Vorwort

Unser Buch *Repetitorium Theoretische Physik* enthält die Gebiete

- Mechanik,
- Elektrodynamik,
- Quantenmechanik sowie
- Statistische Physik und Thermodynamik,

also den „kanonischen" Lehrstoff der Theoretischen Physik der ersten sechs Semester an deutschen Universitäten. Es wendet sich hauptsächlich an Studierende der Physik höherer Semester, die an einer übersichtlichen und zusammenhängenden Darstellung des Lehrstoffes interessiert sind oder sich in Prüfungsvorbereitungen zum Diplom oder Magister befinden. Darüber hinaus ist dieses Buch auch als begleitendes und ergänzendes Lehrbuch für Physikstudenten in den ersten Semestern geeignet. Für sie gibt das Buch einen nützlichen Leitfaden zur Klassifizierung und Einordnung des in den verschiedenen theoretischen Physikvorlesungen vermittelten Wissens. Schließlich sollten auch Physiker im Beruf oder in der Forschung aus diesem Überblick der Theoretischen Physik Nutzen ziehen können.

Selbstverständlich gibt es zu jedem der o.g. Gebiete ausgesprochen gute Lehrbücher (einige Anregungen sind in unserem kommentierten Literaturverzeichnis zu finden). Dieses Buch ist deshalb keinesfalls als Ersatz zum Durcharbeiten solcher Bücher gedacht; kein Student wird auf eine ausführliche Erarbeitung des Lehrstoffes mittels anderer, didaktisch (und historisch) gut aufbereiteter Darstellungen der Theoretischen Physik verzichten können.

Dennoch erschien uns das Schreiben eines Buches in der vorliegenden Form notwendig, um den Lernenden einen zu vielen anderen Lehrbüchern komplementären Zugang zur Theoretischen Physik zu bieten, in welchem der Aufbau, die Struktur und nicht zuletzt auch die Eleganz physikalischer Theorien – u.a. durch den Verzicht auf historisch-phänomenologische Begründungen – hervorgehoben und leichter erkennbar wird.

Wir verfolgen durchweg den axiomatisch-deduktiven Ansatz, indem wir die Grundgleichungen der verschiedenen Theorien voranstellen und aus ihnen konsequent die einzelnen physikalischen Zusammenhänge und Gesetzmäßigkeiten in logischer (und nicht chronologischer) Reihenfolge entwickeln. Unser

Ziel ist, durch den konsequenten Gebrauch einer einheitlichen Darstellung (und Notation) die Verbindungen zwischen den verschiedenen Theorien deutlich herauszuarbeiten. Man denke hierbei etwa an den Hamilton-Formalismus, welcher nicht nur in der Mechanik, sondern auch in der Quantenmechanik und der Statistischen Physik ein grundlegendes Konzept darstellt.

Im ersten Kapitel *Mechanik* stellen wir den (oftmals überbetonten) Newtonschen Zugang zur Mechanik mit den Lagrangeschen und Hamiltonschen Formulierungen Seite an Seite. Denn jeder dieser äquivalenten Darstellungen zeichnet sich durch spezielle Vorteile aus. Während der Newtonsche Ansatz durch das Aufstellen von Bewegungsgleichungen über die Kraft intuitiv am leichtesten zugänglich ist, wird erst mit dem Lagrange- und Hamilton-Formalismus ein tieferes Verständnis der Mechanik sowie anderer theoretischer Konzepte ermöglicht. Zum Beispiel eignet sich gerade der Lagrange-Formalismus besonders zum Verständnis der Verknüpfung von Symmetrien und Erhaltungssätzen. Dementsprechend beschäftigen sich die ersten drei Abschnitte in gleichberechtigter Weise mit diesen drei Zugängen und ihrer inneren Verbindung. Darüber hinaus führen wir im Abschnitt *Relativistische Mechanik* bereits die korrekte Lorentz-Tensor-Schreibweise ein und erleichtern dem Leser somit den Übergang zur relativistischen Theorie der Elektrodynamik, in der sich die disziplinierte Einhaltung dieser Notation als sehr bequem und übersichtlich erweist.

Der Vorteil der deduktiven Methode wird vielleicht besonders in unserem zweiten Kapitel *Elektrodynamik* deutlich. Im Gegensatz zu fast allen Lehrbüchern der Elektrodynamik stellen wir die Maxwell-Gleichungen in ihrer allgemeinsten Form oben an. Dies ermöglicht es, sofort die Struktur der Theorie zu erkennen und die allgemeine Lösung der Maxwell-Gleichungen mittels des überaus wichtigen Konzeptes der Eichinvarianz zu erarbeiten. Aus ihr ergeben sich dann auf recht übersichtliche Weise die verschiedenen Gesetzmäßigkeiten wie etwa die Lösungen im freien Raum oder die Spezialfälle der Elektro- und Magnetostatik. Aufbauend auf der relativistischen Mechanik wenden wir auch hier an geeigneten Stellen die kovariante Schreibweise an und diskutieren den Lagrange- und Hamilton-Formalismus in Bezug auf den feldtheoretischen Charakter der Elektrodynamik.

Abweichend von allen anderen Kapiteln beginnen wir das Kapitel *Quantenmechanik* mit einem mathematischen Einführungsteil, in dem einige Gebiete der linearen Algebra in der Diracschen Schreibweise rekapituliert werden. Insbesondere wird dort das für die Quantenmechanik unentbehrliche Konzept des Operators und das mit ihm verbundene Eigenwertproblem diskutiert. Hieran schließt sich der allgemeine Aufbau der Quantentheorie an, wo die fundamentalen quantenmechanischen Konzepte darstellungsfrei etabliert und diskutiert werden. Überhaupt versuchen wir in diesem Kapitel die Überbetonung einer bestimmten Darstellung zu vermeiden.

Ähnlich wie in der Mechanik gibt es auch in der Statistischen Physik/Thermodynamik verschiedene Zugänge zur Beschreibung von Viel-Teilchensystemen. Zum einen hat man den statistischen Ansatz, welcher quantenmechanische bzw. mechanische Gesetzmäßigkeiten mit einem statistischen Prinzip zu einer mikroskopischen Beschreibungsweise in Form von Ensemble-Theorien verknüpft. Demgegenüber steht die Thermodynamik, als eine rein phänomenologische Theorie, welche lediglich von makroskopischen Erfahrungssätzen ausgeht. Ein dritter Zugang ist der informationstheoretische Ansatz, bei dem ein System vom Standpunkt der Unvollständigkeit von Information aus betrachtet wird. Um die innere Verbindung dieser drei Zugangsweisen deutlich zu machen, diskutieren wir im Kapitel *Statistische Physik und Thermodynamik* alle drei Konzepte und zeigen die Äquivalenz der Zugänge auf.

Wichtige Gleichungen und Zusammenhänge werden in Form von Definitions- und Satzkästen zusammengefaßt und somit dem Leser ein strukturiertes Lernen und schnelles Nachschlagen ermöglicht. Zudem geben wir uns Mühe, Abschnitte und Unterabschnitte auch optisch deutlich zu gliedern; im Prinzip sollte es dem Leser jederzeit möglich sein, das Ende eines Argumentationsstranges (etwa eine Herleitung oder ein Beweis) zu erkennen. Desweiteren befinden sich nach jedem Abschnitt eine Kurzzusammenfassung sowie einige Anwendungen (mit Lösungen), mit deren Hilfe das Verständnis des behandelten Stoffes überprüft werden kann und welche zum Teil weiterführende Themen behandeln. Im Anhang geben wir schließlich eine kurze Zusammenstellung einiger wichtiger und häufig benutzter mathematischer Formeln.

Natürlich haben wir keinesfalls den Anspruch „vollständig“ zu sein. Stattdessen wurden die Themen der vier behandelten Gebiete so ausgewählt, daß sie einerseits die jeweils grundlegenden Ideen und Konzepte enthalten, andererseits aber auch die wichtigsten prüfungsrelevanten und mehr anwendungsorientierten Gebiete abdecken. Aufbauend auf dem hier präsentierten Stoff sollte es dem Leser möglich sein, andere Gebiete der Physik selbst zu erarbeiten. Zu diesem Zweck haben wir im Anhang einige Literaturvorschläge gemacht.

Insgesamt hoffen wir, mit diesem Buch einen Vermittler zwischen Lehrbüchern, Vorlesungen und Kurzrepetitorien geschaffen zu haben, mit dem es möglich ist, die Konzepte der Theoretischen Physik besser zu verstehen.

Köln und London, *Armin Wachter*
Juli 1998 *Henning Hoeber*

2. Elektrodynamik

Die Elektrodynamik ist eine klassische Feldtheorie, die sich mit elektromagnetischen Phänomenen beschäftigt. Sie beruht u.a. auf Beobachtungen, die bis zur zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts zurückreichen, als Coulomb die Kräfte zwischen elektrisch geladenen Körpern untersuchte. Etwa 50 Jahre später studierte Faraday die Auswirkungen von Strömen und magnetischen Feldern. Die heutige moderne Form der Elektrodynamik basiert auf den vier von James Clerk Maxwell im Jahre 1864 formulierten Maxwell-Gleichungen, aus denen sich alle elektromagnetischen Effekte herleiten lassen. Die Verbindung zwischen der Bewegung geladener Teilchen und den elektromagnetischen Feldern wird durch die Lorentz-Kraftgleichung hergestellt.

Vom mathematischen Standpunkt aus gesehen ist die Elektrodynamik überaus elegant und ökonomisch. Im Gegensatz zur Newtonschen Mechanik ist sie überdies eine relativistische Theorie, in der die endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit von Information berücksichtigt ist. Demzufolge können Teilchen, deren Abstandsvektor raumartig ist, nicht miteinander wechselwirken.

Ähnlich wie in der Mechanik hat sich auch in der Elektrodynamik das Konzept der Punktteilchen äußert erfolgreich bewährt. Allerdings ist die klassische Elektrodynamik nicht bis hinunter zu kleinsten Abständen gültig, sondern als klassischer Grenzfall einer modernen Quantenfeldtheorie, der sog. Quantenelektrodynamik, zu betrachten.

Am Anfang dieses Kapitels steht die Einführung in den formalen Aufbau der Elektrodynamik. Es werden die Grundgleichungen der Theorie, die Maxwell-Gleichungen und die Lorentz-Kraftgleichung, dargelegt, interpretiert und phänomenologisch begründet.

Abschnitt 2.2 beschäftigt sich mit der allgemeinen Lösung der Maxwell-Gleichungen. Hierzu führen wir ein Skalar- und ein Vektorpotential ein, so daß die homogenen Maxwell-Gleichungen automatisch erfüllt sind und die inhomogenen Maxwell-Gleichungen in zwei inhomogene Potentialgleichungen überführt werden können. Durch Ausnutzen gewisser mit den Potentialen verbundener Eichfreiheiten lassen sich diese Gleichungen entkoppeln und somit relativ leicht lösen. Man erhält als inhomogene Lösung die sog. retardierten Potentiale, in denen die endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit von Signalen explizit zum Ausdruck kommt.

Da die Elektrodynamik eine relativistische Theorie ist, können wir sie so umformulieren, daß ihre relativistische Invarianz offensichtlich zu Tage tritt. Dies ist Gegenstand des Abschn. 2.3. Wir zeigen, daß sich alle elektrodynamischen Grundgrößen zu relativistischen Vierergrößen zusammenfassen lassen, die ein definiertes Transformationsverhalten unter Lorentz-Transformationen besitzen.

Abschnitt 2.4 knüpft an Abschn. 2.2 an und beschäftigt sich mit der Berechnung der retardierten Potentiale für beliebig bewegte Punktladungen bzw. räumlich begrenzter Ladungs- und Stromdichten. Hierbei wird sich als ein wesentliches Resultat herausstellen, daß nur beschleunigte Ladungen elektromagnetische Strahlung emittieren.

Im Falle ausschließlich statischer (zeitunabhängiger) Ladungs- und Stromdichten entkoppeln die Maxwell-Gleichungen in zwei Gleichungssysteme, welche die Grundgleichungen der Elektrostatik und der Magnetostatik bilden. Mit diesen beiden Spezialfällen der Elektrodynamik wollen wir uns in Abschn. 2.5 beschäftigen.

Abschnitt 2.6 ist der Elektrodynamik in Materie gewidmet. Die Maxwell-Gleichungen gelten sowohl im Vakuum als auch in materiellen Medien. Im letzteren Fall ist es jedoch aufgrund der großen Zahl geladener Teilchen im betrachteten Medium (und deren Variation auf atomistischer Längenskala) günstiger, die Maxwell-Gleichungen in Termen makroskopischer Felder umzuformulieren. Hierzu werden zwei weitere materialabhängige Felder eingeführt, welche mit den makroskopischen Feldern über phänomenologische Material-Gleichungen verbunden sind.

Abschnitt 2.7 beschäftigt sich mit der Ausbreitung elektromagnetischer Wellen in leitenden und nichtleitenden Medien. Wir untersuchen u.a. die Reflektion und Brechung elektromagnetischer Wellen an der Grenzschicht zweier verschiedener Medien. Ein interessanter Effekt ist das Zerfließen von Wellenpaketen in dispersiven Medien, das durch die unterschiedliche Ausbreitungsgeschwindigkeit der Fourier-Komponenten des Wellenpaketes zustande kommt.

Der letzte Abschnitt dieses Kapitels behandelt die Lagrangesche Formulierung der Elektrodynamik. Ihre Bedeutung liegt nicht so sehr - wie etwa in der Mechanik – in ihrem praktischen Nutzen, sondern eher darin, daß man durch sie ein fundamentaleres Verständnis von Symmetrieprinzipien, insbesondere von Eichsymmetrien und den damit verbundenen Implikationen erlangt. Man findet die hier vorgeführten Argumentationen in allen (Quanten-) Feldtheorien der modernen Physik wieder.

2.1 Formalismus der Elektrodynamik

In diesem Abschnitt wird der allgemeine Formalismus der Elektrodynamik vorgestellt. Wir beginnen unsere Diskussion mit den *Maxwell-Gleichungen* und der *Lorentz-Kraft*, welche eine Verbindung zwischen der Elektrodynamik und der Mechanik herstellt, sowie der *Kontinuitätsgleichung*, die die Erhaltung der Ladung in einem abgeschlossenen System widerspiegelt. Im Anschluß hieran werden die Maxwell-Gleichungen in Hinblick auf deren zugrunde liegenden phänomenologischen Erkenntnisse sowie auf allgemein mathematische Eigenschaften interpretiert. Zum Schluß leiten wir den *Energie- und Impulssatz der Elektrodynamik* her.

2.1.1 Maxwell-Gleichungen und Lorentz-Kraft

Elektromagnetische Phänomene werden durch zwei fundamentale Vektorfelder beschrieben,

- dem *elektrischen Feldvektor* $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, t)$ und
- dem *magnetischen Induktionsfeldvektor* $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}, t)$.[1]

Ursache dieser Felder sind

- die *elektrische Ladungsdichte* $\rho(\boldsymbol{x}, t)$ und
- der *elektrische Stromdichtevektor* $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}, t)$.

Die Felder $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{B}$ sind mit den Größen ρ und $\boldsymbol{j}$ über ein gekoppeltes System von partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung verbunden, die wir als Ausgangspunkt der Theorie axiomatisch voranstellen.

Satz 2.1: Maxwell-Gleichungen

$$\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, t) = 4\pi\rho(\boldsymbol{x}, t) \qquad (I)$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, t) + \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}, t)}{\partial t} = \boldsymbol{0} \qquad (II)$$

$$\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}, t) = 0 \qquad (III)$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}, t) - \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, t)}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}, t)\ . \qquad (IV)$$

Wir verwenden in diesem Kapitel durchweg das *Gaußsche Einheitensystem*, auf das am Ende dieses Abschnittes genauer eingegangen wird.

Die Theorie des Elektromagnetismus wird durch jene Gleichung vervollständigt, die die Kraft auf ein geladenes Teilchen angibt, das sich in einem elektromagnetischen Feld befindet:

[1] Wir werden im weiteren Verlauf die Begriffe „magnetisches Induktionsfeld“ und „Magnetfeld“ synonym verwenden, obwohl letzterer eigentlich dem (makroskopischen) Feld $\boldsymbol{H}$ vorbehalten ist. Siehe hierzu Seite 200, Fußnote 13.

Satz 2.2: Lorentz-Kraft

Die gesamte elektromagnetische Kraft auf ein Teilchen der Ladung q, welches sich mit der Geschwindigkeit $\dot{\boldsymbol{x}}$ innerhalb der Felder $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{B}$ bewegt, ist gegeben durch

$$F_{\mathrm{L}}(\boldsymbol{x},t) = q\left(\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t) + \frac{\dot{\boldsymbol{x}}(t)}{c} \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t)\right) . \tag{2.1}$$

Der erste Term dieser Gleichung beschreibt die Kraft des elektrischen Feldes auf die Ladung und ist parallel zu $\boldsymbol{E}$ gerichtet. Der zweite Term liefert die durch das magnetische Feld hervorgerufene Kraft. Sie steht senkrecht zu $\boldsymbol{B}$ und der Geschwindigkeit $\dot{\boldsymbol{x}}$ der Ladung. Hieraus folgt unmittelbar, daß das magnetische Feld keine Arbeit an dem Teilchen verrichtet.

In Abschn. 2.3 zeigen wir, daß sowohl die Maxwell-Gleichungen, als auch die Lorentz-Kraft relativistisch invariant sind.

Interpretation der Lorentz-Kraft. Die meisten Probleme der Elektrodynamik lassen sich in zwei Klassen unterteilen. Zum einen stellt sich die Frage nach den elektromagnetischen Feldern bei vorgegebener Strom- und Ladungsdichte. Zum anderen ist man bei gegebenen Feldern an deren Wirkung auf eine Testladung interessiert. Es scheint so, als seien diese zwei Problemstellungen völlig entkoppelt. Jedoch ist zu beachten, daß sich die Felder in (2.1) im Prinzip aus der Superposition aller Felder ergeben. Das heißt, daß die Felder, welche die Testladung selbst erzeugen, einzubeziehen sind. Im Prinzip müßte der Effekt dieser Rückwirkung in einem selbstkonsistenten Formalismus berücksichtigt werden. Jedoch ist es möglich zu zeigen, daß diese Effekte zumeist vernachlässigbar klein sind. Bezeichnet λ einen charakteristischen Abstand des Problems, dann können wir die Rückwirkungseffekte vernachlässigen, falls gilt:

$$\lambda \ll \frac{e^2}{m_{\mathrm{e}}c^2} ,$$

wobei $-e$ die Ladung und m_{e} die Masse des Elektrons bezeichnen. Nur auf sehr kleiner Längenskala spielen diese Effekte also eine signifikante Rolle.[2] Im folgenden wollen wir sie stets vernachlässigen.

Kontinuitätsgleichung. Eine weitere wichtige Gleichung der Elektrodynamik mit grundlegendem Charakter ist die *Kontinuitätsgleichung.* Sie trägt der experimentellen Tatsache Rechnung, daß die Änderung der Ladung eines abgeschlossenen Systems innerhalb eines Volumens V notwendigerweise von einem entsprechenden Ladungsfluß durch die Oberfläche F des Volumens begleitet ist (*Ladungserhaltung*):

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\limits_V \mathrm{d}V \rho(\boldsymbol{x},t) = -\oint\limits_F \mathrm{d}\boldsymbol{F}\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x},t) .$$

[2] Siehe hierzu auch die Diskussion der Selbstenergie im Unterabschn. 2.5.1.

Kombiniert man die Divergenz von (IV) mit (I), so sieht man, daß die Kontinuitätsgleichung (in differentieller Form) in der Tat durch die Maxwell-Gleichungen berücksichtigt wird.

Satz 2.3: Kontinuitätsgleichung

Die Maxwell-Gleichungen stehen mit dem fundamentalen Gesetz der Ladungserhaltung,

$$\frac{\partial \rho(\boldsymbol{x}, t)}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}, t) = 0 \ ,$$

im Einklang.

2.1.2 Interpretation der Maxwell-Gleichungen

Die vier Maxwell-Gleichungen spiegeln Erfahrungstatsachen wider, die üblicherweise in Form folgender Gesetze zusammengefaßt werden:

(I) Gaußsches Gesetz.

$$\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, t) = 4\pi\rho(\boldsymbol{x}, t) \Longleftrightarrow \oint_F \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, t) \mathrm{d}\boldsymbol{F} = 4\pi Q(t) \ ,$$

mit

$$Q(t) = \int \rho(\boldsymbol{x}, t) \mathrm{d}V \ .$$

Der gesamte elektrische Fluß durch eine ein Volumen V einschließende Fläche F ist proportional zur in V enthaltenen Gesamtladung Q.

(II) Faradaysches Induktionsgesetz.

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, t) + \frac{1}{c} \frac{\partial \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}, t)}{\partial t} = \boldsymbol{0}$$

$$\Longleftrightarrow V(t) = \oint\limits_C \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, t) \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\frac{1}{c} \int\limits_F \mathrm{d}\boldsymbol{F} \frac{\partial \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}, t)}{\partial t} \ . \tag{2.2}$$

Ein zeitlich variierendes magnetisches Feld produziert ein elektrisches Feld, das um die Richtung der magnetischen Änderung zirkuliert. Diese *Induktionsströme* sind so gerichtet, daß sie ihrer Ursache entgegenwirken (*Lenzsche Regel*). Anders ausgedrückt: Die zeitliche Änderung des Magnetfeldes durch eine (konstante) Fläche F, bewirkt eine *elektromotorische Kraft* (*Spannung*) V, die sich aus dem Wegintegral des induzierten elektrischen Feldes entlang der F begrenzenden Linie C ergibt. Man stelle sich hierzu eine Leiterschleife vor, die die Fläche F umschließt (Abb. 2.1). Ändert sich das Magnetfeld durch F, dann führt das hierdurch induzierte, längs des Leiters wirkende elektrische Feld zu einer Bewegung der freien Ladungsträger innerhalb des Leiters

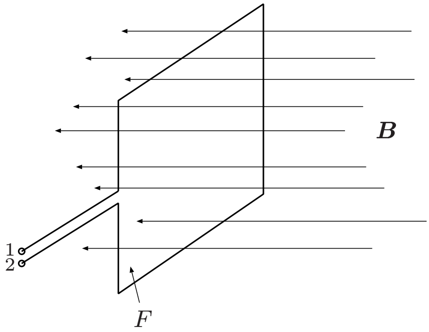

Abb. 2.1. Leiterschleife im Magnetfeld

und somit zu einem elektrischen Strom. Man erhält die hieraus resultierende Spannung, indem man den Leiter aufschneidet und die Größe $V = \int_1^2 \mathrm{d}\boldsymbol{l}\boldsymbol{E}$ zwischen den Schnittstellen 1 und 2 mißt. Es sei hier darauf hingewiesen, daß das Faradaysche Gesetz auch den allgemeineren Fall

$$V(t) = \oint_{C'} \boldsymbol{E}'(\boldsymbol{x}', t)\mathrm{d}\boldsymbol{l}' = -\frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}\Phi_\mathrm{m}(t)}{\mathrm{d}t}$$

einschließt, wobei

$$\Phi_\mathrm{m}(t) = \int_{F(t)} \mathrm{d}\boldsymbol{F}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}, t)$$

den *magnetischen Fluß* durch die (nicht notwendigerweise konstante) Fläche F bezeichnet. Hierbei beziehen sich die gestrichenen Größen auf das Ruhesystem der Leiterschleife. Dies wird im Rahmen der relativistisch invarianten Formulierung der Elektrodynamik in Anwendung 25 explizit gezeigt.

(III) Abwesenheit von magnetischen Monopolen.

$$\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}, t) = 0 \Longleftrightarrow \oint_F \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}, t)\mathrm{d}\boldsymbol{F} = 0 \ .$$

Der magnetische Fluß durch eine ein Volumen umgrenzende Fläche F ist Null. Anders ausgedrückt: es gibt keine *magnetischen Monopole*, also keine Quellen und Senken für magnetische Felder; im Gegensatz zu elektrischen Feldlinien sind magnetische Feldlinien geschlossene Kurven.[3]

[3] Man beachte in diesem Zusammenhang, daß die Maxwell-Gleichungen nicht alle unabhängig sind. Nehmen wir etwa die Divergenz von (II), so folgt $\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}, t) = f(\boldsymbol{x})$, mit einer skalaren Funktion f, welche sich experimentell zu 0 ergibt.

(IV) Maxwellscher Verschiebestrom und Ampèresches Gesetz.

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t) - \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t)}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x},t) \ .$$

Diese Gleichung enthält zwei Anteile. Der erste Teil ist der sog. *Maxwellsche Verschiebestrom*

$$-\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t)}{\partial t} \ , \tag{2.3}$$

den Maxwell damals als zusätzlichen Term in (IV) einführte, da er erkannte, daß die Maxwell-Gleichungen ohne diesen Term im Widerspruch zur Kontinuitätsgleichung stehen. Darüber hinaus ist der Verschiebestrom notwendig, um elektromagnetische Strahlungsphänomene im Vakuum beschreiben zu können. Hat man nämlich weder Quellen noch Ströme ($\rho = 0,\ \boldsymbol{j} = \boldsymbol{0}$), dann folgt aus den Maxwell-Gleichungen ohne Verschiebestrom in (IV), daß sowohl $\boldsymbol{E}$ als auch $\boldsymbol{B}$ quellen- und wirbelfrei und somit identisch Null sind. Erst durch Hinzufügen von (2.3) in (IV) werden zeitabhängige elektromagnetische Felder zu nichtverschwindenden Wirbelfeldern, wodurch ihre Propagation im Vakuum ermöglicht wird.

Der zweite Teil – das sog. *Ampèresche* oder auch *Oerstedsche Gesetz* – lautet

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t) = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x},t) \Longleftrightarrow \oint\limits_C \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t)\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \frac{4\pi}{c}I(t) \ , \tag{2.4}$$

mit

$$I(t) = \int\limits_F \boldsymbol{j}(\boldsymbol{x},t)\mathrm{d}\boldsymbol{F} \quad (\textit{elektrischer Strom}).$$

Dieses Gesetz stellt die Verallgemeinerung des eigentlichen Ampèreschen Gesetzes der Magnetostatik dar und ergibt sich aus der sog. *quasistatischen Näherung*, bei der der Verschiebestrom vernachlässigt wird. Es besagt, daß ein Strom ein magnetisches Feld induziert, dessen (geschlossene) Feldlinien um den Strom zirkulieren (Abb. 2.2).

Eindeutigkeit der Lösungen. Nach dem Helmholtzschen Integralsatz läßt sich jedes über einem einfach zusammenhängenden Gebiet mit (stückweise) glatter Randfläche definiertes Vektorfeld $\boldsymbol{V}$ additiv zerlegen in einen wirbelfreien und einen quellenfreien Anteil. Diese Zerlegung ist bei Festlegung von Randwerten für die einzelnen Summanden eindeutig. Insbesondere im Unendlichen ist sie (bis auf eine additive Konstante) eindeutig, sofern $\boldsymbol{V}$ asymptotisch mindestens wie $1/r$ abfällt. In diesem Fall lautet die Zerlegung explizit:

$$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi}\left[\underbrace{\boldsymbol{\nabla} \times \int \mathrm{d}^3x' \frac{\boldsymbol{\nabla}' \times V(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}}_{\text{divergenzfrei}} - \underbrace{\boldsymbol{\nabla} \int \mathrm{d}^3x' \frac{\boldsymbol{\nabla}' V(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}}_{\text{rotationsfrei}}\right] \ . \tag{2.5}$$

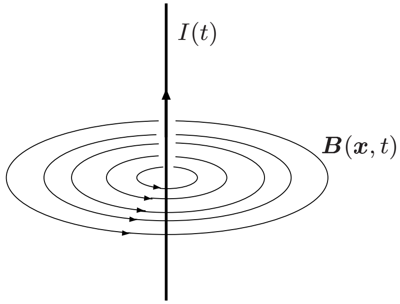

Abb. 2.2. Magnetfeld eines stromdurchflossenen Leiters

Mit anderen Worten: Sind sowohl die Randbedingungen (bzw. ein hinreichender asymptotischer Abfall) als auch die Quellen und Wirbel eines Vektorfeldes gegeben, dann ist dieses Feld eindeutig definiert.

Da wir keine Felder erwarten, die durch lokalisierte Ladungen und Ströme in unendlicher Entfernung produziert werden, ist es vernünftig anzunehmen, daß $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{B}$ wie $1/r^2$ im Unendlichen abfallen und somit durch die Maxwell-Gleichungen eindeutig definiert sind.

Superpositionsprinzip. Eine der wichtigsten Eigenschaften der Maxwell-Gleichungen ist ihre Linearität. Sie beinhaltet – genau wie im Falle gewöhnlicher Differentialgleichungen – das Superpositionsprinzip, nach dem sich Lösungen der Maxwell-Gleichungen zu neuen Lösungen linear überlagern lassen. Insbesondere setzt sich die allgemeine Lösung aus der Gesamtheit der homogenen Lösungen plus einer speziellen inhomogenen Lösung zusammen. Wir werden auf diesen Punkt in Abschn. 2.2 zurückkommen.

2.1.3 Energie- und Impulserhaltungssatz

Es ist intuitiv klar, daß in elektromagnetischen Feldern Energie gespeichert ist. In diesem Unterabschnitt bestimmen wir die Energie- und Impulsdichten des elektromagnetischen Feldes. Zu diesem Zweck betrachten wir ein System, in dem es Punktteilchen mit den Ladungen q_i, den Orten $\boldsymbol{x}_i$ und den Geschwindigkeiten $\dot{\boldsymbol{x}}_i$ sowie elektromagnetische Felder $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$ gibt. Mit Hilfe der δ-Funktion lassen sich die Ladungs- und Stromdichten des Systems in der Weise

$$\rho(\boldsymbol{x},t) = \sum_i q_i \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_i) \ , \ \boldsymbol{j}(\boldsymbol{x},t) = \sum_i q_i \dot{\boldsymbol{x}}_i \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_i) \ ,$$

ausdrücken.[4]

[4] Mit dem elektrodynamischen Konzept von „Punktladungen“ bzw. ihrer Beschreibung durch δ-Funktionen sind prinzipielle Schwierigkeiten verbunden, die im Unterabschn. 2.5.1 näher erläutert werden.

Energieerhaltung. Nach (2.1) wirkt auf das i-te Teilchen die Kraft

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{L}}(\boldsymbol{x}_i,t)=q_i\left(\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}_i,t)+\frac{\dot{\boldsymbol{x}}_i}{c}\times\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}_i,t)\right)\ .$$

Durch den elektrischen Anteil von $\boldsymbol{F}_{\mathrm{L}}$ wird Arbeit an den Teilchen verrichtet, also die mechanische Energie E_{mech} der Teilchen geändert:

$$\frac{\mathrm{d}E_{\mathrm{mech}}}{\mathrm{d}t}=\sum_i\boldsymbol{F}_{\mathrm{L}}(\boldsymbol{x}_i,t)\dot{\boldsymbol{x}}_i=\sum_i q_i\dot{\boldsymbol{x}}_i\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}_i,t)=\int\mathrm{d}^3x\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x},t)\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t)\ .$$

Unter Verwendung von (IV) geht diese Gleichung über in

$$\frac{\mathrm{d}E_{\mathrm{mech}}}{\mathrm{d}t}=\frac{c}{4\pi}\int\mathrm{d}^3x\boldsymbol{E}\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}-\frac{1}{4\pi}\int\mathrm{d}^3x\boldsymbol{E}\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\ . \tag{2.6}$$

In dieser *Energiebilanzgleichung* ist nun die Energie des elektromagnetischen Feldes E_{em} implizit enthalten. Um dies zu sehen, addieren wir zu (2.6) die Null in Form von (II), multipliziert mit $\boldsymbol{B}$. Dies ergibt

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}E_{\mathrm{mech}}}{\mathrm{d}t}&=\frac{c}{4\pi}\int\mathrm{d}^3x(\boldsymbol{E}\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E})-\int\mathrm{d}^3x\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\boldsymbol{E}^2+\boldsymbol{B}^2}{8\pi}\right)\\&=-\frac{c}{4\pi}\oint_F(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B})\mathrm{d}\boldsymbol{F}-\frac{\partial}{\partial t}\int\mathrm{d}^3x\left(\frac{\boldsymbol{E}^2+\boldsymbol{B}^2}{8\pi}\right)\ ,\end{aligned} \tag{2.7}$$

wobei die Identität

$$\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{q})=\boldsymbol{q}\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{q}$$

und der Stokessche Satz verwendet wurden. Zur Interpretation der in (2.7) stehenden Terme betrachten wir zuerst den Fall eines unendlich ausgedehnten Volumens, wobei angenommen wird, daß die Felder im Unendlichen stärker als $1/r$ abfallen. Gleichung (2.7) reduziert sich dann auf

$$\frac{\mathrm{d}E_{\mathrm{mech}}}{\mathrm{d}t}=-\frac{\partial}{\partial t}\int\mathrm{d}^3x\left(\frac{\boldsymbol{E}^2+\boldsymbol{B}^2}{8\pi}\right)\ .$$

Dies legt es nahe, den Ausdruck

$$\frac{\boldsymbol{E}^2+\boldsymbol{B}^2}{8\pi}$$

als die Energiedichte ϵ_{em} des elektromagnetischen Feldes anzusehen. Unter Verwendung des Gaußschen Satzes folgt weiterhin aus (2.7) für endliche Volumina

$$\frac{\mathrm{d}E_{\mathrm{mech}}}{\mathrm{d}t}=-\int\mathrm{d}^3x\left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{S}+\frac{\partial\epsilon_{\mathrm{em}}}{\partial t}\right)\ , \tag{2.8}$$

wobei

$$\boldsymbol{S}=\frac{c}{4\pi}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B})$$

der sog. *Poynting-Vektor* ist und mit der Energiestromdichte des elektromagnetischen Feldes identifiziert werden kann. Da (2.8) für beliebige Volumina gilt, folgt der

Satz 2.4: Energiesatz der Elektrodynamik (Poyntingsches Theorem)

In einem aus geladenen Teilchen und elektromagnetischen Feldern bestehenden System gilt die Energiebilanzgleichung

$$\frac{\partial \epsilon_{\rm mech}}{\partial t} + \frac{\partial \epsilon_{\rm em}}{\partial t} = -\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{S} \ ,$$

mit

$$\frac{\partial \epsilon_{\rm mech}(\boldsymbol{x},t)}{\partial t} = \boldsymbol{j}(\boldsymbol{x},t)\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t) \quad \text{Zeitl. Abl. der mechanischen Energiedichte}$$

$$\epsilon_{\rm em} = \frac{\boldsymbol{E}^2(\boldsymbol{x},t) + \boldsymbol{B}^2(\boldsymbol{x},t)}{8\pi} \quad \text{Elektromagnetische Energiedichte}$$

$$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x},t) = \frac{c}{4\pi}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t) \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t) \quad \text{Poynting-Vektor, Energiestromdichte.}$$

Das Poyntingsche Theorem stellt eine Art Kontinuitätsgleichung für die Energie eines Systems dar, nach der die zeitliche Änderung der totalen Energie (mechanische plus elektromagnetische) in einem Volumen V gleich dem Energiefluß durch die V umschließende Fläche F ist:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(E_{\rm mech} + E_{\rm em}) = -\oint\limits_F \boldsymbol{S}\mathrm{d}\boldsymbol{F} \ .$$

Wählt man das Volumen V hinreichend groß, so daß sich alle betrachteten Ladungen und Felder im Innern der V umgrenzenden Fläche F befinden, dann verschwindet die rechte Seite dieser Gleichung und man erhält den Energiesatz für abgeschlossene Systeme:

$$E_{\rm mech} + E_{\rm em} = \text{const} \ . \tag{2.9}$$

Impulserhaltung. Die Ableitung der Impulsbilanz erfolgt analog zur Energiebilanz. Ausgangspunkt hierbei ist die zeitliche Änderung des mechanischen Impulses:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{P}_{\rm mech}}{\mathrm{d}t} = \sum_i \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{P}_{{\rm mech},i}}{\mathrm{d}t} &= \sum_i \boldsymbol{F}_{{\rm L},i}(\boldsymbol{x}_i,t) \\ &= \int \mathrm{d}^3x \left(\rho(\boldsymbol{x},t)\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t) + \frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x},t)}{c} \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t)\right) .\end{aligned}$$

Drückt man in dieser Gleichung ρ und $\boldsymbol{j}$ durch die Felder $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{B}$ aus und symmetrisiert dann durch Addition des Ausdrucks (vgl. (II) und (III))

$$\frac{1}{4\pi}\left(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\right)\times\boldsymbol{E}+\frac{1}{4\pi}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{B})=\boldsymbol{0}\ ,$$

so erhält man

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{P}_{\mathrm{mech}}}{\mathrm{d}t}=-\frac{1}{4\pi c}\frac{\partial}{\partial t}\int \mathrm{d}^3x(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B})\ +\ \frac{1}{4\pi}\int \mathrm{d}^3x[\boldsymbol{E}(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{E})+\boldsymbol{B}(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{B}) \\ -\boldsymbol{E}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E})-\boldsymbol{B}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B})]\ .$$

Der Integrand des ersten Terms,

$$\frac{1}{4\pi c}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B})=\frac{\boldsymbol{S}}{c^2}\ ,$$

wird mit der Impulsdichte g_{em} des elektromagnetischen Feldes identifiziert. Die Komponenten des Integranden des zweiten Terms lassen sich jeweils als Divergenz eines Vektorfeldes schreiben, und es ergibt sich schließlich der

Satz 2.5: Impulssatz der Elektrodynamik

In einem aus geladenen Teilchen und elektromagnetischen Feldern bestehenden System gilt die Impulsbilanzgleichung

$$\left[\frac{\partial\boldsymbol{g}_{\mathrm{mech}}}{\partial t}\right]_i+\left[\frac{\partial\boldsymbol{g}_{\mathrm{em}}}{\partial t}\right]_i=\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{T}_i\ , \tag{2.10}$$

mit

$$\frac{\partial\boldsymbol{g}_{\mathrm{mech}}(\boldsymbol{x},t)}{\partial t}=\rho(\boldsymbol{x},t)\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t)+\frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x},t)}{c}\times\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t)$$
Zeitl. Abl. der mechanischen Impulsdichte

$$\boldsymbol{g}_{\mathrm{em}}(\boldsymbol{x},t)=\frac{\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x},t)}{c^2}$$
Elektromagnetische Impulsdichte

$$\boldsymbol{T}_i=(T_{i1},T_{i2},T_{i3})$$
$$T_{ik}=\frac{1}{4\pi}\left[E_iE_k+B_iB_k-\frac{\delta_{ik}}{2}\left(\boldsymbol{E}^2+\boldsymbol{B}^2\right)\right]$$
Maxwellscher Spannungstensor.

Analog zum Energiesatz (2.9) für abgeschlossene Systeme erhält man durch Integration von (2.10) über ein genügend großes, alle betrachteten Teilchen und Felder einschließendes Volumen den Impulssatz für abgeschlossene Systeme:

$$\boldsymbol{P}_{\mathrm{mech}}+\boldsymbol{P}_{\mathrm{em}}=\mathrm{const}\ .$$

Im weiteren Verlauf werden wir es desöfteren mit zeitlich oszillierenden $\boldsymbol{E}$- und $\boldsymbol{B}$-Feldern zu tun haben. In diesem Fall ist es sinnvoll, an Stelle von ϵ_{em} und $\boldsymbol{S}$ deren Mittelung über eine Schwingungsperiode zu betrachten, da hierbei die oszillierenden Terme wegfallen.

Definition: Zeitgemittelte elektromagnetische Energiedichte $\overline{\epsilon_{\rm em}}$ und Energiestromdichte $\overline{\boldsymbol{S}}$

Bei oszillierenden Feldern der Art

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t) = \mathrm{Re}\left[\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\right] \;,\; \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t) = \mathrm{Re}\left[\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\right]$$

betrachtet man üblicherweise die zeitgemittelten Größen $\overline{\epsilon_{\rm em}}$ und $\overline{\boldsymbol{S}}$, welche wie folgt definiert sind:

$$\overline{\epsilon_{\rm em}} = \frac{1}{T}\int\limits_t^{t+T} \mathrm{d}t\epsilon_{\rm em} = \frac{|\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})|^2 + |\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})|^2}{16\pi} \;,\; T = \frac{2\pi}{\omega} \tag{2.11}$$

$$\overline{\boldsymbol{S}} = \frac{1}{T}\int\limits_t^{t+T} \mathrm{d}t\boldsymbol{S} = \frac{c}{8\pi}\mathrm{Re}[\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) \times \boldsymbol{B}^*(\boldsymbol{x})] \;. \tag{2.12}$$

2.1.4 Physikalische Einheiten

Die Maxwell-Gleichungen (I) bis (IV) beschreiben die funktionalen Abhängigkeiten zwischen den Ladungs- und Stromdichten, ρ und $\boldsymbol{j}$, sowie den elektromagnetischen Feldern $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{B}$. Die auftretenden Proportionalitätskonstanten sind jedoch mit einer gewissen Willkür behaftet und hängen vom verwendeten Einheitensystem ab. Vor Festlegung eines Maßsystems könnte man die Maxwell-Gleichungen unter Einführung von vier Proportionalitätskonstanten $k_1, \ldots, k_4$ auch in folgender Form hinschreiben:

$$\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t) = 4\pi k_1 \rho(\boldsymbol{x},t) \tag{2.13}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t) + k_2\frac{\partial \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t)}{\partial t} = \boldsymbol{0} \tag{2.14}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t) = 0 \tag{2.15}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t) - k_3\frac{\partial \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t)}{\partial t} = 4\pi k_4 \boldsymbol{j}(\boldsymbol{x},t) \;. \tag{2.16}$$

Geht man davon aus, daß die Kontinuitätsgleichung in jedem Einheitensystem die Form

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{j} = 0 \tag{2.17}$$

hat, dann liefert die Kombination von (2.13) und (2.16) durch Vergleich mit (2.17) die Bedingungsgleichung

$$k_1 k_3 = k_4 \;.$$

Eine weitere Einschränkung folgt aus der Erfahrungstatsache, daß sich elektromagnetische Wellen im Vakuum mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten. Die zugehörigen Wellengleichungen erhält man aus Kombination der Rotationsgleichungen (2.14) und (2.16) zu

$$\boldsymbol{\nabla}^2 \begin{pmatrix} \boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{B} \end{pmatrix} - k_2 k_3 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \begin{pmatrix} \boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{B} \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}$$

und liefern folglich die Bedingung

$$k_2 k_3 = \frac{1}{c^2} \ .$$

Von den vier Proportionalitätskonstanten sind also nur zwei unabhängig; ihre Wahl definiert jeweils ein Einheitensystem. Die zwei gebräuchlichsten Systeme sind das MKSA-System und das Gauß-System. Für sie gilt

System	k_1	k_2	k_3	k_4
MKSA	$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$	1	$\epsilon_0\mu_0$	$\frac{\mu_0}{4\pi}$
Gauß	1	$\frac{1}{c}$	$\frac{1}{c}$	$\frac{1}{c}$

Die Größen $\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{A^2 s^4 m^{-3} kg^{-1}}$ und $\mu_0 = 1/\epsilon_0 c^2$ heißen *Dielektrizitätskonstante des Vakuums* bzw. *Permeabilitätskonstante des Vakuums*.

Das MKSA-(Meter, Kilogramm, Sekunde, Ampère)-System ist das um die Grundgröße „Strom" erweitere MKS-System der Mechanik. Die Einheit „A" (Ampère) des Stromes ist dabei über die Kraft definiert, die zwei in einem gewissen Abstand befindlichen stromdurchflossene Leiter aufeinander ausüben. Da der elektrische Strom in Leitern gleich der Ladungsmenge dq ist, die pro Zeiteinheit dt durch die (konstante) Querschnittsfläche des Leiters tritt,

$$I(t) = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} \ ,$$

folgt für die zusammengesetzte Einheit „C (Coulomb)" der Ladung

$$1\,\mathrm{C} = 1\,\mathrm{As} \ .$$

Im Gauß-System wird als weitere Grundgröße (zu den drei Grundgrößen Zentimeter, Gramm, Sekunde) die Ladungseinheit „ESE" (Elektrostatische Einheit) über die Kraft definiert, die zwei statische Ladungen dieser Größe in einem bestimmten Abstand aufeinander ausüben. Hier folgt die Stromstärke als eine aus Sekunde und ESE zusammengesetzte Einheit.[5]

Im Bereich der makroskopischen Experimentalphysik wird aus praktischen Gründen überwiegend das MKSA-System verwendet, während in der Atomphysik, der Kernphysik und insbesondere in vielen Lehrbüchern der

[5] Die Konversion verschiedener Einheitensysteme wird ausführlich in [12] diskutiert.

theoretischen Physik das Gauß-System zur Anwendung kommt. Der große Vorteil des Gauß-Systems gegenüber dem MKSA-System (oder anderer Systeme) besteht darin, daß in ihm die relativistische Struktur der Elektrodynamik aufgrund von v/c-Faktoren besser zum Ausdruck kommt. Wie später gezeigt wird, transformieren sich $\boldsymbol{E}$- und $\boldsymbol{B}$-Felder ineinander, wenn man von einem Inertialsystem zu einem anderen übergeht. Das Gauß-System trägt dieser Tatsache unmittelbar Rechnung, da in ihm $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{B}$ dieselbe physikalische Einheit besitzen. Aufgrund dieser Überlegungen wird in diesem Kapitel durchweg das Gauß-System verwendet.

Zusammenfassung

- Elektromagnetische Phänomene werden ursächlich durch die **Ladungsdichte** ρ und den **Stromdichtevektor** $\boldsymbol{j}$ einerseits sowie durch die **elektromagnetischen Felder** $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$ – als deren Wirkung – andererseits beschrieben. Diese Größen sind durch ein System partieller Differentialgleichungen 1. Ordnung – den **Maxwell-Gleichungen** – miteinander verknüpft.
- Die Maxwell-Gleichungen, zusammen mit der **Lorentz-Kraft**, definieren die Theorie der klassischen Elektrodynamik.
- Die Maxwell-Gleichungen sind mit der Erhaltung der Ladung in einem abgeschlossenen System, ausgedrückt durch die **Kontinuitätsgleichung**, im Einklang.
- Zwischen den **mechanischen** und **elektromagnetischen Energie-** bzw. **Impulsdichten** existieren **Bilanzbeziehungen**, die sich in Form von Kontinuitätsgleichungen formulieren lassen. Sowohl die Summe aus mechanischer und elektromagnetischer Energie als auch die Summe aus mechanischem und elektromagnetischem Impuls sind in einem abgeschlossenen System von Ladungen und Feldern erhalten.
- In diesem Kapitel wird ausschließlich das **Gauß-System** verwendet, da es die relativistische Struktur der Elektrodynamik am besten zum Ausdruck bringt.

Anwendungen

20. Magnetische Monopole. Man nehme an, daß es – neben den elektrischen Ladungs- und Stromdichten $\rho = \rho_e$, $\boldsymbol{j} = \boldsymbol{j}_e$ – auch magnetische Entsprechungen ρ_m, $\boldsymbol{j}_m$ gibt, so daß die Maxwell-Gleichungen die in $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{B}$ symmetrische Form

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{E} = 4\pi\rho_e \\
&\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = -\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}_m
\end{aligned}$$

$$\nabla \boldsymbol{B} = 4\pi\rho_m$$
$$\nabla \times \boldsymbol{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}_e$$

annehmen. Zu zeigen ist: Selbst wenn es magnetische Monopole gäbe, das Verhältnis zwischen elektrischer und magnetischer Ladung aller Teilchen aber gleich wäre, behielten die Maxwell-Gleichungen (I) bis (IV) ihre Gültigkeit. Hinweis: Man betrachte obige Maxwell-Gleichungen unter der Dualitätstransformation

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}' \\ \boldsymbol{B}' \\ \rho_e' \\ \rho_m' \\ \boldsymbol{j}_e' \\ \boldsymbol{j}_m' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{B} \\ \rho_e \\ \rho_m \\ \boldsymbol{j}_e \\ \boldsymbol{j}_m \end{pmatrix} .$$

Lösung. Man verifiziert leicht, daß die symmetrisierten Maxwell-Gleichungen unter der angegebenen Dualitätstransformation invariant sind. Da das elektromagnetische Ladungsverhältnis aller Teilchen nach Voraussetzung konstant ist, können wir α für alle Teilchen so wählen, daß gilt:

$$\rho_m' = \rho_e \left(\sin\alpha + \frac{\rho_m}{\rho_e}\cos\alpha\right) = 0$$

und

$$|\boldsymbol{j}_m'| = |\boldsymbol{j}_e| \left(\sin\alpha + \frac{|\boldsymbol{j}_m|}{|\boldsymbol{j}_e|}\cos\alpha\right) = |\boldsymbol{j}_e| \left(\sin\alpha + \frac{\rho_m}{\rho_e}\cos\alpha\right) = 0 .$$

Für diesen speziellen Winkel gehen dann obige Maxwell-Gleichungen in die alten Gleichungen (I) bis (IV) über. Mit anderen Worten: Gäbe es magnetische Monopole bei gleichem elektromagnetischen Ladungsverhältnis aller Teilchen, dann könnte man die magnetische Ladung auf Null festsetzen.

Die eigentlich interessante Frage im Zusammenhang mit magnetischen Monopolen ist also, ob es Teilchen mit verschiedenen elektromagnetischen Ladungsverhältnissen gibt. Wäre dem so, dann müßte generell die magnetische Ladung zugelassen und die Maxwell-Gleichungen in obiger symmetrischer Form diskutiert werden. Darüber hinaus könnte man – nach einer quantenmechanischen Überlegung von Dirac – die Quantisierung der elektrischen Ladung erklären.[6]

21. Leiterschleife mit Plattenkondensator. Man betrachte eine mit einem Plattenkondensator verbundene Leiterschleife in einem homogenen Magnetfeld (Abb. 2.3). Das Magnetfeld zeige in die Zeichenebene hinein und wachse dem Betrag nach zeitlich an. Welche der beiden Kondensatorplatten wird positiv aufgeladen?

---

[6] Praktisch alle geladene Körper besitzen ganzzahlige Vielfache der Elementarladung $-e$ des Elektrons.

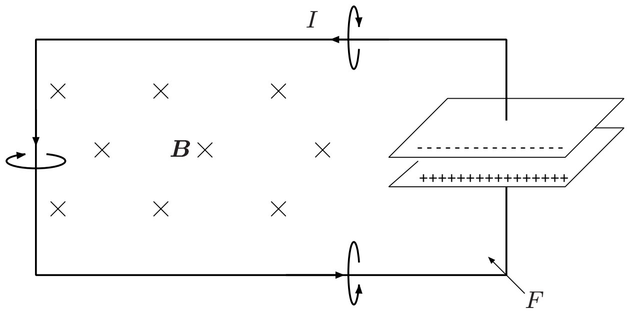

Abb. 2.3. Leiterschleife mit Plattenkondensator im äußeren Magnetfeld. Die Pfeile geben die Richtung des induzierten Stromes bzw. des induzierten Magnetfeldes an für den Fall, daß das äußere Magnetfeld in die Zeichenebene zeigt und mit der Zeit anwächst

Lösung. Aufgrund des Faradayschen Induktionsgesetzes wird im Leiter ein Strom induziert. Um diesen Strom zirkuliert nach dem Ampèreschen Gesetz ein Magnetfeld, dessen Umlaufsinn – der Lenzschen Regel entsprechend – der eigentlichen Ursache, also dem Ansteigen des ursprünglichen Magnetfeldes entgegenwirkt. Der Strom fließt deshalb im mathematisch positiven Sinne, und die obere Kondensatorplatte wird negativ aufgeladen.[7] Die mathematische Begründung lautet: Betrachtet man die Umlaufspannung im mathematisch positiven Sinne, dann zeigt der Normalenvektor der Fläche F aus der Zeichenebene heraus, und es gilt

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{F} = -|\boldsymbol{B}||\boldsymbol{F}| \Longrightarrow V = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\boldsymbol{F} = +\frac{1}{c}\frac{\partial |\boldsymbol{B}|}{\partial t}|\boldsymbol{F}| > 0 \ .$$

Es wird also eine positive Umlaufspannung induziert; der Strom fließt im mathematisch positiven Sinne.

2.2 Lösungen der Maxwell-Gleichungen in Form von Potentialen

Die Maxwell-Gleichungen stellen ein System von vier gekoppelten Differentialgleichungen 1. Ordnung für die Felder $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{B}$ dar. Nun ist es durch Einführen eines *Vektorpotentials* $\boldsymbol{A}$ und eines *Skalarpotentials* ϕ möglich, die Maxwell-Gleichungen in zwei Differentialgleichungen 2. Ordnung zu überführen. Oftmals erweist es sich als günstiger, diese Potentiale zu berechnen und daraus dann die Felder $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{B}$ abzuleiten. Es stellt sich dabei heraus, daß die Potentiale nicht eindeutig definiert sind; ganze Klassen von Potentialen führen zu denselben elektromagnetischen Feldern und sind über sog.

[7] Man beachte: Die Richtung des Stromes ist der Bewegungsrichtung der freien Leitungselektronen (mit negativer Ladung) entgegengesetzt (*technische Stromrichtung*).