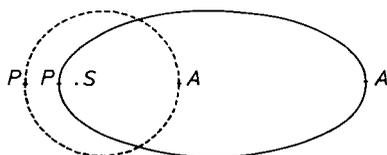


Abb. 1.18 Zwei Keplerellipsen mit verschiedener Exzentrizität. (Im Potential $U(r) = -a/r^\alpha$ ist $\alpha = 1$). Siehe auch die Praktische Übung Nr. 4

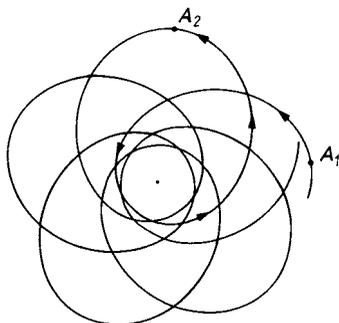


Abb. 1.19 Im Potential $U(r) = -a/r^\alpha$ ist $\alpha = 1,3$ gewählt, d. h. die Rosettenbahn „eilt voraus“. Es ist $b = 1,5$ gewählt

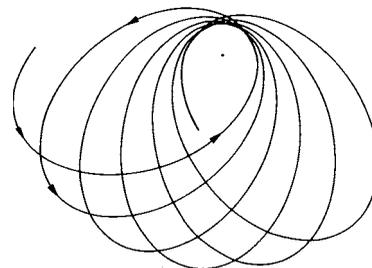


Abb. 1.20 Ähnliche Situation wie in Abb. 1.19, hier mit der Wahl $\alpha = 1,1$, $b = 2$

Dabei ist

$$b := \frac{a}{B} \left(\frac{\sqrt{\mu B}}{l} \right)^\alpha.$$

Im Spezialfall $\alpha = 1$ erhalten wir wieder das Keplerproblem, und die Lösungen von (1.70') und (1.71') lauten dann

$$\varrho(\varphi) = 1/b[1 + \varepsilon \cos(\varphi - \varphi_0)] \quad \text{mit} \quad \varepsilon = \sqrt{1 - 2/b^2},$$

(φ_0 ist frei wählbar, z. B. $\varphi_0 = 0$).

In den folgenden Abb. 1.18–22 sind Bahnkurven $\varrho(\varphi)$ für verschiedene α und b aufgetragen.

Abbildung 1.18 zeigt zwei Keplerellipsen für $b = 1,5$ und $b = 3$. Die Abb. 1.19, 20 illustrieren, wie die Bahn für $\alpha > 1$ der Keplerellipse „voreilt“. Ebenso zeigen die Bilder 1.21, 22, wie die Bahn für $\alpha < 1$ „nachhinkt“. In beiden Fällen tritt (gegenüber dem Keplerschen Fall $\alpha = 1$) eine Drehung des Perihels auf. Für $\alpha > 1$ ist die Anziehung bei kleinen Abständen stärker, es entsteht eine Rosettenbahn, bei der das Perihel voreilt. Für $\alpha < 1$ ist die Anziehung bei kleinen Abständen schwächer als für $\alpha = 1$, es entsteht ebenfalls eine Rosettenbahn, bei der aber das Perihel gegenüber der Keplerellipse ständig zurückbleibt.

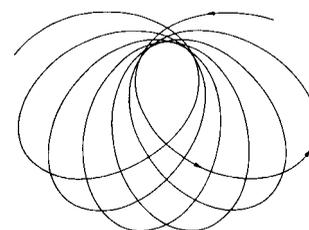


Abb. 1.21. Beispiel für eine Rosettenbahn, die „nachhinkt“, mit der Wahl $\alpha = 0,9$, $b = 2$ für die Parameter

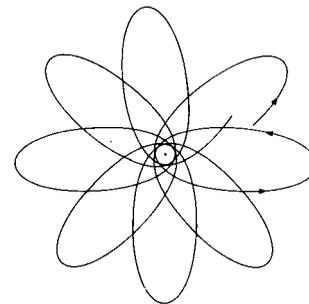


Abb. 1.22. Eine Rosettenbahn, die noch stärker als in Abb. 1.21 nachhinkt mit der Wahl $\alpha = 0,8$, $b = 3$

1.24 Rotierendes Koordinatensystem: Coriolis- und Zentrifugalkräfte

Sei \mathbf{K} ein Inertialsystem; \mathbf{K}' sei ein zweites System, das bei $t = 0$ mit \mathbf{K} zusammenfällt und das mit der Drehgeschwindigkeit $\omega = |\omega|$ um die Richtung $\hat{\omega} = \omega/\omega$ rotiert, wie in Abb. 1.23 gezeigt. (\mathbf{K}' ist daher kein Inertialsystem.) Der Ortsvektor eines Massenpunktes sei mit $\mathbf{r}(t)$ bezüglich \mathbf{K} , mit $\mathbf{r}'(t)$ bezüglich \mathbf{K}' bezeichnet. Es ist $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}'(t)$.

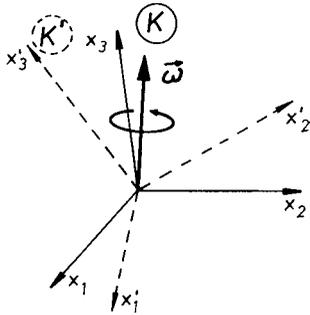


Abb. 1.23. Das Koordinatensystem \mathbf{K}' rotiert mit der Winkelgeschwindigkeit ω um das Inertialsystem \mathbf{K}

Für die Geschwindigkeiten gilt folgendes:

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}',$$

wo \mathbf{v}' sich auf \mathbf{K}' , \mathbf{v} sich auf \mathbf{K} bezieht, oder, wenn wir die zeitliche Änderung, wie sie von \mathbf{K}' aus beobachtet wird, mit d'/dt bezeichnen,

$$\frac{d'}{dt}\mathbf{r} = \frac{d}{dt}\mathbf{r} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad \text{bzw.} \quad \frac{d}{dt}\mathbf{r} = \frac{d'}{dt}\mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}.$$

Dabei bedeuten

d/dt : zeitliche Änderung, von \mathbf{K} aus beobachtet

d'/dt : zeitliche Änderung, von \mathbf{K}' aus beobachtet .

Eine solche Beziehung wie die zwischen $d\mathbf{r}/dt$ und $d'\mathbf{r}/dt$ gilt aber für jede vektorwertige Funktion $\mathbf{a}(t)$:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{a} = \frac{d'}{dt}\mathbf{a} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a}. \quad (1.72)$$

Nehmen wir an, daß $\boldsymbol{\omega}$ selbst konstant ist, so läßt sich der Zusammenhang (1.72) in folgender Weise auf $\mathbf{a} \equiv d\mathbf{r}/dt$ anwenden:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2}\mathbf{r}(t) &= \frac{d'}{dt}\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right) + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d'}{dt}\left[\frac{d'}{dt}\mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}\right] + \boldsymbol{\omega} \times \left[\frac{d'}{dt}\mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}\right] \\ &= \frac{d'^2}{dt'^2}\mathbf{r} + 2\boldsymbol{\omega} \times \frac{d'}{dt}\mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}). \end{aligned} \quad (1.73)$$

(Falls $\boldsymbol{\omega}$ zeitabhängig ist, gibt es noch einen weiteren Term $(d'\boldsymbol{\omega}/dt) \times \mathbf{r} = (d\boldsymbol{\omega}/dt) \times \mathbf{r} = \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}$ in dieser Gleichung.)

Da \mathbf{K} ein Inertialsystem ist, gelten dort die Newtonschen Bewegungsgleichungen

$$m \frac{d^2}{dt^2}\mathbf{r}(t) = \mathbf{F}.$$

Setzen wir den Zusammenhang (1.73) zwischen der Beschleunigung $d^2\mathbf{r}/dt^2$, wie sie im System \mathbf{K} beobachtet wird, und der Beschleunigung $d'^2\mathbf{r}/dt'^2$, wie sie in \mathbf{K}' gesehen wird, ein, so entsteht die folgende Bewegungsgleichung:

$$m \frac{d'^2}{dt'^2}\mathbf{r} = \mathbf{F} - 2m\boldsymbol{\omega} \times \frac{d'}{dt}\mathbf{r} - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}). \quad (1.74)$$

Im System \mathbf{K}' , das kein Inertialsystem ist, ist der Massenpunkt außer der wirklichen Kraft \mathbf{F} noch der

$$\text{Corioliskraft} \quad \mathbf{C} = -2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' \quad \text{sowie der} \quad (1.75)$$

$$\text{Zentrifugalkraft} \quad \mathbf{Z} = -m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \quad (1.76)$$

unterworfen, deren Wirkungsrichtung man sich leicht überlegt.

1.25 Beispiele zu Abschnitt 1.24

i) Als Beispiel für ein solches rotierendes Koordinatensystem kann jedes fest mit der Erde verbundene System dienen. Die Tangentialebene in einem Punkt A der Erdoberfläche dreht sich horizontal um die Komponente ω_v von ω , außerdem aber noch als Ganzes um die Komponente ω_h (tangential zum Meridian durch A) von ω , Abb. 1.24.

Bewegt sich beispielsweise ein Massenpunkt in einer horizontalen Richtung (d. h. in der Tangentialebene), so ist in (1.75) nur die vertikale Komponente ω_v wirksam. Auf der nördlichen Halbkugel erfährt der Massenpunkt eine *Rechtsabweichung*.

Bei einer vertikalen Bewegung ist (in erster Näherung) nur ω_h wirksam; auf der nördlichen Halbkugel ergibt sich daraus eine *Ostabweichung*, die sich beispielsweise für den freien Fall leicht abschätzen läßt. Wir wollen sie auf zwei Weisen näherungsweise berechnen. Der Massenpunkt m stehe fest über dem Punkt A der Erdoberfläche (Abb. 1.25 in Aufsicht auf den Nordpol). Seine Tangentialgeschwindigkeit (bezüglich \mathbf{K} !) ist $v_T(R+h) = (R+h)\omega \cos \varphi$.

a) Im raumfesten Inertialsystem: Man läßt ihn zur Zeit $t = 0$ von der Spitze eines Turms der Höhe H fallen. Von \mathbf{K} aus gesehen, fliegt m in horizontaler (östlicher) Richtung mit der konstanten Geschwindigkeit $v_T(R+H) = (R+H)\omega \cos \varphi$, während er in vertikaler Richtung mit der konstanten Fallbeschleunigung g fällt. Daher sind die Höhe H und die Fallzeit T wie gewohnt über $H = \frac{1}{2}gT^2$ verknüpft. Hätte der Fußpunkt A des Turmes zur gleichen Zeit ($t = 0$) die Erdoberfläche tangential mit der konstanten Geschwindigkeit $v_T(R)$ verlassen, so würde der Massenpunkt nach der Zeit T im Abstand

$$\Delta_0 = [v_T(R+H)v_T(R)]T = H\omega T \cos \varphi$$

östlich von A auftreffen. In Wirklichkeit hat sich der Turm während der Fallzeit in östlicher Richtung beschleunigt weiterbewegt, d. h. die wirkliche Ostabweichung Δ ist kleiner als dieses Δ_0 . Zur Zeit t mit $0 \leq t \leq T$ ist die horizontale Relativgeschwindigkeit des Massenpunktes und des Turmes $[v_T(R+H) - v_T(R + H - \frac{1}{2}gt^2)] = \frac{1}{2}g\omega t^2 \cos \varphi$. Dies muß man von 0 bis T integrieren und von Δ_0 abziehen. Als Ergebnis erhält man

$$\Delta \simeq \Delta_0 - \frac{1}{2}g\omega \cos \varphi \int_0^T t^2 dt = \omega \cos \varphi \int_0^T dt \left(H - \frac{1}{2}gt^2 \right) = \frac{1}{3}g\omega T^3 \cos \varphi .$$

b) Im mitbewegten System: Wir gehen von der Bewegungsgleichung (1.74) aus. Da die empirische Fallbeschleunigung g sich aus der zum Erdmittelpunkt hin gerichteten Anziehung und aus der von dieser weggerichteten Zentrifugalbeschleunigung zusammensetzt, ist die Zentrifugalkraft bereits berücksichtigt. Gleichung (1.74) lautet also

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -mg \hat{e}_v - 2m\omega \left(\hat{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) . \quad (*)$$

Wir setzen $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}^{(0)}(t) + \omega \mathbf{u}(t)$, wo $\mathbf{r}^{(0)}(t) = (H - \frac{1}{2}gt^2)\hat{e}_v$ die Lösung der Bewegungsgleichung (*) ohne Corioliskraft ist ($\omega = 0$). Da $\omega = 2\pi/(1 \text{ Tag}) = 7,3 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ klein ist, bestimmen wir die Abweichung $\mathbf{u}(t)$ genähert, indem wir in (*) nur die von ω unabhängigen und die in ω linearen Terme berücksichtigen. Setzt man den Ansatz $\mathbf{r}(t)$ in (*) ein, so ergibt sich für $\mathbf{u}(t)$

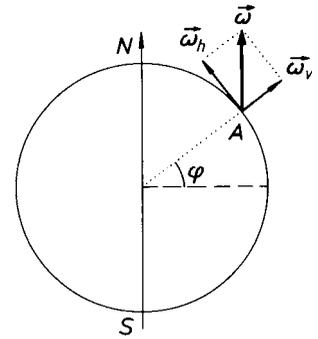


Abb. 1.24. Ein im Punkt A der Erdoberfläche verankertes Koordinatensystem rotiert um die Nord-Süd-Achse mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega = \omega_v + \omega_h$

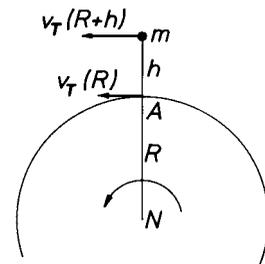


Abb. 1.25. Ein vertikal fallender Körper erfährt eine Ostabweichung. Das Bild zeigt den Nordpol und den durch A gehenden Breitengrad in Aufsicht

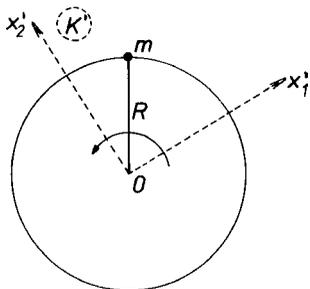


Abb. 1.26. Ein Massenpunkt rotiert gleichmäßig um den Ursprung O . \mathbf{K}' ist ein Bezugssystem in der Ebene, das mit dem Punkt synchron mitrotiert

$$m\omega \frac{d'^2}{dt^2} \mathbf{u} \simeq mgt\omega(\hat{\omega} \times \hat{e}_v).$$

$\hat{\omega}$ ist parallel zur Erdachse, \hat{e}_v ist vertikal. Daher ist $(\hat{\omega} \times \hat{e}_v) = \cos \varphi \hat{e}_0$, wobei \hat{e}_0 tangential zur Erde nach Osten weist. Damit folgt

$$\frac{d'^2}{dt^2} \mathbf{u} \simeq 2gt \cos \varphi \hat{e}_0$$

und, nach zweimaliger Integration,

$$\mathbf{u} \simeq \frac{1}{3}gt^3 \cos \varphi \hat{e}_0.$$

Die Ostabweichung ist also wieder

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{1}{3}gT^3 \omega \cos \varphi \\ &= \frac{2}{3} \frac{H\omega}{g} \sqrt{2gH} \cos \varphi = 2,189 \times 10^{-5} H^{3/2} \cos \varphi. \end{aligned}$$

Als numerisches Beispiel wähle man $H = 160$ m, $\varphi = 50^\circ$. Daraus ergibt sich die Ostabweichung $\Delta \simeq 2,8$ cm.

ii) Ein Massenpunkt m sei zunächst starr mit dem raumfesten Punkt O verbunden und rotiere mit konstanter Winkelgeschwindigkeit um diesen Punkt (Abb. 1.26). Während dieser Bewegung ist seine kinetische Energie $T = \frac{1}{2}mR^2\omega^2$. Unterbricht man nun die starre Verbindung mit O , so verläßt m den Kreis (O ; R) in tangentialer Richtung mit der konstanten Geschwindigkeit $R\omega$. Wie sieht dieselbe Bewegung in einem mitrotierenden System \mathbf{K}' aus?

Es gilt nach (1.74):

$$m \frac{d'^2}{dt^2} \mathbf{r} = 2m\omega \frac{d'}{dt} (x'_2 \mathbf{e}'_1 - x'_1 \mathbf{e}'_2) + m\omega^2 \mathbf{r},$$

oder in Komponenten ausgeschrieben

$$\begin{aligned} m \frac{d'^2}{dt^2} x'_1 &= 2m\omega \frac{d'}{dt} x'_2 + m\omega^2 x'_1 \\ m \frac{d'^2}{dt^2} x'_2 &= -2m\omega \frac{d'}{dt} x'_1 + m\omega^2 x'_2. \end{aligned}$$

Die beschriebene Anfangsbedingung bei $t = 0$ lautet

$$t = 0 \left\{ \begin{array}{ll} x'_1 = R & \frac{d'}{dt} x'_1 = 0 \\ x'_2 = 0 & \frac{d'}{dt} x'_2 = 0. \end{array} \right.$$

Bezüglich \mathbf{K} würde dann gelten

$$x_1(t) = R, \quad x_2(t) = R\omega t.$$

Außerdem gilt der Zusammenhang

$$x'_1 = x_1 \cos \omega t + x_2 \sin \omega t, \quad x'_2 = -x_1 \sin \omega t + x_2 \cos \omega t.$$

Damit haben wir aber schon die Lösung des Systems

$$x'_1(t) = R \cos \omega t + R\omega t \sin \omega t, \quad x'_2(t) = -R \sin \omega t + R\omega t \cos \omega t$$

zur gegebenen Anfangsbedingung gefunden. Es ist instruktiv, diese Bahnkurve bezüglich \mathbf{K}' zu skizzieren, um sich darüber klar zu werden, daß eine geradlinige, gleichförmige Bewegung kompliziert aussieht, wenn man sie von einem rotierenden Koordinatensystem aus beobachtet.

1.26 Streuung zweier Teilchen, die über eine Zentralkraft miteinander wechselwirken: Kinematik

Bei der Diskussion von Zentralkräften zwischen zwei Teilchen haben wir die bis ins Unendliche laufenden, ungebundenen (oder infiniten) Bahnen bisher nur kurz gestreift. In diesem und den beiden folgenden Abschnitten wollen wir diese Streubahnen zweier Teilchen genauer analysieren und die Kinematik sowie die Dynamik des Streuprozesses studieren. Die Beschreibung von Streuprozessen ist besonders für die Physik der kleinsten Dimensionen von zentraler Bedeutung: Mit makroskopischen Teilchenquellen und -detektoren kann man im Labor freie, einlaufende Zustände präparieren bzw. freie, auslaufende Zustände nachweisen. Man kann also den Streuzustand lange Zeit *vor* und lange Zeit *nach* dem eigentlichen Streuprozeß, und dies jeweils bei großen Abständen vom eigentlichen Wechselwirkungsgebiet, beobachten, nicht aber das, was in der Nahzone der Wechselwirkung vor sich geht. Das Ergebnis solcher Streuprozesse, das man in den Begriff des Wirkungsquerschnitts präzise faßt, ist also unter Umständen die einzige, etwas indirekte Auskunft über die Dynamik bei kleinen Abständen.

Wir betrachten zwei Teilchen der Masse m_1 , bzw. m_2 , deren Wechselwirkung durch das kugelsymmetrische Potential $U(r)$ (abstoßend oder anziehend) gegeben sei. Das Potential gehe im Unendlichen mindestens wie $1/r$ nach Null. Der Versuch wird in der Regel im Labor so ausgeführt, daß das Teilchen 2 vor dem Stoß ruht (das sog. *Target*), während Teilchen 1 (das *Projektil*) aus dem Unendlichen kommend am Targetteilchen 2 vorbeiläuft und, ebenso wie dieses, ins Unendliche entweicht, vgl. die Skizze in Abb. 1.27 a. Diese Bewegung sieht in den beiden Teilchen unsymmetrisch aus, weil sie neben der Relativbewegung auch die Bewegung des Schwerpunkts enthält, der in Abb. 1.27 a nach rechts mitläuft. Legt man ein zweites Bezugssystem in den Schwerpunkt, so hat man die Bewegung auf die dynamisch allein relevanten Relativkoordinaten beschränkt und erhält das in Abb. 1.27 b skizzierte, symmetrische Bild. Beide Bezugssysteme, das Laborsystem und das Schwerpunktsystem sind Inertialsysteme. In beiden Systemen können wir die Teilchen lange vor dem Stoß und lange nach dem Stoß durch ihre Impulse charakterisieren, und zwar

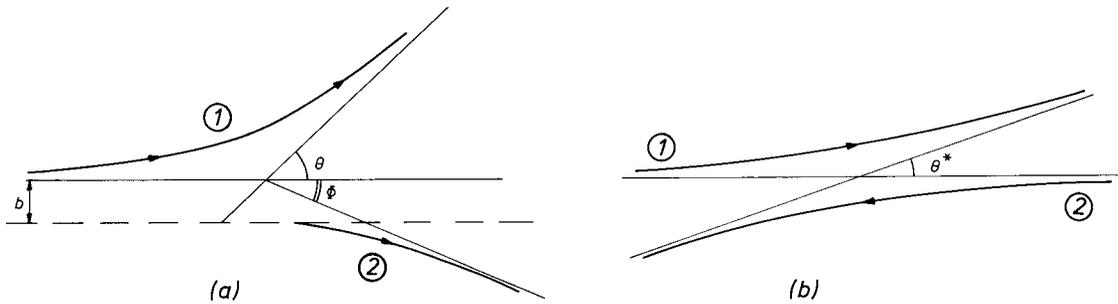


Abb. 1.27. (a) Das Projektil 1 kommt aus dem Unendlichen und streut an dem ursprünglich ruhenden Target 2, das hierdurch in Bewegung gesetzt wird. (b) Derselbe Streuprozess im Schwerpunktsystem der Teilchen 1 und 2 angeschaut. Die Unterscheidung Projektil und Target verschwindet

im Laborsystem:

p_i vor, p'_i nach dem Stoß, $i = 1, 2$;

im Schwerpunktsystem: q^* und $-q^*$ vor, q'^* und $-q'^*$ nach dem Stoß .

Wenn es sich um einen elastischen Stoß handelt, d. h. wenn die Teilchen bei der Streuung ihren inneren Zustand nicht ändern, so sagt der Energiesatz (wegen $p_2 = 0$)

$$\frac{p_1^2}{2m_1} = \frac{p_1'^2}{2m_1} + \frac{p_2'^2}{2m_2} . \quad (1.77)$$

Außerdem gilt der Impulssatz

$$p_1 = p_1' + p_2' . \quad (1.78)$$

Zerlegt man nach Schwerpunkts- und Relativimpuls, so gilt mit den Formeln des Abschn. 1.6.3 vor dem Stoß

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{m_1}{M} P + q^* , \quad (M := m_1 + m_2) \\ p_2 &= \frac{m_2}{M} P - q^* = 0 , \end{aligned} \quad (1.79a)$$

d. h. also

$$P = \frac{M}{m_2} q^* \quad \text{und} \quad p_1 = P .$$

Nach dem Stoß gilt entsprechend

$$\begin{aligned} p_1' &= \frac{m_1}{M} P + q'^* = \frac{m_1}{m_2} q^* + q'^* \\ p_2' &= \frac{m_2}{M} P - q'^* = q^* - q'^* . \end{aligned} \quad (1.79b)$$

Wegen der Erhaltung der kinetischen Energie der Relativbewegung haben q^* und q'^* denselben Betrag,

$$|q^*| = |q'^*| =: q^* .$$

Es seien θ und θ^* die Streuwinkel im Labor- bzw. Schwerpunktsystem. Um diese ineinander umzurechnen, betrachtet man am besten die drehinvarianten Größen $\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}'_1$ und $\mathbf{q}_1^* \cdot \mathbf{q}'_1$. Mit $\mathbf{p}'_1 = \mathbf{q}^* m_1/m_2 + \mathbf{q}'^*$ und $\mathbf{p}_1 = \mathbf{q}^* M/m_2$ folgt zunächst

$$\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}'_1 = \frac{M}{m_2} \left[\frac{m_1}{m_2} \mathbf{q}^{*2} + \mathbf{q}^* \cdot \mathbf{q}'^* \right] = \frac{M}{m_2} \mathbf{q}^{*2} \left[\frac{m_1}{m_2} + \cos \theta^* \right].$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}'_1 &= |\mathbf{p}_1| |\mathbf{p}'_1| \cos \theta = \frac{M}{m_2} \mathbf{q}^* \left| \frac{m_1}{m_2} \mathbf{q}^* + \mathbf{q}'^* \right| \cos \theta \\ &= \frac{M}{m_2} \mathbf{q}^{*2} \sqrt{\left(1 + 2 \frac{m_1}{m_2} \cos \theta^* + \left(\frac{m_1}{m_2} \right)^2 \right)} \cos \theta. \end{aligned}$$

Daraus folgt also

$$\cos \theta = \left[\frac{m_1}{m_2} + \cos \theta^* \right] / \sqrt{\left(1 + 2 \frac{m_1}{m_2} \cos \theta^* + (m_1/m_2)^2 \right)},$$

und somit

$$\sin \theta = \sin \theta^* / \sqrt{\left(1 + 2 \frac{m_1}{m_2} \cos \theta^* + (m_1/m_2)^2 \right)},$$

oder schließlich

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\sin \theta^*}{\frac{m_1}{m_2} + \cos \theta^*}. \quad (1.80)$$

Bezeichnet man im Laborsystem den Winkel mit Φ , unter dem das Targetteilchen wegläuft (Abb. 1.27a), so leitet man leicht den Zusammenhang ab

$$\Phi = \frac{\pi - \theta^*}{2}. \quad (1.81)$$

Diese Beziehung folgt z. B. aus der Beobachtung, daß \mathbf{p}'_2 , \mathbf{q}^* und \mathbf{q}'^* ein gleichschenkliges Dreieck bilden und daß \mathbf{q}^* dieselbe Richtung wie \mathbf{p}_1 hat. An den Formeln (1.79) und (1.80) kann man einige Spezialfälle ablesen:

- i) Wenn die Masse m_1 des Projektils sehr viel kleiner als die Masse m_2 des Targets ist, $m_1 \ll m_2$, so ist $\theta^* \simeq \theta$. Der Unterschied zwischen Schwerpunkts- und Laborsystem verschwindet im Grenzfall eines im Vergleich zum Projektil sehr schweren Targets.

- ii) Sind die Massen von Projektil und Target gleich, $m_1 = m_2$, so folgt aus (1.80) und (1.81)

$$\theta = \theta^*/2, \quad \theta + \Phi = \pi/2.$$

Im Laborsystem laufen die beiden Teilchen unter 90 Grad auseinander. Liegt insbesondere ein *Zentralstoß* vor, $\theta^* = \pi$, so folgt wegen $\mathbf{q}'^* = -\mathbf{q}^*$ für die Laborimpulse

$$\mathbf{p}'_1 = 0, \quad \mathbf{p}'_2 = \mathbf{p}_1.$$

Das Projektil bleibt also stehen, während das Targetteilchen den gesamten Impuls des einlaufenden Teilchens übernimmt.

1.27 Zweiteilchenstreuung mit Zentralkraft: Dynamik

Im Laborsystem sei das in Abb. 1.28 skizzierte Streuproblem vorgegeben: Das Projektil 1 läuft mit dem Impuls \mathbf{p}_1 ein, das Target 2 ruht vor dem Stoß. Die Anfangskonfiguration wird charakterisiert durch den Vektor \mathbf{p}_1 sowie durch die Angabe des zweidimensionalen Vektors \mathbf{b} , der angibt, unter welchem Azimutwinkel und bei welchem Abstand zur eingezeichneten z -Achse das Projektil einläuft. Dieser *Stoßvektor* ist direkt mit dem relativen Bahndrehimpuls verknüpft. Es gilt nämlich

$$\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{q}^* = \frac{m_2}{M} \mathbf{r} \times \mathbf{p}_1 = \frac{m_2}{M} \mathbf{b} \times \mathbf{p}_1 = \mathbf{b} \times \mathbf{q}^*. \quad (1.82)$$

Sein Betrag, der sog. *Stoßparameter*, ist also

$$b = \frac{M}{m_2 |\mathbf{p}_1|} |\mathbf{l}| = \frac{1}{q^*} |\mathbf{l}|. \quad (1.83)$$

Besitzt die Wechselwirkung (wie hier vorausgesetzt) Kugelsymmetrie, oder ist sie wenigstens bezüglich der z -Achse axialsymmetrisch, so kommt es auf die Richtung von \mathbf{b} in der Ebene senkrecht zur z -Achse nicht an, und nur sein Betrag, d. i. der Stoßparameter (1.83), ist dynamisch relevant.

Wir müssen nun für vorgegebenes Potential $U(r)$ bestimmen, in welchen Winkel θ das Teilchen 1 gestreut wird, wenn es mit gegebenem Impuls \mathbf{p}_1 und relativem Drehim-

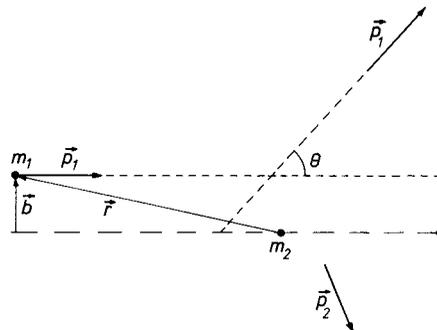


Abb. 1.28. Kinematik eines Streuproesses mit zwei Teilchen, im Laborsystem betrachtet. Das Teilchen mit Masse m_2 ruht vor dem Stoß

puls l einläuft. Aus der allgemeinen Analyse des Abschn. 1.6.1 und aus dem Beispiel 1.23 wissen wir, daß man dazu das äquivalente Problem der Ablenkung eines fiktiven Teilchens der Masse $\mu = m_1 m_2 / M$ unter der Wirkung des Potentials $U(r)$ lösen muß (s. Abb. 1.29). Es ist

$$E = \frac{q^{*2}}{2\mu}; \quad l = b \times q^*. \quad (1.84)$$

Es sei P das Perihel, also der Punkt größter Annäherung. In Abb. 1.29 ist der Streuvorgang für ein abstoßendes Potential und für verschiedene Stoßparameter skizziert. In Abschn. 1.23 wurde gezeigt, daß die Bahnkurve symmetrisch zur Geraden vom Kraftzentrum O zum Perihel P ist. Daher liegen auch die beiden Asymptoten der Bahn symmetrisch zu OP^7 , und es gilt (φ_0 ist der Winkel zwischen OP und den Asymptoten)

$$\theta^* = |\pi - 2\varphi_0|.$$

Für φ_0 folgt aus (1.68) und mit den Beziehungen (1.84) der Ausdruck

$$\varphi_0 = \int_{r_p}^{\infty} \frac{l dr}{r^2 \sqrt{2\mu[E - U(r)] - l^2/r^2}} = \int_{r_p}^{\infty} \frac{b dr}{r^2 \sqrt{1 - b^2/r^2 - 2\mu U(r)/q^{*2}}}. \quad (1.85)$$

Für gegebenes $U(r)$ läßt sich φ_0 , und damit der Streuwinkel θ^* , als Funktion von q^* (bzw. der Energie (1.84)) und von b (bzw. dem Betrag des Drehimpulses) aus dieser Gleichung berechnen. Dabei muß man allerdings untersuchen und beachten, ob der Zusammenhang zwischen b und θ^* eindeutig ist oder nicht. Es gibt Potentiale, z. B. das attraktive $1/r^2$ -Potential, bei denen derselbe Streuwinkel von zwei oder mehr verschiedenen Stoßparametern bevölkert wird, je nachdem, ob die Teilchenbahn das Kraftzentrum gar nicht, einmal oder mehrmals umschlingt.

Als Maß für die Streuung am Potential $U(r)$ führt man den *differentiellen Wirkungsquerschnitt* $d\sigma$ ein, der wie folgt definiert ist. Es sei n_0 die Zahl der pro Zeiteinheit und pro Flächeneinheit einfallenden Teilchen; es sei dn die Zahl der Teilchen, die pro Zeiteinheit in Winkel gestreut werden, die zwischen θ^* und $\theta^* + d\theta^*$ liegen. Dann definiert man

$$d\sigma := \frac{1}{n_0} dn \quad (1.86)$$

als differentiellen Wirkungsquerschnitt für die elastische Streuung. Die Dimension von $d\sigma$ ist $[d\sigma] = \text{Fläche}$.

Wenn der Zusammenhang zwischen $b(\theta^*)$ und θ^* eindeutig ist, so ist dn proportional zu n_0 und zur Fläche des Kreisrings mit Radien b und $b + db$,

$$dn = n_0 2\pi b(\theta^*) db$$

und somit

$$d\sigma = 2\pi b(\theta^*) db = 2\pi b(\theta^*) \left| \frac{db(\theta^*)}{d\theta^*} \right| d\theta^*.$$

(Gibt es zu festen θ^* mehrere Werte $b(\theta^*)$, so muß man die Beiträge aller Zweige der Funktion $b(\theta^*)$ aufsummieren.)

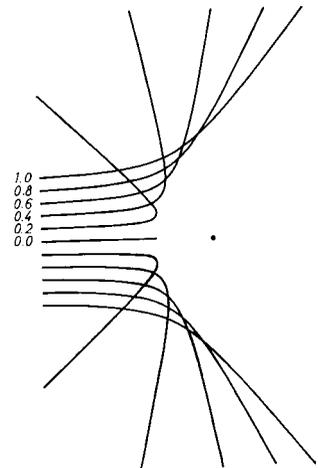


Abb. 1.29. Streubahnen im abstoßenden Potential $U(r) = A/r$ (mit $A > 0$). Der Stoßparameter ist in Einheiten der charakteristischen Länge $\lambda := A/E$ angegeben, wo E die Energie des einlaufenden Teilchens ist. Der Streuwinkel ist $\varphi_0 = \arctg(2b/\lambda)$, der Drehimpuls $l = b\sqrt{2\mu E}$. Siehe auch Praktische Übung Nr. 5

⁷ Die Bahn besitzt sicher nur dann Asymptoten, wenn $U(r)$ im Unendlichen hinreichend rasch auf Null abklingt. Das relativ schwache Absinken mit $1/r$ ist schon etwas pathologisch, wie man im nächsten Abschnitt lernt.

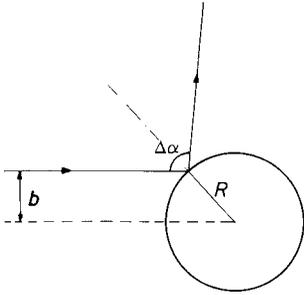


Abb. 1.30. Streuung an einer ideal reflektierenden Kugel vom Radius R

Bezieht man $d\sigma$ auf das Raumwinkelement $d\Omega^* = \sin\theta^* d\theta^* d\Phi^*$ und integriert man wegen der Axialsymmetrie über den Azimut Φ^* , so folgt mit $d\omega = 2\pi \sin\theta^* d\theta^*$:

$$d\sigma = \frac{b(\theta^*)}{\sin\theta^*} \left| \frac{db(\theta^*)}{d\theta^*} \right| d\omega. \quad (1.87)$$

Wir betrachten zwei einfache Beispiele:

i) *Streuung an einer ideal reflektierenden Kugel.* Mit den Bezeichnungen der Abb. 1.30 ist

$$b = R \sin \frac{\Delta\alpha}{2} = R \cos \frac{\theta^*}{2},$$

da $\Delta\alpha = \pi - \theta^*$. Es ist $db/d\theta^* = -R/2 \sin\theta^*/2$ und somit

$$\frac{d\sigma}{d\omega} = \frac{R^2 (\cos\theta^*/2)(\sin\theta^*/2)}{\sin\theta^*} = \frac{R^2}{4}.$$

Integriert man noch über $d\omega$, so findet man für den *totalen Wirkungsquerschnitt* ein sehr einfaches, geometrisches Resultat,

$$\sigma_{\text{tot}} = \pi R^2,$$

d. h. die Stirnfläche der Kugel, die das einlaufende Teilchen sieht.

ii) *Die Rutherfordstreuung von α -Teilchen an Kernen.* Das Potential ist $U(r) = \kappa/r$ mit $\kappa = q_1 q_2$, wo q_1 die Ladung des α -Teilchens (das ist ein Heliumkern und hat $q_1 = 2e$), und q_2 die Ladung des untersuchten Kerns ist. Die Gl. (1.85) läßt sich elementar integrieren und man findet (mit Hilfe einer guten Integraltafel)

$$\varphi_0 = \arctg \left(\frac{bq^{*2}}{\mu\kappa} \right) \quad \text{oder} \quad (1.88)$$

$$\text{tg } \varphi_0 = bq^{*2} / \mu\kappa, \quad (1.88')$$

d. h. also

$$b^2 = \frac{\kappa^2 \mu^2}{q^{*4}} \text{tg}^2 \varphi_0 = \frac{\kappa^2 \mu^2}{q^{*4}} \cotg^2 \frac{\theta^*}{2},$$

und daraus schließlich die Rutherfordsche Formel

$$\frac{d\sigma}{d\omega} = \left(\frac{\kappa}{4E} \right)^2 \frac{1}{\sin^4(\theta^*/2)}. \quad (1.89)$$

Diese Formel, die auch im Rahmen der Quantenmechanik noch gültig ist, war für die Entdeckung der Atomkerne von zentraler Bedeutung und ergab den ersten Hinweis dafür, daß das Coulombsche Gesetz mindestens bis zu Abständen der Größenordnung 10^{-12} cm gilt.

$$w(t) \geq \frac{1}{2}Et^2 + \dot{w}(0)t + w(0). \quad (1.89)$$

Falls die Gesamtenergie positiv ist, ist $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} w(t) = \infty$, d. h. mindestens ein Teilchen läuft asymptotisch ins Unendliche; s. auch (Thirring 1977, Abschn. 4.5).

Anhang: Praktische Übungen

1) Keplerellipsen

Man studiere anhand numerischer Beispiele die finiten Bewegungen zweier Himmelskörper mit Massen m_1 und m_2 in ihrem Schwerpunktsystem, (Abschn. 1.6.2 (ii)).

Lösung: Die relevanten Gleichungen findet man am Ende des Abschn. 1.6.2. Es bietet sich an, m_1 und m_2 in Einheiten der Gesamtmasse $M = m_1 + m_2$ auszudrücken, d. h. $M = 1$ zu setzen. Die reduzierte Masse ist $\mu = m_1 m_2 / M$. Hat man die Massen vorgegeben, so wird die Form der Bahnen durch die frei wählbaren Parameter

$$p = \frac{l^2}{A\mu} \quad \text{und} \quad \varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{\mu A^2}} \quad (A.1)$$

bestimmt, die wiederum durch die Energie und den Drehimpuls festgelegt sind. Es ist einfach, am PC die Bahnkurven zu berechnen und zu zeichnen. Abbildung 1.6a zeigt den Fall $m_1 = m_2$ mit $\varepsilon = 0,5$, $p = 1$, Abb. 1.6b zeigt den Fall $m_1 = m_2/9$ mit $\varepsilon = 0,5$, $p = 0,66$. Da der Ursprung der Schwerpunkt ist, stehen die beiden Sterne sich zu jedem Zeitpunkt gegenüber.

2) Bewegung des Doppelsterns aus Übung 1

Man berechne die beiden Bahnellipsen punktweise als Funktion der Zeit t für vorgegebenes Zeitintervall Δt .

Lösung: Die Bilder aus Übung 1 geben nur $r(\varphi)$ als Funktion von φ , sagen aber nicht, wie die Bahnen als Funktion der Zeit durchlaufen werden. Um $r(t)$ zu erhalten, geht man zu (1.19) zurück und setzt dort die Bahnkurve der Relativkoordinate $r(\varphi)$ ein. Durch Separation der Variablen erhält man daraus für Bahnpunkte $n + 1$ und n :

$$t_{n+1} - t_n = \frac{\mu p^2}{l} \int_{\varphi_n}^{\varphi_{n+1}} \frac{d\varphi}{[1 + \varepsilon \cos \varphi]^2} \quad (A.2)$$

(Das Perihel hat $\Phi_p = 0$.)

Die Größe $\mu p^2 / l$ hat die Dimension Zeit. Man kann die Periode aus (1.23)

$$T = 2\pi \frac{\mu^{1/2} a^{3/2}}{A^{1/2}} = \pi \frac{A \mu^{1/2}}{2^{1/2} (-E)^{3/2}}$$

eingeführen und diese als Zeiteinheit verwenden. Es ist dann

$$\frac{\mu p^2}{l} = (1 - \varepsilon^2)^{3/2} T / 2\pi.$$

Das Integral in (A.2) läßt sich geschlossen ausführen. Mit der Substitution

$$x := \sqrt{\frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon}} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$$

ist

$$\begin{aligned} I &\equiv \int \frac{d\varphi}{[1 + \varepsilon \cos \varphi]^2} = \frac{2}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \int dx \frac{1 + \frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon} x^2}{(1 + x^2)^2} \\ &= \frac{2}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \left\{ \int \frac{dx}{1 + x^2} + \frac{2\varepsilon}{1 - \varepsilon} \int \frac{x^2 dx}{(1 + x^2)^2} \right\}, \end{aligned}$$

dessen zweiter Anteil durch partielle Integration integriert werden kann. Das Resultat ist

$$\begin{aligned} I &= \frac{2}{(1 - \varepsilon^2)^{3/2}} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon}} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right) \\ &\quad - \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon^2} \frac{\sin \varphi}{1 + \varepsilon \cos \varphi} + C, \end{aligned} \quad (A.3)$$

so daß

Lösungen der Aufgaben

Verweise auf Abschnitte oder Gleichungen im Haupttext sind durch ein vorangestelltes „M“ gekennzeichnet, also z.B. Abschn. M3.7 bzw. (M1.17).

Kapitel 1 Elementare Newtonsche Mechanik

1.1 Es ist $\dot{\mathbf{l}} = \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}} = m\dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{r} \times \mathbf{K} = \mathbf{r} \times \mathbf{K}$. Nach Voraussetzung ist dies gleich Null, d. h. daß die Kraft \mathbf{K} proportional zu \mathbf{r} sein muß, $\mathbf{K} = \alpha \mathbf{r}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Zerlegt man die Geschwindigkeit in eine Komponente entlang \mathbf{r} und eine senkrecht zu \mathbf{r} , so kann \mathbf{K} nur die erste ändern, die zweite ist konstant. Die Bewegung findet daher in einer Ebene statt. Diese liegt senkrecht zum konstanten Drehimpuls $\mathbf{l} = m\mathbf{r}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t) = m\mathbf{r}_0 \times \mathbf{v}_0$. Die Bewegungen (a), (b), (e) und (f) sind möglich. Die Bewegung (c) ist nicht möglich, weil \mathbf{l} an der „Spitze“ den Wert Null hätte, vorher und nachher aber nicht Null wäre. Die Bewegung (d) ist ebenfalls nicht möglich, weil \mathbf{l} beim Durchgang durch

den Ursprung den Wert Null durchlaufen würde, aber vorher und nachher nicht Null wäre.

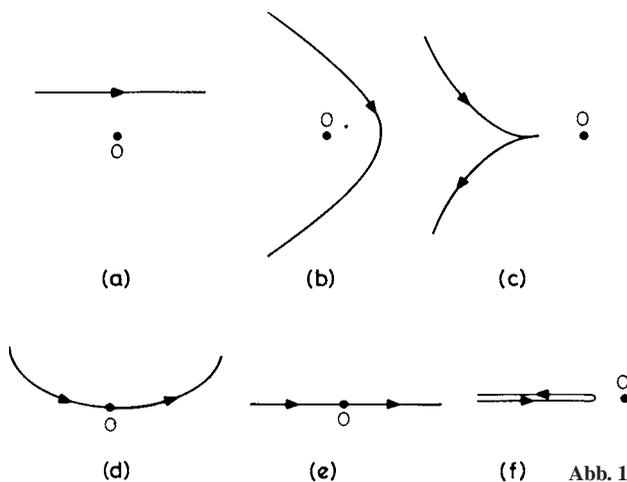
1.2 Es ist $x(t) = r(t) \cos \varphi(t)$, $y(t) = r(t) \sin \varphi(t)$ und somit $dx = dr \cos \varphi - r d\varphi \sin \varphi$, $dy = dr \sin \varphi + r d\varphi \cos \varphi$. Bildet man $(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$, so fallen die gemischten Terme der Quadrate heraus und es bleibt $(ds)^2 = (dr)^2 + r^2(d\varphi)^2$. Daraus folgt $v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2$. Die x - und y -Komponente von $\mathbf{l} = m\mathbf{r} \times \mathbf{v}$ verschwinden, da weder \mathbf{r} noch \mathbf{v} eine z -Komponente haben. Für die z -Komponente ergibt sich

$$\begin{aligned} I_z &= m(xv_y - yv_x) \\ &= mr(\dot{r} \sin \varphi \cos \varphi + r\dot{\varphi} \cos^2 \varphi \\ &\quad - \dot{r} \cos \varphi \sin \varphi + r\dot{\varphi} \sin^2 \varphi) \\ &= mr^2\dot{\varphi}. \end{aligned}$$

Somit ist

$$v^2 = \dot{r}^2 + \frac{l^2}{m^2 r^2} \quad \text{und} \quad T = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{l^2}{2mr^2}.$$

Ist \mathbf{l} konstant, so ist $r^2\dot{\varphi} = \text{const}$. Dies gibt die quantitative Korrelation zwischen der Winkelgeschwindigkeit und dem Abstand r , z. B. für die Bilder (a), (b), (e) und (f) aus Aufgabe 1.1. Die Bewegung (d) könnte nur dann stattfinden, wenn $\dot{\varphi}$ bei Annäherung an O so nach Unendlich strebt, daß das Produkt $r^2\dot{\varphi}$ endlich bleibt. So etwas kommt (mit anderer Form der Bahn) tatsächlich vor, siehe Aufgabe 1.23.



1.3 Analog zur Lösung der vorhergehenden Aufgabe ergibt sich $(ds)^2 = (dr)^2 + r^2(d\theta)^2 + r^2 \sin^2 \theta (d\varphi)^2$. Daher ist $v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2$.